$f(x_i) = \Delta^0 f(x_i)$ $i = 0, 1, 2, 3, 4$	$\Delta f(x_i)$ $i = 0, 1, 2, 3$	$\Delta^2 f(x_i)$ $i = 0, 1, 2$	$\Delta^3 f(x_i)$ $i = 0, 1$	$\Delta^4 f(x_0)$
33,115	1,698	0,087	0,005	−0,002
34,813	1,785	0,092	0,003	
36,598	1,877	0,095		
38,475	1,972			
40,447				

Na podstawie wzoru (3.8) mamy zatem

$$L_4(t) = 33{,}115 + 1{,}698t + \frac{0{,}087}{2} t(t-1) + \frac{0{,}005}{6} t(t-1)(t-2) - \frac{0{,}002}{24} t(t-1)(t-2)(t-3),$$

gdzie

$$t = \frac{x - 3{,}50}{0{,}05}.$$

Stąd dla $x = 3{,}58$ mamy $t = 1{,}6$, a więc $L_4(1{,}6) = 35{,}873195$. ■

3.5. Interpolacja Hermite'a

Definicja 3.6. *Zadanie interpolacyjne Hermite'a* polega na znalezieniu dla danej funkcji f wielomianu H_n stopnia mniejszego lub równego n, takiego że

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, k; \; j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \tag{3.11}$$

przy czym

$$\sum_{i=0}^{k} m_i = n + 1, \quad m_i \in \mathbf{N}.$$

Liczbę m_i nazywamy krotnością węzła x_i.

Dla $m_i = 1$ ($i = 0, 1, \dots, k$) mamy zadanie interpolacyjne Lagrange'a, a więc szczególnym przypadkiem interpolacji Hermite'a jest interpolacja Lagrange'a.

Twierdzenie 3.6. *Zadanie interpolacyjne Hermite'a ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Dowód. Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 3.1, pokażemy najpierw, że istnieje wielomian stopnia nie wyższego niż n, który spełnia warunki (3.11).

Wprowadźmy funkcje pomocniczą

$$s(i) = \begin{cases} 0, & \text{dla } i = 0, \\ m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}, & \text{dla } i > 0. \end{cases}$$

Funkcja $s(i)$ jest sumą krotności i początkowych węzłów interpolacji. Każdą liczbę $l = 0, 1, \dots, n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $l = s(i) + j$, gdzie $0 \le i \le k$ oraz $0 \le j \le m_i - 1$. Na przykład, $0 = s(0) + 0$ i $n = s(k) + m_k - 1$.

Określmy teraz wielomiany $p_{s(i)+j}$:

$$
\begin{aligned}
&p_{s(0)}(x) = 1, \\
&p_{s(i)+j}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_{i-1})^{m_{i-1}}(x - x_i)^j, \\
&\qquad i = 0, 1, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m_i - 1.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Zauważmy, że dla $m_i = 1$ ($i = 0, 1, \dots, k$) otrzymujemy wielomiany występujące w definicji wielomianu interpolacyjnego Newtona (zob. wzór (3.7)). Szukany wielomian H_n zapisujemy w postaci Newtona (por. p. 2.1):

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{s(i)+j} p_{s(i)+j}(x).$$

W celu wyznaczenia nieznanych współczynników b_l ($l = 0, 1, \dots, n$) wielomian H_n przedstawiamy w postaci

$$H_n(x) = W_1(x) + b_l p_l(x) + W_2(x), \tag{3.13}$$

gdzie $W_1(x)$ oznacza kombinację liniową wielomianów p_i dla $i = 0, 1, \dots, l-1$ o współczynnikach $b_0, b_1, \dots, b_{l-1}$, a $W_2(x)$ – kombinację liniową wielomianów p_i dla $i = l+1, l+2, \dots, n$ o współczynnikach $b_{l+1}, b_{l+2}, \dots, b_n$. Załóżmy, że współczynniki $b_0, b_1, \dots, b_{l-1}$ są znane. Z wzorów (3.12) dla $l = s(i) + j$ mamy

