Elementy analizy numerycznej

wykład 9

zadania

str. 69 zad. 3

W metodzie Jacobiego kolejne iteracje wykonuje się na podstawie wzoru (zob. wykład 9 wzór (4.19))

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + b, \tag{1}$$

gdzie L, D i U oznaczają macierze powstałe z rozkładu macierzy A na sumę $L + D + U$, przy czym L zawiera elementy pod główną przekątną macierzy A, D – elementy z głównej przekątnej, a U – elementy nad główną przekątną. Dla podanej macierzy A mamy

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Metoda (1) jest zbieżna, gdy promień spektralny macierzy

$$M_J = -D^{-1}(L+U)$$

jest mniejszy od 1 (por. wykład 9 twierdzenie 4.4). Ponieważ w naszym przypadku D jest macierzą jednostkową, więc macierz odwrotna do niej jest też macierzą jednostkową. Zatem mamy

$$M_J = -(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Promień spektralny macierzy to największa co do wartości bezwzględnej jej wartość własna, a wszystkie wartości własne otrzymamy rozwiązując równanie (zob. wykład 9)

$$\det(M_J - \lambda I) = 0,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową. W naszym zadaniu mamy

$$\det(M_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda = -\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda.$$

Należy zatem rozwiązać równanie

$$\lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0,$$

czyli

$$\lambda\left(\lambda^2 + \frac{5}{4}\right) = 0.$$

Z równania tego otrzymujemy

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}i$$

(wartości własne mogą być liczbami zespolonymi). Bezwzględne wartości tych wielkości wynoszą

$$|\lambda_1| = 0, \quad |\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem

$$\rho(M_J) = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1,$$

a to oznacza, że dla podanej macierzy metoda Jacobiego nie jest zbieżna.

str. 69-70 zad. 4

Należy pokazać dla jakich wartości α jest spełniony warunek

$$\rho(M_{GS}) < 1,$$

gdzie (zob. wykład 9 wzór (4.20))

$$M_{GS} = -(D + L)^{-1}U.$$

Metodę Gaussa-Seidla można stosować wówczas, gdy na głównej przekątnej (diagonali) macierzy układu są elementy niezerowe. W naszym przypadku trzeba zatem najpierw zamienić wiersz drugi z trzecim (układ równań po zamianie dowolnych wierszy ma takie samo rozwiązanie). Otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

i z rozkładu $A = L + D + U$ mamy

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$M_{GS} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \tag{2}$$

istnieje, gdy jej wyznacznik jest różny od zera. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2$$

(wyznacznik z macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej), więc musi być spełniony warunek $\alpha \neq 0$. Dalej obliczamy macierz odwrotną do macierzy (2) (**należy przypomnieć sobie z pierwszego roku studiów z algebry sposób wyznaczania macierzy odwrotnej do danej macierzy**). Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$M_{GS} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 + \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\det(M_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 + \frac{1}{\alpha} \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

Jedynym (potrójnym) pierwiastkiem równania

$$\lambda^3 = 0$$

jest $\lambda = 0$ i wartość ta nie zależy od α. Promień spektralny macierzy M_{GS} jest zatem równy 0, a to oznacza, że metoda jest zbieżna. Jedynym warunkiem dla parametru α jest więc warunek (otrzymany wcześniej), by był on różny od 0.

str. 70 zad. 5

W algebrze macierzy dowodzi się następującego twierdzenia: *jeżeli macierz A jest dodatnio określona, to promień spektralny macierzy* $(D+L)^{-1}U$ *jest mniejszy od* 1*, gdzie* $L+D+U=A$. Można by sprawdzić, że macierz A podana w zadaniu jest dodatnio określona i wówczas z przytoczonego twierdzenia wynika od razu, że metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna. Podane twierdzenie może być nieznane (nie podaje się go na wykładzie z algebry na I roku informatyki). Zawsze możemy sprawdzić warunek

$$\rho(M_{GS})<1$$

gwarantujący zbieżność metody, gdzie dla metody Gaussa-Seidla (zob. wykład 9 wzór (4.20))

$$M_{GS}=-(D+L)^{-1}U.$$

Dla podanej macierzy A mamy

$$L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$(D+L)^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

i mamy

$$M_{GS}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\det(M_{GS}-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}} & \frac{2-\sqrt{3}}{3}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}-\lambda\right)+\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{3}\cdot\lambda$$

$$=\frac{\sqrt{3}-2}{9}\lambda+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\lambda^2-\lambda^3+\frac{2\sqrt{3}-4}{9\sqrt{3}}\lambda$$

$$=-\frac{1}{9\sqrt{3}}\lambda+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\lambda^2-\lambda^3.$$

