

Fizyka

wykład 1

zadania

str. 5 zad. 1

Ad a)

Obwód kuli o promieniu r jest równy obwodowi okręgu o takim samym promieniu, a obwód okręgu wynosi $C = 2\pi r$. Przyjmując $\pi \approx 3,14169$ mamy

$$\begin{aligned} C &\approx 2 \cdot 3,14169 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 40,023 \cdot 10^6 \text{ m} = 4,0023 \cdot 10^7 \text{ m} \\ &= 4,0023 \cdot \frac{10^7}{10^3} \text{ km} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ km}. \end{aligned}$$

Ad b)

Pole powierzchni kuli wynosi $S = 4\pi r^2 \approx 12,57 \cdot r^2$. Dla Ziemi mamy

$$\begin{aligned} S &\approx 12,57 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \approx 12,57 \cdot 40,577 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \\ &\approx 510,05 \cdot 10^{12} \text{ m}^2 \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 = 5,1 \cdot \frac{10^{14}}{10^6} \text{ km}^2 = 5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Ad c)

Objętość kuli o promieniu r wynosi $V = (4/3) \cdot \pi r^3 \approx 4,189 \cdot r^3$. W przypadku Ziemi otrzymujemy

$$\begin{aligned} V &\approx 4,189 \cdot (6,37 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \approx 4,189 \cdot 258,475 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \\ &\approx 1082,75 \cdot 10^{18} \text{ m}^3 \approx 1,08 \cdot 10^{21} \text{ m}^3 = 1,08 \cdot \frac{10^{21}}{10^9} \text{ km}^3 = 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3. \end{aligned}$$

str. 6 zad. 4

Francuski tydzień (ft) jest równy 10 dniom, czyli mamy

$$\begin{aligned} \text{ft} &= 10 \text{ dni} = 10 \cdot 10 \text{ godzin} = 10 \cdot 10 \cdot 100 \text{ minut} \\ &= 10 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 100 \text{ sekund} = 10^6 \text{ sekund}. \end{aligned}$$

Z kolei zwykły tydzień (zt) ma 7 dni, więc mamy

$$\text{zt} = 7 \text{ d} = 7 \cdot 24 \text{ h} = 7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ m} = 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 604\,800 \text{ s}.$$

Ad a)

$$\frac{\text{ft}}{\text{zt}} = \frac{10 \text{ dni}}{7 \text{ d}} \approx 1,43$$

Ad b)

Ponieważ 10 dni francuskich stanowi 10^6 sekund francuskich, więc 1 dzień francuski trwa 10^5 sekund francuskich. Stąd 7 dni francuskich trwa $7 \cdot 10^5$ sekund francuskich. Z drugiej strony, $7 \text{ d} = 604\,800 \text{ s} = 6,048 \cdot 10^5 \text{ s}$, a stąd mamy proporcję

$7 \cdot 10^5$ sekund francuskich – $6,048 \cdot 10^5$ s
1 sekunda francuska – x s,

skąd

$$x = \frac{6,048 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^5} = 0,864.$$

str. 7 zad. 7

Danymi są: przyrost $d = 3,7$ m oraz czas $t = 14$ d. Prędkość przyrostu określa wzór

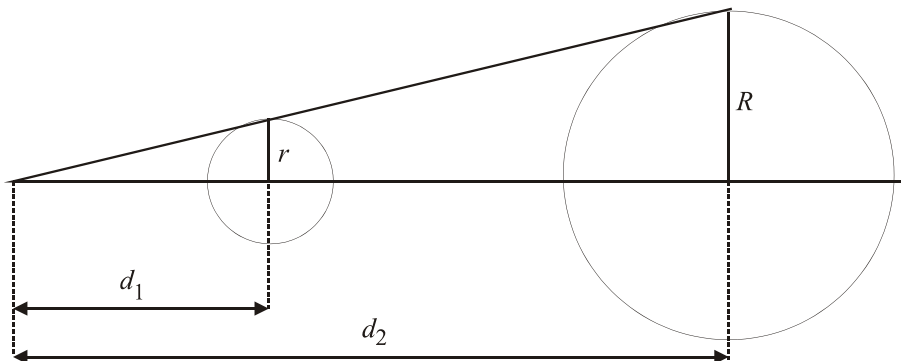
$$v = \frac{d}{t}$$

i po podstawieniu danych otrzymujemy

$$v = \frac{3,7 \text{ m}}{14 \text{ d}} = \frac{3,7 \cdot 10^6 \mu\text{m}}{14 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{3,7 \cdot 10^6 \mu\text{m}}{1209600 \text{ s}} = \frac{3,7 \cdot 10^6 \mu\text{m}}{1,2096 \cdot 10^6 \text{ s}} \approx 3,06 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}.$$

str. 7 zad. 9

Przyjmijmy, że odległość Ziemi od Księżyca jest równa $d_1 = 1$. Wówczas odległość Ziemi od Słońca wynosi $d_2 = 400$. Oznaczmy promień Słońca przez R , a promień Księżyca przez r .



