

Z definicji tej wynika, że istnieje skalar λ , taki że $Av = \lambda v$. Liczbę λ nazywamy *wartością własną* macierzy A . Wartości własne macierzy A są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego

$$w(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Definicja 4.3. Liczbę

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|,$$

gdzie wielkości λ_i są wartościami własnymi macierzy A , nazywamy *promieniem spektralnym* macierzy A i oznaczamy $\rho(A)$.

Rozważmy teraz ciąg wektorów $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$ określony następująco:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (4.15)$$

gdzie M oznacza pewną macierz kwadratową, a w – pewien wektor. Dla ciągu tego można udowodnić

Twierdzenie 4.4. *Przy dowolnym wektorze $x^{(0)}$ ciąg określony wzorem (4.15) jest zbieżny do jedynego punktu granicznego wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(M) < 1$.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć m. in. w podręczniku [3].

Jeśli ciąg $\{x^{(i)}\}$ jest zbieżny do pewnego wektora \bar{x} , to wektor ten spełnia równanie

$$\bar{x} = M\bar{x} + w.$$

Z twierdzenia 4.4 wiadomo, że jeśli $\rho(M) < 1$, to równanie $x = Mx + w$ posiada jednoznaczne rozwiązanie. Wynika stąd sposób konstruowania metod iteracyjnych stosowanych do rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$. Wystarczy mianowicie tak dobrać macierz M , by był spełniony warunek zbieżności $\rho(M) < 1$ i warunek zgodności wektora

$$\tilde{x} = M\tilde{x} + w \quad (4.16)$$

z rozwiązaniem \tilde{x} układu równań $Ax = b$.

Teoretycznie wystarczy wziąć dowolną macierz M taką, by $\rho(M) < 1$, a następnie obliczyć wektor

$$w = (I - M)A^{-1}b, \quad (4.17)$$

który wynika z warunku zgodności (I oznacza macierz jednostkową). Z zależności (4.16) mamy bowiem

$$w = \tilde{x} - M\tilde{x} = (I - M)\tilde{x}$$

i jeśli wektor \tilde{x} ma być jednocześnie rozwiązaniem układu $Ax = b$, to $\tilde{x} = A^{-1}b$. Jednak taki sposób postępowania wymagałby wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy A , co jest kosztowne. Dlatego w praktyce postępujemy odwrotnie: przyjmujemy, że wektor w jest równy Nb , gdzie N oznacza pewną macierz kwadratową. Z warunku zgodności mamy wówczas (por. równanie (4.17))

$$Nb = (I - M)A^{-1}b,$$

czyli

$$N = (I - M)A^{-1},$$

a więc

$$NA = I - M,$$

tj.

$$M = I - NA.$$

Otrzymujemy w ten sposób rodzinę metod iteracyjnych postaci

$$x^{(i+1)} = (I - NA)x^{(i)} + Nb, \quad (4.18)$$

która umożliwia wyznaczenie wektora \tilde{x} (rozwiązania układu $Ax = b$), jeśli tylko $\rho(I - NA) < 1$.

Macierz N można wyznaczyć w różny sposób. Dwie najpopularniejsze metody iteracyjne opierają się na rozkładzie macierzy A na sumę $L + D + U$, gdzie L oznacza macierz poddiagonalną, D – macierz diagonalną, a U – macierz naddiagonalną.

Przykład 4.2

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

mamy

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Jeżeli w zależności (4.18) przyjmiemy $N = D^{-1}$, tj. $M = -D^{-1}(L + U)$, otrzymamy *metodę Jacobiego*:

$$Dx^{(i+1)} = -(L + U)x^{(i)} + b, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Stosowanie tego wzoru wymaga, by na głównej przekątnej macierzy A były elementy niezerowe. Jeśli takie elementy są na głównej przekątnej macierzy A , to przed zastosowaniem wzoru (4.19) należy odpowiednio poprzestawiać wiersze. Zwykle postępujemy następująco (zob. [3]):

- spośród kolumn, w których na głównej przekątnej znajduje się element zerowy, wybieramy tę, w której jest największa liczba zer,
- w kolumnie tej wybieramy element o maksymalnym module i tak przestawiamy wiersze, by element ten znalazł się na głównej przekątnej, po czym wiersz ten ustalamy i nie bierzemy go w dalszym ciągu pod uwagę,
- spośród pozostałych kolumn, w których na głównej przekątnej znajduje się element zerowy, wybieramy tę, w której jest największa liczba zer itd.

Uwagi:

1. Jeśli w każdej kolumnie macierzy A znajduje się taka sama liczba elementów zerowych, to wystarczy postępować tak, jak przy wyborze elementu podstawowego w metodzie eliminacji Gaussa.
2. Zamiana wierszy w macierzy A nie gwarantuje zbieżności metody Jacobiego, tj. spełnienie warunku $\rho(-D^{-1}(L + U)) < 1$.

