

Imię i nazwisko:
Nr indeksu:

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

Egzamin pisemny – zestaw 1 30 czerwca 2025 roku

1. (3 pkt.) Udowodnić, że jeśli funkcja g interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, a funkcja h interpoluje funkcję f w węzłach $x_1, x_2, \dots, x_n$, to funkcja

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0} [g(x) - h(x)]$$

interpoluje funkcję f we wszystkich węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$ (funkcje g i h nie muszą być wielomianami).

2. (3 pkt.) Sformułować zadanie interpolacyjne Hermite'a. Co można o nim powiedzieć?
3. (4 pkt.) Dla jakich wartości parametrów a, b, c i d funkcja

$$S(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in (-\infty, -3), \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3, 4), \\ 157 - 32x, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

4. (3 pkt.) Opisać algorytm eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementu podstawowego.
5. (4 pkt.) Opisać zagadnienie aproksymacji średniokwadratowej wielomianami.
6. (3 pkt.) Zastosować twierdzenie Sturma do określenia liczby dodatnich pierwiastków rzeczywistych wielomianu

$$w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 5.$$

Punktacja:

- < 11 – niedostateczny
11 – 12 – dostateczny
13 – 15 – dostateczny plus
15 – 16 – dobry
17 – 18 – dobry plus
19 – 20 – bardzo dobry

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

Egzamin pisemny – zestaw 2

30 czerwca 2025 roku

1. (3 pkt.) Udowodnić, że jeśli funkcja g (wielomian lub nie) interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, a funkcja h jest funkcją taką, że $h(x_i) = \delta_{in}$ ($0 \leq i \leq n$), to istnieje stała c , dla której funkcja $g + ch$ interpoluje funkcję f w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$.

2. (4 pkt.) Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$S(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \in (-\infty, 2), \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in [2, 3), \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x \in [3, \infty), \end{cases}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

3. (3 pkt.) Co to znaczy, że rzeczywista macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona? Jak można zastosować jej rozkład $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ do rozwiązywania układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

4. (4 pkt.) W jaki sposób otrzymuje się metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych?

5. (3 pkt.) Opisać metodę *regula falsi* znajdowania pierwiastka równania $f(x) = 0$.

6. (3 pkt.) Zastosować twierdzenie Sturma do określenia liczby rzeczywistych pierwiastków wielomianu

$$w(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Punktacja:

- < 11 – niedostateczny
11 – 12 – dostateczny
13 – 14 – dostateczny plus
15 – 16 – dobry
17 – 18 – dobry plus
19 – 20 – bardzo dobry

(wypełnia oceniający)

Zadanie	Liczba punktów
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Razem punktów	
Ocena	

.....
(podpis)