Ad a)

Z podobieństwa trójkątów (zob. rysunek powyżej) otrzymujemy

$$\frac{R}{d_2} = \frac{r}{d_1},$$

czyli

$$\frac{R}{r} = \frac{d_2}{d_1} = 400$$

i tak samo jest dla średnic:

$$\frac{2R}{2r} = \frac{R}{r} = 400.$$

Ad b)

Oznaczmy objętość Słońca przez V_S , a objętość Księżyca przez V_K . Mamy

$$V_S = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad V_K = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

a stąd

$$\frac{V_S}{V_K} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 = 400^3 = 4^3 \cdot (10^2)^3 = 64 \cdot 10^6 = 6,4 \cdot 10^7.$$

str. 13 zad. 1

Danymi są: prędkość samochodu $v = 90 \text{ km/h}$ i czas $t = 0,5 \text{ s}$. Z wzoru

$$x = x_0 + vt$$

otrzymujemy wzór na drogę:

$$x - x_0 = vt.$$

Po podstawieniu danych mamy

$$x - x_0 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,5 \text{ s} = \frac{90 \cdot 10^3}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,5 \text{ s} = 0,0125 \cdot 10^3 \text{ m} = 12,5 \text{ m}.$$

str. 13 zad. 3

Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami.

Pierwszy sposób jest bardzo prosty, a rozwiązanie wynika z faktu, że skoro pociągi jadą naprzeciwko siebie z prędkością 30 km/h po drodze o długości 60 km , to zderzą się po godzinie. Przez godzinę ptak lecący z prędkością 60 km/h przebędzie drogę 60 km (obojętnie po jakiej drodze będzie latać).

Drugi sposób jest bardziej „wyrafinowany”. Oznaczmy prędkość ptaka przez v_1 , prędkości pociągów przez v_2 , a początkową odległość pociągów przez d . Obliczmy drogę do pierwszego spotkania ptaka z pociągiem jadącym naprzeciwko. Droga ptaka do tego spotkania wynosi

$$d_1 = v_1 t, \tag{1}$$

a droga pociągu jadącego naprzeciwko –

$$d_2 = v_2 t.$$

Jest oczywiste, że

$$d = d_1 + d_2,$$

a stąd

$$d_1 = d - d_2 = d - v_2 t. \quad (2)$$

Ale z równania (1) wynika, że

$$t = \frac{d_1}{v_1}$$

i po podstawieniu tej wielkości do równania (2) otrzymujemy

$$d_1 = d - v_2 \frac{d_1}{v_1}.$$

Rozwiązując to równanie względem d_1 mamy

$$d_1 = \frac{d}{1 + \frac{v_2}{v_1}}$$

i po podstawieniu danych dostajemy

$$d_1 = \frac{60}{1 + \frac{30}{60}} = \frac{60}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{60}{\frac{3}{2}} = \frac{120}{3} = 40 \text{ km.}$$

Pociąg w tym czasie przebył drogę 20 km. Pierwszy pociąg jest w tej chwili w odległości 20 km od ptaka. Przyjmujemy tę odległość za nową drogę d i mamy

$$d'_1 = \frac{20}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{20}{\frac{3}{2}} = \frac{40}{3} \text{ km.}$$

Dotychczasowa łączna droga D ptaka wynosi

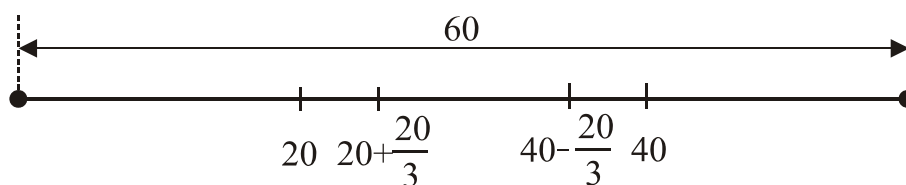
$$D = 40 + \frac{40}{3}.$$

W tym czasie, tj.