Przykład 4.3 ([3])

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na głównej przekątnej elementy zerowe znajdują się w pierwszej, trzeciej i czwartej kolumnie. Największa liczba zer (trzy) znajduje się w kolumnie trzeciej. W kolumnie tej elementem o maksymalnym module jest element w pierwszym wierszu (w tym przykładzie jest to jedyny niezerowy element w wybranej kolumnie). Przystawiamy zatem wiersze pierwszy i trzeci, otrzymując w wyniku macierz

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

W macierzy $A^{(1)}$ ustalamy wiersz trzeci i pomijamy go w dalszym badaniu wartości elementów, co zaznaczyliśmy przez przekreślenie odpowiednich elementów.

Na głównej przekątnej znajduje się jeszcze element zerowy w czwartej kolumnie, w której elementem o największym module jest element w drugim wierszu. Przystawiając wiersze drugi oraz czwarty, otrzymujemy macierz

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

do której możemy już zastosować wzór (4.19). ■

Jeżeli w zależności (4.18) przyjmiemy $N = (D + L)^{-1}$, tj. $M = -(D + L)^{-1}U$, otrzymamy *metodę Gaussa-Seidla*:

$$Dx^{(i+1)} = -Lx^{(i+1)} - Ux^{(i)} + b, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.20)$$

Wzór ten mógłby sugerować występowanie obliczanego wektora $x^{(i+1)}$ z obu stron równania. Jeśli jednak wypiszemy wszystkie równania w postaci skalarnej, to okaże się, że przy obliczaniu pierwszej współrzędnej wektora $x^{(i+1)}$ z prawej strony odpowiedniego równania nie występuje ta współrzędna. Można więc wyznaczyć $x_1^{(i+1)}$ dzieląc to równanie przez a_{11} . Przy obliczaniu $x_2^{(i+1)}$ z prawej strony odpowiedniego równania występuje jedynie już obliczona wcześniej składowa $x_1^{(i+1)}$ itd..

Powyżej przedstawiliśmy jedynie dwie iteracyjne metody rozwiązywania układu równań liniowych, ale nawet przy dwóch metodach powstaje pytanie: która metoda jest lepsza, czyli szybciej zbieżna. Odpowiedzią na to pytanie jest

Twierdzenie 4.5. *Jeżeli*

$$0 < \rho(-D^{-1}(L+U)) < 1,$$

to

$$\rho(-(D+L)^{-1}U) < \rho(-D^{-1}(L+U)).$$

Innymi słowy: Jeśli metoda Jacobiego jest zbieżna i promień spektralny jej macierzy M jest dodatni, to metoda Gaussa-Seidla jest asymptotycznie szybciej zbieżna. Dowód tego twierdzenia można znaleźć m. in. w monografii R. S. Vargi pt. *Matrix Iterative Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1965).

Zauważmy, że powyższe twierdzenie nie rozstrzyga, która metoda jest lepsza (szybciej zbieżna, o ile w ogóle jest zbieżna) w przypadku, gdy promień spektralny macierzy M w metodzie Jacobiego jest równy 0.

Przykład 4.4

Rozważmy układ równań liniowych z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozkładając tę macierz na sumę $L + D + U$ mamy

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd dla metody Jacobiego otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_J = -D^{-1}(L+U) &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wartości własne macierzy M_J znajdujemy przez rozwiązanie równania

$$\det(M_J - \lambda I) = 0.$$

Mamy

$$\det(M_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3.$$

Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i $\rho(M_J) = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i| = 0$.

W metodzie Gaussa-Seidla mamy

$$\begin{aligned} M_{GS} &= -(D+L)^{-1}U = -\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\det(M_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(2-\lambda).$$

Rozwiązując równanie

$$\lambda(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

otrzymujemy $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, skąd $\rho(M_{GS}) = 2$, a to oznacza, że metoda Gaussa-Seidla nie jest zbieżna. ■

Zadania

1. Stosując metodę eliminacji Gaussa (bez wyboru elementu podstawowego) rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ile działań należy wykonać?

2. Rozwiązać układ równań z zadania 1 stosując rozkład Choleskiego. Jaka jest liczba wszystkich działań?
3. Wykazać, że dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

metoda Jacobiego nie gwarantuje zbieżności przy dowolnie wybranym przybliżeniu początkowym.

4. Dla jakich wartości α układ równań

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ \alpha x_3 &= 0, \\ \alpha x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

można rozwiązać metodą Gaussa-Seidla przyjmując dowolny punkt początkowy?

5. Zbadać zbieżność metody Gaussa-Seidla dla układu równań liniowych z macierzą

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Czy dla układu równań liniowych z macierzą podaną w zadaniu 5 metoda Jacobiego jest zbieżna przy dowolnym wyborze początkowego przybliżenia?

