

Imię i nazwisko:
Numer indeksu:

Sprawdzian z ćwiczeń do przedmiotu *Elementy analizy numerycznej*
11 czerwca 2025 roku

Zestaw 1

1 (2 pkt.) Oblicz

$$[-2, 1]^2 - [-2, 1]^2 + \frac{[-2, -1]}{[-2, -1]} \cdot \frac{[1, 2] + [2, 3]}{[1, 2] + [2, 3]}.$$

2 (3 pkt.) Stosując algorytm Hornera znaleźć wartości wszystkich znormalizowanych pochodnych wielomianu $4x^4 - 2x^2 + x - 3$ w punkcie -1 .

3 (2 pkt.) Funkcja $f(x)$ dla $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$ i $x_4 = 6$ przyjmuje wartości odpowiednio 1, 3, 2, 5 i 7. Napisać dla niej wzór interpolacyjny Newtona.

4 (3 pkt.) Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, e i f funkcja

$$S(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^3 - ax^2 + bx + 1, & x \in (-\infty, 2), \\ x^3 + cx^2 + dx + 1, & x \in [2, 3), \\ x^3 + ex^2 + fx + 1, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

5 (4 pkt.) Stosując twierdzenie Sturma wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych nie większych od -3 wielomianu $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 15x + 18$.

6 (4 pkt.) Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznaczyć $\mathbf{A}^{-1}$, jeżeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Oceny:

- < 9 pkt. – ndst
- 9 – 10 pkt. – dst
- 11 – 12 pkt. – dst +
- 13 – 14 pkt. – db
- 15 – 16 pkt. – db+
- 17 – 18 pkt. – bdb

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)

Imię i nazwisko:
Numer indeksu:

Sprawdzian z ćwiczeń do przedmiotu *Elementy analizy numerycznej*
11 czerwca 2025 roku

Zestaw 2

1 (2 pkt.). Oblicz

$$[-3, -2] - [-3, -2] + \frac{[1, 2] + [3, 4]}{[1, 2] + [3, 4]} \cdot \frac{[-2, -1]}{[-2, -1]}.$$

2 (3 pkt.). Za pomocą algorytmu Hornera znaleźć iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 - 2x^2 - 5x + 5$ przez dwumian $x + 1$.

3 (2 pkt.). Wielomian $p(x) = 2 - (x + 1) + x(x + 1) - 2x(x + 1)(x - 1)$ interpoluje cztery początkowe punkty z tablicy

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	2	-7	10

Dodając do wielomiany $p(x)$ jeden składnik, wyznaczyć wielomian interpolujący wszystkie dane.

4 (3 pkt.). Stosując metodę Newtona do równania $x^n - c = 0$ wyprowadzić wzór na obliczanie pierwiastka n -tego stopnia z liczby dodatniej c .

5 (4 pkt.). Czy metoda Gaussa-Seidla zastosowana do układu równań

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

jest zbieżna przy dowolnym wyborze początkowego przybliżenia?

6 (4 pkt.). Na podstawie twierdzenia Sturma wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu $x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 25$ większych od 1.

Oceny:

- < 9 pkt. – ndst
- 9 – 10 pkt. – dst
- 11 – 12 pkt. – dst +
- 13 – 14 pkt. – db
- 15 – 16 pkt. – db+
- 17 – 18 pkt. – bdb

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)

Imię i nazwisko:
Numer indeksu:

Sprawdzian z ćwiczeń do przedmiotu *Elementy analizy numerycznej*
11 czerwca 2025 roku

Zestaw 3

- 1 (3 pkt.). Na przykładzie dwóch równoważnych zapisów funkcji zmiennej rzeczywistej

$$f(x) = \frac{\overbrace{x^2 + 2}^{f^{(1)}(x)}}{3} + \frac{3}{\overbrace{x^2 + 2}^{f^{(2)}(x)}} = \frac{\overbrace{x \cdot x + 2}^{f^{(1)}(x)}}{3} + \frac{3}{\overbrace{x \cdot x + 2}^{f^{(2)}(x)}}$$

i przedziału $[-1, 1]$ pokaż, że jej rozszerzenia przedziałowe mogą być różne. Jaka jest wartości funkcji przedziałowej dla tego przedziału?

- 2 (2 pkt.). Wyznaczyć wszystkie różnice centralne wielomianu $w(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 1$ przyjmując $h = 0,5$.
3 (3 pkt.). Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, e i f funkcja

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 - 6x^2 + bx + 1, & x \in (-\infty, 2), \\ cx^3 + 3x^2 + dx + 1, & x \in [2, 3), \\ -ex^3 + 3x^2 + fx + 1, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

- 4 (3 pkt.). Ile iteracji należy wykonać, aby metodą połowienia znaleźć pierwiastek równania $x^3 - x - 1 = 0$ z dokładnością 10^{-4} , który leży w przedziale $[1, 2]$?
Jaki jest maksymalny błąd po tej liczbie iteracji? ($\log 2 \approx 0,3$)

- 5 (3 pkt.). Stosując twierdzenie Sturma określić liczbę pierwiastków (rzeczywistych) wielomianu $2x^3 + 5x^2 - 2x + 5$ w przedziale $[-1, 1]$.

- 6 (4 pkt.). Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznaczyć A^{-1} , jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Oceny:

< 9 pkt. – ndst 13 – 14 pkt. – db
9 – 10 pkt. – dst 15 – 16 pkt. – db+
11 – 12 pkt. – dst + 17 – 18 pkt. – bdb

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)

Imię i nazwisko:
Numer indeksu:

Sprawdzian z ćwiczeń do przedmiotu *Elementy analizy numerycznej*
11 czerwca 2025 roku

Zestaw 4

1 (3 pkt.). Dla przedziału $[x] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ znaleźć wartość funkcji przedziałowej $f([x])$ odpowiadającej funkcji zmiennej rzeczywistej $f(x) = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$. Jaka jest wartość rozszerzenia przedziałowego $f_{[]}([x])$ tej funkcji dla podanego przedziału?

2 (2 pkt.). Za pomocą algorytmu Hornera znaleźć iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 - 2x^2 - 5x$ przez dwumian $x + 1$.

3 (4 pkt.) Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}$$

znaleźć rozkład na iloczyn $\mathbf{LL}^T$.

4 (3 pkt.). Czy metoda Jacobiego zastosowana do układu równań

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned}$$

jest zbieżna przy dowolnym wyborze początkowego przybliżenia?

5 (2 pkt.). Zastosować twierdzenie Sturma do określenia liczby ujemnych pierwiastków rzeczywistych wielomianu $x^3 + x^2 - x - 1$.

6 (4 pkt.). Dla funkcji zmiennej rzeczywistej $y = F(x)$, dla której $(x, y) = \{(0, 29), (1, 28), (2, 27), (3, 24), (4, 21), (5, 21), (6, 18)\}$ znaleźć wielomian aproksymacyjny stopnia pierwszego.

Oceny:

- < 9 pkt. – ndst
- 9 – 10 pkt. – dst
- 11 – 12 pkt. – dst +
- 13 – 14 pkt. – db
- 15 – 16 pkt. – db+
- 17 – 18 pkt. – bdb

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)