$$t = \frac{d'_1}{v_1},$$

pociąg przebył drogę

$$d'_2 = v_2 t = 30 \cdot \frac{\frac{40}{3}}{60} = \frac{20}{3} \text{ km.}$$



Odległość (nowa wartość d) jaka dzieli teraz pociągi wynosi (zob. rysunek powyżej)

$$d = 40 - \frac{20}{3} - \left(20 + \frac{20}{3}\right) = 20 - \frac{40}{3} \text{ km}$$

i mamy drogę ptaka

$$d_1'' = \frac{20 - \frac{40}{3}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{40}{9} \text{ km.}$$

Zatem dotychczasowa droga ptaka wynosi

$$D = 40 + \frac{40}{3} + \frac{40}{9} = 40 + \frac{40}{3} + \frac{40}{3^2}.$$

Postępując tak dalej otrzymujemy całkowitą drogę ptaka w postaci szeregu

$$D = 40 + \frac{40}{3} + \frac{40}{3^2} + \frac{40}{3^3} + \dots = 40 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right).$$

Szereg w nawiasie jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 1/3$. Jego suma jest równa

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

czyli

$$D = 40 \cdot \frac{3}{2} = 60 \text{ km.}$$

str. 14 zad. 9

Danymi są: wysokość szybu $h = 190$ m, maksymalna prędkość kabiny $v_{\max} = 305$ m/min oraz przyspieszenie windy $a = 1,22$ m/s².

Ad a)

Skorzystamy z równania (zob. wykład 1 wzór (2.6))

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

w którym podstawiamy $v = v_{\max}$, $v_0 = 0$ i $x_0 = 0$, czyli mamy

$$v_{\max}^2 = 2ax,$$

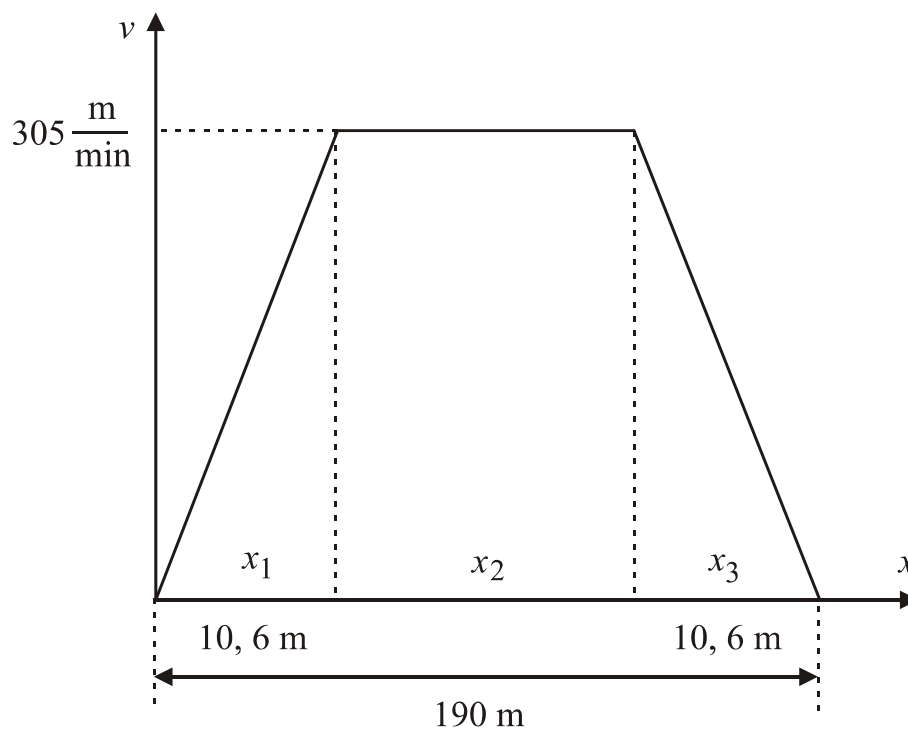
skąd

$$x = \frac{v_{\max}^2}{2a}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$x = \frac{\left(305 \frac{\text{m}}{\text{min}}\right)^2}{2 \cdot 1,22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{\left(\frac{305}{60}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2,44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx \frac{25,84}{2,44} \text{ m} \approx 10,6 \text{ m}.$$

Ad b)