V. RÓWNANIA NIELINIOWE I UKŁADY RÓWNAŃ NIELINIOWYCH

5.1. Wprowadzenie

Rozpatrzmy zadanie obliczenia pierwiastków rzeczywistych równania

$$f(x) = 0, \quad (5.1)$$

gdzie w ogólnym przypadku $f: E \rightarrow F$ (zbiory E i F można rozważać bardzo ogólnie). Gdy $E = F = \mathbf{R}^n$, to odwzorowanie $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ jest opisane za pomocą n funkcji rzeczywistych f_i o zmiennych x_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

Ponieważ tylko w bardzo nielicznych przypadkach można analitycznie obliczyć pierwiastek ξ równania (5.1), więc zwykle stosuje się metody przybliżone. Metody te (iteracyjne) dla danego początkowego przybliżenia $x^{(0)}$ pozwalają obliczyć dalsze wartości przybliżone $x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) wartości ξ za pomocą pewnej funkcji iteracyjnej $\Phi: E \rightarrow E$:

$$x^{(i+1)} = \Phi(x^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots$$

Powstają przy tym następujące problemy:

- jak znaleźć odpowiednią funkcję iteracyjną Φ ,
- przy jakich warunkach ciąg przybliżeń $\{x^{(i)}\}$ jest zbieżny,
- jak szybko jest zbieżny ciąg $\{x^{(i)}\}$?

5.2. Metoda połowienia

Rozważmy równanie skalarne

$$f(x) = 0.$$

Założmy, że funkcja f jest ciągła na odcinku $[a, b]$, wewnątrz którego znajduje się dokładnie jeden pierwiastek i na którego końcach funkcja ma przeciwne znaki, tj. $f(a)f(b) < 0$.

W celu znalezienia przybliżonej wartości pierwiastka, dzielimy przedział $[a, b]$ na połowy punktem

$$x^{(1)} = \frac{a+b}{2}.$$

Jeżeli $f(x^{(1)}) = 0$, to punkt $x^{(1)}$ jest szukanym pierwiastkiem. Jeśli $f(x^{(1)}) \neq 0$, to z dwóch przedziałów $[a, x^{(1)}]$ i $[x^{(1)}, b]$ wybieramy ten, na którego końcach funkcja ma przeciwne znaki. Przedział ten dzielimy na połowy punktem $x^{(2)}$, badamy wartość funkcji w punkcie $x^{(2)}$ i znaki funkcji na końcach przedziału itd.

Po pewnej liczbie kroków otrzymamy albo pierwiastek dokładny, albo ciąg przedziałów, takich że

$$f(x^{(i)})f(x^{(i+1)}) < 0,$$

gdzie $[x^{(i)}, x^{(i+1)}]$ oznacza tu i -ty przedział, którego długość wynosi

$$\left| x^{(i+1)} - x^{(i)} \right| = \frac{1}{2^i} (b-a). \quad (5.2)$$

Ponieważ lewe końce ciągu przedziałów tworzą ciąg niemalejący i ograniczony z góry, a prawe końce – ciąg nierosnący i ograniczony z dołu, więc z zależności (5.2) wynika, że istnieje ich wspólna granica, która jest szukanym pierwiastkiem.

5.3. Regula falsi i metoda siecznych

Nazwa metody *regula falsi* pochodzi od łacińskich słów *regula* (linia) i *falsus* (fałszywy). Po polsku można by powiedzieć, że jest to metoda fałszywego założenia liniowości funkcji. Jednak w literaturze polskojęzycznej powszechnie jest używana podana nazwa łacińska.

Założmy, że w przedziale $[a, b]$ równanie $f(x) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek, a funkcja f ma na końcach tego przedziału przeciwne znaki. Założmy ponadto, że $f \in C^2[a, b]$ ¹ oraz że pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f mają stały znak w tym przedziale. Przy tych założeniach wykres funkcji może mieć jedną z czterech postaci przedstawionych na rys. 5.1, a więc funkcja może być rosnąca i przy tym wklęsła lub wypukła lub malejąca i też wklęsła lub wypukła.

Rozpatrzmy przypadek $f'(x), f''(x) > 0$ dla $x \in [a, b]$ przedstawiony na rys. 5.2 (rozumowanie w pozostałych trzech przypadkach jest analogiczne). Przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ prowadzimy cięciwę o równaniu

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Stąd

$$x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a).$$

Jeżeli $f(x^{(1)}) = 0$, to liczba $x^{(1)}$ jest szukanym pierwiastkiem. Jeśli natomiast $f(x^{(1)}) \neq 0$, to przez punkt $C(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$ oraz ten z punktów A i B , którego rzędna ma przeciwny znak niż $f(x^{(1)})$ prowadzimy następną cięciwę itd.

¹ Zapis $C^2[a, b]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych wraz z pochodnymi do rzędu drugiego.