$$p_l(x) = p_{s(i)}(x)(x - x_i)^j$$

i po podstawieniu do (3.13) otrzymujemy

$$H_n(x) = W_1(x) + b_l p_{s(i)}(x)(x - x_i)^j + W_2(x).$$

Różniczkując powyższy wzór j-krotnie dla $x = x_i$ mamy

$$H_n^{(j)}(x_i) = W_1^{(j)}(x_i) + j!\, b_l p_{s(i)}(x_i). \tag{3.14}$$

Zależność (3.14) wynika z faktu, że

$$[p_{s(i)}(x)(x - x_i)^j]^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{j!}{(j-k)!} p_{s(i)}^{(k)}(x)(x - x_i)^k$$

i jeśli obliczamy pochodną w punkcie $x = x_i$, to w powyższej sumie wszystkie składniki z wyjątkiem $k = 0$ przyjmują wartość 0. Podobnie, $W_2(x_i) = 0$, gdyż każdy z wielomianów p_i dla $i \ge l+1$ zawiera czynnik $x - x_i$ w pewnej potędze większej od 0.

Ponieważ

$$H_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),$$

więc z zależności (3.14) otrzymujemy

$$b_l = \frac{f^{(j)}(x_i) - W_1^{(j)}(x_i)}{p_{s(i)}(x_i) \cdot j!}. \tag{3.15}$$

Dowód jednoznaczności przebiega analogicznie, jak w twierdzeniu o jednoznaczności rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a. ■

Przykład 3.5

Dane są punkty x_i ($i = 0, 1, 2, 3$) o krotnościach m_i i wartości funkcji f i jej pochodnych w tych punktach:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
m_i	1	2	3	1
$f(x_i)$	0	1	0	1
$f'(x_i)$	–	2	1	–
$f''(x_i)$	–	–	2	–

Należy skonstruować wielomian interpolacyjny Hermite'a.

Ponieważ suma krotności węzłów jest równa 7, więc wielomian będzie stopnia co najwyżej szóstego. Szukamy zatem wielomianu

$$H_6(x) = \sum_{l=0}^{6} b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{m_i - 1} b_{s(i)+j} p_{s(i)+j}(x).$$

Określmy liczby $s(i)$:

$$s(0) = 0,$$
$$s(1) = m_0 = 1,$$
$$s(2) = m_0 + m_1 = 3,$$
$$s(3) = m_0 + m_1 + m_2 = 6.$$

Jeśli $i = 0$, to $j = 0$, a więc liczbę $l = 0$ można przedstawić w postaci $s(0) + 0$. Dla $i = 1$ mamy $j \leq m_1 - 1 = 1$, a więc $j = 0, 1$. Wynika stąd, że $l = 1 = s(1) + 0$ oraz $l = 2 = s(1) + 1$. Gdy $i = 2$, to $j \leq m_2 - 1 = 2$, czyli $j = 0, 1, 2$ i mamy $l = 3 = s(2) + 0$, $l = 4 = s(2) + 1$ oraz $l = 5 = s(2) + 2$. Wreszcie gdy $i = 3$, to $j \leq m_3 - 1 = 0$, a więc $j = 0$, skąd wynika, że $l = 6 = s(3) + 0$.

Wielomiany $p_{s(i)}$ są następujące:

$$p_{s(0)}(x) = 1,$$
$$p_{s(1)}(x) = x - x_0 = x,$$
$$p_{s(2)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2 = x(x-1)^2,$$
$$p_{s(3)}(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^3 = x(x-1)^2(x-2)^3,$$

a wielomiany p_l są postaci

$$p_l(x) = p_{s(i)+j}(x) = p_{s(i)}(x)(x - x_i)^j.$$

Możemy teraz określić współczynniki b_l ($l = 0, 1, \dots, 6$). Przy wyznaczaniu b_0 mamy (przy dowolnym n)

$$H_n(x) = b_0 p_0(x) + W_2(x)$$

i wzór (3.15) przyjmuje postać (dla l=0 mamy $i = 0, j = 0$ i $s(0) = 0$)

$$b_0 = \frac{f(x_0)}{p_{s(0)}(x_0) \cdot 0!},$$

co dla danych w przykładzie daje $b_0 = 0$. Dla $l = 1$, tj. $i = 1, j = 0$ i $s(1) = 1$, mamy