Najpierw na drodze $x_1 = 10,6 \text{ m}$ winda przyspiesza do osiągnięcia maksymalnej prędkości (zob. rysunek powyżej). Z wzoru (zob. wykład 1 wzór (2.5))

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

po podstawieniu danych ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$) mamy

$$10,6 = \frac{1}{2} \cdot 1,22 \cdot t_1^2,$$

skąd

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10,6}{1,22}} \approx 4,17 \text{ s}.$$

Następnie na drodze x_2 winda jedzie ze stałą prędkością $v = 305$ m/min, czyli zachodzi wzór (zob. wykład 1 wzór (2.4))

$$x_2 = x_0 + vt_2,$$

czyli

$$x_2 - x_0 = vt_2, \quad (3)$$

przy czym

$$x_2 - x_0 = h - x_1 - x_2 = 190 - 2 \cdot 10,6 = 168,8 \text{ m.}$$

Po podstawieniu danych do wzoru (3) mamy

$$168,8 = \frac{305}{60} \cdot t_2 \approx 5,08 \cdot t_2, \quad (4)$$

gdzie jednostki [m/min] zamieniliśmy na [m/s]. Z wzoru (4) mamy

$$t_2 \approx \frac{168,8}{5,08} \approx 33,23 \text{ s.}$$

Drogę x_3 winda pokonuje w takim samym czasie, jak drogę x_1 . Łączny czas jest więc równy

$$t = 2 \cdot t_1 + t_2 \approx 2 \cdot 4,17 + 33,23 = 41,57 \text{ s.}$$

str. 19 zad. 6

Dane:

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k},$$

$$\vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k},$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}.$$

Ad a)

W celu obliczenia iloczynu skalarnego $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ obliczamy najpierw iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{c}$. Mamy

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{c} &= (b_y c_z - c_y b_z)\hat{i} + (b_z c_x - c_z b_x)\hat{j} + (b_x c_y - c_x b_y)\hat{k} \\ &= (4 \cdot 1 - 2 \cdot 2)\hat{i} + (2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1))\hat{j} + (-1 \cdot 2 - 2 \cdot 4)\hat{k} \\ &= 0\hat{i} + 5\hat{j} - 9\hat{k}. \end{aligned}$$

Dalej korzystamy z wzoru na iloczyn skalarny wyrażony przez współrzędne. Otrzymujemy

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-9) = 15 + 18 = 33.$$

Ad b)

Wynik będzie iloczynem skalarnym. Obliczamy najpierw sumę $\vec{b} + \vec{c}$:

$$\vec{b} + \vec{c} = (-1 + 2)\hat{i} + (4 + 2)\hat{j} + (2 + 1)\hat{k} = \hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}.$$

Ponownie korzystamy z wzoru na iloczyn skalarny:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + (-2) \cdot 3 = 3 + 18 - 6 = 15.$$

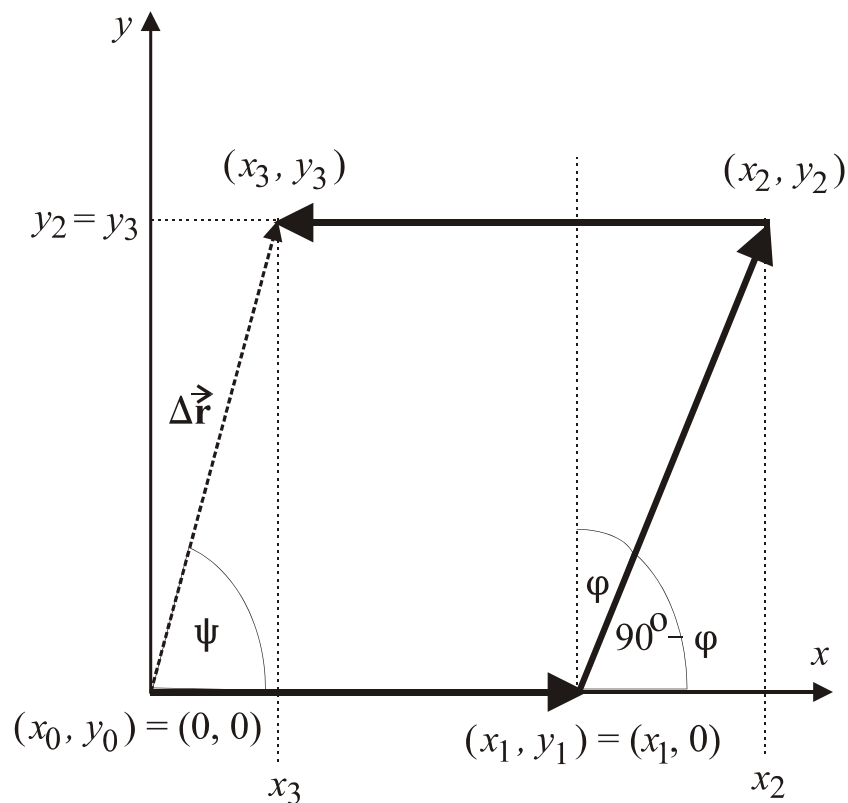
Ad c)