Należy znaleźć pierwiastki równania

$$\lambda^3+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\lambda^2-\frac{1}{9\sqrt{3}}\lambda=0,$$

czyli

$$\lambda\left(\lambda^2+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\lambda-\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)=0.$$

Jeden pierwiastek jest oczywisty: $\lambda_1=0.$ W celu wyznaczenia dwóch pozostałych pierwiastków rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\lambda-\frac{1}{9\sqrt{3}}=0,$$

czyli

$$9\sqrt{3}\lambda^2+9(\sqrt{3}-1)\lambda-1=0.$$

Mamy

$$\Delta=81(\sqrt{3}-1)^2+36\sqrt{3}=324-126\sqrt{3}\approx 105{,}76.$$

Zatem

$$\lambda_2\approx\frac{-9(\sqrt{3}-1)-\sqrt{105{,}76}}{18\sqrt{3}}\approx\frac{-6{,}58-10{,}28}{31{,}18}\approx -0{,}54,$$

$$\lambda_3\approx\frac{-9(\sqrt{3}-1)+\sqrt{105{,}76}}{18\sqrt{3}}\approx\frac{-6{,}58+10{,}28}{31{,}18}\approx 0{,}12.$$

Stąd

$$\rho(M_{GS}) = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i| \approx 0{,}54 < 1,$$

a to oznacza, że metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna.

str. 70 zad. 6
W metodzie Jacobiego mamy (zob. wykład 9 wzór (4.19))

$$M_J = -D^{-1}(L+U).$$

Dla danej macierzy A macierz ta ma postać

$$M_J = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\det(M_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\lambda & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda - \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Należy zatem rozwiązać równanie

$$-\lambda^3 + \lambda - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,$$

czyli

$$\lambda^3 - \lambda + \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0. \tag{3}$$

Jest to równanie trzeciego stopnia. Możemy tu skorzystać z ogólnych wzorów na rozwiązanie równania postaci

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Rozwiązanie tego równania zależy od znaku wyróżnika

$$D = q^2 + p^3.$$

Jeżeli $D > 0$, to równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone. Jeśli $D = 0$, to w przypadku gdy $p = q = 0$, równanie ma jeden pierwiastek trzykrotny równy 0, a w przypadku gdy $p^3 = -q^2 \neq 0$, równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest dwukrotny. Jeżeli $D < 0$, to równanie ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste. W przypadku równania (3) mamy

$$p = -\frac{1}{3} \text{ i } q = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

a więc $D = 0$, czyli równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste, w tym jeden dwukrotny. Do ich wyznaczenia moglibyśmy skorzystać z wzorów Cardana, ale nie jest to konieczne. W zadaniu chodzi tylko o stwierdzenie, czy promień spektralny macierzy M_J jest mniejszy od 1, czy nie. W tym celu możemy zbadać przebieg zmienności funkcji

$$f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Zauważmy, że dla $\lambda = -1$ mamy $f(\lambda) > 0$, a dla $\lambda = -2$ jest $f(\lambda) < 0$. Oznacz to, że w przedziale $(-2, -1)$ znajduje się pierwiastek funkcji $f(\lambda)$ i pierwiastek ten jest co do wartości bezwzględnej większy od 1. Istnieje zatem co najmniej jedna wartość własna macierzy M_J, której wartość bezwzględna jest większa od 1 i tym samym promień spektralny tej macierzy jest na pewno większy od 1. Zatem metoda Jacobiego nie jest zbieżna.