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) = 0$$

i

$$b_1 = \frac{f(x_1) - W_1(x_1)}{p_{s(1)}(x_1) \cdot 0!} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

Dla $l = 2$ ($i = 1, j = 1, s(1) = 1$) jest

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) = b_1 p_{s(1)+0}(x) = x,$$

a więc

$$b_2 = \frac{f'(x_1) - W_1'(x_1)}{p_{s(1)}(x_1) \cdot 1!} = \frac{2 - 1}{1} = 1.$$

Dla $l = 3$ ($i = 2, j = 0, s(2) = 3$) mamy

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) = x + b_2 p_{s(1)+1}(x) = x + x(x-1) = x^2.$$

Zatem

$$b_3 = \frac{f(x_2) - W_1(x_2)}{p_{s(2)}(x_2) \cdot 0!} = \frac{0 - 4}{2} = -2.$$

Jeśli $l = 4$ ($i = 2, j = 1, s(2) = 3$), to

$$W_1(x) = x^2 + b_3 p_3(x) = x^2 - 2p_{s(2)}(x) = x^2 - 2x(x-1)^2 = -2x^3 + 5x^2 - 2x,$$

$$W_1'(x) = -6x^2 + 10x - 2$$

i

$$b_4 = \frac{f'(x_2) - W_1'(x_2)}{p_{s(2)}(x_2) \cdot 1!} = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}.$$

Gdy $l = 5$ ($i = 2, j = 2, s(2) = 3$), to

$$W_1(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + b_4 p_4(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{7}{2} p_{s(2)+1}(x)$$

$$= -2x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{7}{2} x(x-1)^2(x-2) = \frac{7}{2}x^4 - 16x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 9x,$$

$$W_1'(x) = 14x^3 - 48x^2 + 45x - 9,$$

$$W_1''(x) = 42x^2 - 96x + 45,$$

więc

$$b_5 = \frac{f''(x_2) - W_1''(x_2)}{p_{s(2)}(x_2) \cdot 2!} = \frac{2-21}{2 \cdot 2} = -\frac{19}{4}.$$

Wreszcie gdy $l = 6$ ($i = 3, j = 0, s(3) = 6$), to

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{7}{2}x^4 - 16x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 9x + b_5 p_5(x) \\ &= \frac{7}{2}x^4 - 16x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 9x - \frac{19}{4} p_{s(2)+2}(x) \\ &= \frac{7}{2}x^4 - 16x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 9x - \frac{19}{4} x(x-1)^2(x-2)^2 \end{aligned}$$

i

$$b_6 = \frac{f(x_3) - W_1(x_3)}{p_{s(3)}(x_3) \cdot 0!} = \frac{1+30}{12} = \frac{31}{12}.$$

Zatem szukany wielomian Hermite'a ma postać

$$\begin{aligned} H_6(x) = {} & x + x(x-1) - 2x(x-1)^2 + \frac{7}{2}x(x-1)^2(x-2) \\ & - \frac{19}{4}x(x-1)^2(x-2)^2 + \frac{31}{12}x(x-1)^2(x-2)^3. \end{aligned}$$

Poprawność wyznaczenia tego wielomianu możemy sprawdzić z warunków interpolacji

$$H_6^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3; \; j = 0, 1, \ldots, m_i - 1.$$ ■

Wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Hermite'a w sposób podany w twierdzeniu 3.6 jest żmudne. O wiele prostsze jest jego określanie wykorzystując pojęcie uogólnionych ilorazów różnicowych.

Definicja 3.7. Niech funkcja f będzie j-krotnie różniczkowalna ($j = 0, 1, \ldots, i_{l+m} - 1$) w punkcie $x_{i_{l+m}}$, gdzie $m = 0, 1, \ldots, k$. *Uogólnionym ilorazem różnicowym* funkcji f nazywamy:

a) dla i-krotnego węzła x_l

$$[x_l, i; f] = \frac{f^{(i-1)}(x_l)}{(i-1)!}, \tag{3.16}$$

b) dla różnych węzłów $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$ o krotnościach odpowiednio $i_l, i_{l+1}, \ldots, i_{l+k}$