Wynik będzie wektorem. Jeżeli składowe wektora $\vec{b} + \vec{c}$ oznaczymy przez d_x , d_y i d_z , to mamy

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= (a_y d_z - d_y a_z) \hat{i} + (a_z d_x - d_z a_x) \hat{j} + (a_x d_y - d_x a_y) \hat{k} \\ &= (3 \cdot 3 - 6 \cdot (-2)) \hat{i} + (-2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) \hat{j} + (3 \cdot 6 - 1 \cdot 3) \hat{k} \\ &= 21 \hat{i} - 11 \hat{j} + 15 \hat{k}. \end{aligned}$$

str. 28 zad. 3

Narysujmy drogę pociągu w układzie Oxy .



Ad a)

Podczas jazdy pociągu na wschód $\Delta y = y_1 - y_0 = 0$, więc

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{\Delta t} = \frac{x_1}{\Delta t},$$

bo $x_0 = 0$. Stąd

$$x_1 = v \cdot \Delta t$$

i po podstawieniu danych mamy

$$x_1 = \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot \left(\frac{40}{60} \text{ h}\right) = 40 \text{ km.}$$

W celu wyznaczenia współrzędnych x_2 i y_2 skorzystamy z twierdzenia sinusów i wzoru na prędkość średnią (w dwóch wymiarach). Z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{x_2 - x_1}{\sin \varphi} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{y_2 - y_1}{\cos \varphi},$$

czyli

$$\frac{x_2 - 40}{\sin 50^\circ} = \frac{y_2}{\cos 50^\circ}.$$

Stąd

$$y_2 = \frac{\cos 50^\circ}{\sin 50^\circ} (x_2 - 40) \approx \frac{0,64}{0,77} (x_2 - 40) \approx 0,83(x_2 - 40). \quad (5)$$

Prędkość w dwóch wymiarach określa wzór

$$v = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{\Delta t}\right)^2}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$60 = \sqrt{\left(\frac{x_2 - 40}{20}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{20}\right)^2} = \frac{60}{20} \sqrt{(x_2 - 40)^2 + y_2^2}.$$

Mamy zatem równanie

$$\sqrt{(x_2 - 40)^2 + y_2^2} = 20,$$

czyli

$$(x_2 - 40)^2 + y_2^2 = 400.$$

Uwzględniając w tym równaniu wielkość y_2 daną wzorem (5) dostajemy

$$(x_2 - 40)^2 + (0,83)^2 (x_2 - 40)^2 = 400,$$

$$(x_2 - 40)^2 + 0,69 \cdot (x_2 - 40)^2 = 400,$$

$$1,69 \cdot (x_2 - 40)^2 = 400,$$

$$(x_2 - 40)^2 = \frac{400}{1,69},$$

$$(x_2 - 40)^2 = 236,7,$$

$$x_2 - 40 = \sqrt{236,7},$$

$$x_2 - 40 = 15,4,$$

$$x_2 = 55,4$$

i po podstawieniu tej wartości do wzoru (5) mamy

$$y_2 = 0,83 \cdot (55,4 - 40) \approx 12,8.$$

Zatem

$$(x_2, y_2) = (55,4; 12,8).$$

Ponieważ $y_3 = y_2$, więc prędkość na drodze od punktu (x_2, y_2) do punktu (x_3, y_3) określa wzór

$$v = \frac{x_2 - x_3}{\Delta t},$$

skąd

$$x_3 = x_2 - v\Delta t.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$x_3 = 55,4 - 60 \cdot \frac{50}{60} = 5,4$$

i mamy

$$(x_3, y_3) = (5,4; 12,8).$$

Wynika z tego, że wektor $\Delta\vec{r}$, który określa przemieszczenie od punktu (x_0, y_0) do punktu (x_3, y_3) ma postać

$$\Delta\vec{r} = 5,4\hat{i} + 12,8\hat{j}.$$

Prędkość średnia na tej drodze wynosi

$$v_{sr} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_y}{\Delta t}\right)^2}, \quad (6)$$

gdzie Δt oznacza całkowity czas jazdy pociągu, czyli $\Delta t = 40 + 20 + 50 = 150 \text{ min} = 11/6 \text{ h}$. Po podstawieniu danych do wzoru (6) otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} v_{sr} &= \sqrt{\left(\frac{5,4}{\frac{11}{6}}\right)^2 + \left(\frac{12,8}{\frac{11}{6}}\right)^2} = \frac{6}{11} \sqrt{(5,4)^2 + (12,8)^2} \\ &= \frac{6}{11} \sqrt{29,16 + 163,84} = \frac{6}{11} \sqrt{193} \approx \frac{6}{11} \cdot 13,9 \approx 7,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

Ad b)

Z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{r_y}{\sin \psi} = \frac{r_x}{\sin(90^\circ - \psi)} = \frac{r_x}{\cos \psi},$$

skąd

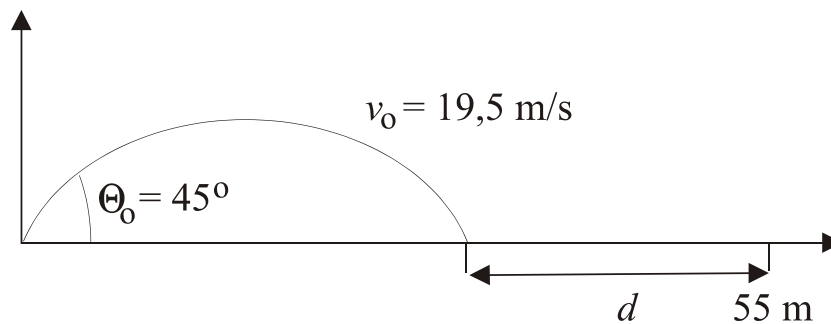
$$\frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \operatorname{tg} \psi = \frac{r_y}{r_x},$$

czyli

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{r_y}{r_x} = \operatorname{arctg} \frac{12,8}{5,4} \approx \operatorname{arctg} 2,37.$$

Korzystając z tablic trygonometrycznych otrzymujemy $\psi \approx 67,12^\circ$. Jest to kąt na północ od kierunku wschodniego

str. 29 zad. 11



Obliczmy jak daleko poleci piłka korzystając z wzoru

$$x = x_0 + v_{0x}t.$$

Przyjmując $x_0 = 0$ mamy

$$x = (v_0 \cos \Theta_0) \cdot t. \quad (7)$$

Czas t można wyznaczyć z równania (zob. wykład 1 wzór (4.2))

$$y = y_0 + (v_0 \sin \Theta_0) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Mamy $y = y_0 = 0$, więc

$$0 = (v_0 \sin \Theta_0) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad /:t$$

$$\frac{1}{2} g t = v_0 \sin \Theta_0,$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \Theta_0}{g}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$t = \frac{2 \cdot 19,5 \cdot \sin 45^\circ}{9,8} \approx 3,98 \cdot 0,7071 \approx 2,8 \text{ s.}$$

Zatem z wzoru (7) mamy

$$x = 19,5 \cdot \cos(45^\circ) \cdot 2,8 \approx 54,6 \cdot 0,7071 \approx 38,6 \text{ m.}$$

Drugi zawodnik musi więc przebiec drogę $d = 55 - 38,6 = 16,4 \text{ m}$.

str. 29 zad. 13

Danymi są: wysokość $h = 200 \text{ km}$ i przyspieszenie $g = 9,2 \text{ m/s}^2$.

Satelita porusza się na orbicie ruchem jednostajnym po okręgu, przy czym przyspieszenie dośrodkowe jest równe przyspieszeniu g . Przyspieszenie dośrodkowe oblicza się z wzoru (zob. wykład 1 wzór (4.11))

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Wstawiając w tym równaniu $a = g$ i $r = R_z + h$, gdzie R_z oznacza promień Ziemi, który jest równy $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, mamy

$$\begin{aligned} v^2 &= g(R_z + h) = 9,2(6,37 \cdot 10^6 + 200 \cdot 10^3) \\ &= 9,2(6,37 + 0,2) \cdot 10^6 = 60,444 \cdot 10^6, \end{aligned}$$

skąd

$$v = \sqrt{60,444 \cdot 10^6} \approx 7,775 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 7,775 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 28\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$