$$\begin{aligned} & [x_l, i_l; x_{l+1}, i_{l+1}; \ldots; x_{l+k}, i_{l+k}; f] \\ & = \frac{[x_l, i_l - 1; x_{l+1}, i_{l+1}; \ldots; x_{l+k}, i_{l+k}; f] - [x_l, i_l; \ldots, x_{l+k-1}, i_{l+k-1}; x_{l+k}, i_{l+k} - 1; f]}{x_{l+k} - x_l}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Z definicji tej dla węzłów jednokrotnych otrzymujemy: z wzoru (3.16)

$$[x_l; f] = f(x_l),$$

a z wzoru (3.17)

$$[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}; f] = \frac{[x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+k}; f] - [x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k-1}; f]}{x_{l+k} - x_l}$$

(por. definicja 3.5 i wzór (3.6)).

Korzystając z pojęcia uogólnionych ilorazów różnicowych można udowodnić

Twierdzenie 3.7. *Jeśli funkcja f ma pochodne do rzędu $m_i - 1$ w punktach x_i $(i = 0, 1, \dots, k)$, to współczynniki b_l $(l = s(i) + j;\ i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, m_i - 1)$ wielomianu interpolacyjnego Hermite'a są równe ilorazom różnicowym interpolowanej funkcji opartym na początkowych węzłach z uwzględnieniem ich krotności, tj.*

$$b_l = [x_0, m_0; x_1, m_1; \dots; x_{i-1}, m_{i-1}; x_i, j+1; f]. \tag{3.18}$$

Przykład 3.6

Rozważmy to samo zadanie co w przykładzie 3.5. Z wzoru (3.18) wynika, że

$$\begin{aligned}
b_0 &= [x_0, 1; f],\\
b_1 &= [x_0, 1; x_1, 1; f],\\
b_2 &= [x_0, 1; x_1, 2; f],\\
b_3 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 1; f],\\
b_4 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 2; f],\\
b_5 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 3; f],\\
b_6 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 3; x_3, 1; f].
\end{aligned}$$

Uwzględniając zależności (3.16) i (3.17) mamy

$$b_0 = f(x_0) = 0,$$

$$b_1 = \frac{[x_1, 1; f] - [x_0, 1; f]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

$$b_2 = \frac{[x_1, 2; f] - [x_0, 1; x_1, 1; f]}{x_1 - x_0} = \frac{f'(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{2 - \dfrac{1-0}{1-0}}{1-0} = 1,$$

$$b_3 = \frac{[x_1, 2; x_2, 1; f] - [x_0, 1; x_1, 2; f]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{[x_1, 1; x_2, 1; f] - [x_1, 2; f]}{x_2 - x_1} - \dfrac{[x_1, 2; f] - [x_0, 1; x_1, 1; f]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - f'(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f'(x_1) - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = \frac{\dfrac{\dfrac{0-1}{2-1}-2}{2-1} - \dfrac{2-\dfrac{1-0}{1-0}}{1-0}}{2-0} = -2.$$

Wyznaczenie współczynników b_4, b_5 i b_6 pozostawiamy Czytelnikowi. ■

3.6. Reszta w interpolacji wielomianowej

Definicja 3.8. *Resztą w interpolacji wielomianowej* nazywamy wyrażenie

$$r(x) = f(x) - H_n(x)$$

(w przypadku szczególnym: $r(x) = f(x) - L_n(x)$).

Twierdzenie 3.8. *Jeżeli funkcja f jest $(m_i - 1)$-krotnie różniczkowalna w punktach x_i ($i = 0, 1, \ldots, k$), to dla $x \neq x_i$ mamy*

$$r(x) = p_{n+1}(x)[x_0, m_0; x_1, m_1; \ldots ; x_k, m_k; x, 1; f], \tag{3.19}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_k)^{m_k}.$$

Dowód. Niech H_{n+1} oznacza wielomian interpolacyjny Hermite'a spełniający warunki (3.11) oraz warunek

$$H_{n+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}),$$

dla pewnego $x_{k+1} \neq x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, k$). Mamy

$$H_{n+1}(x) = \sum_{l=0}^{n+1} b_l p_l(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l p_l(x) + b_{n+1}p_{n+1}(x) = H_n(x) + b_{n+1}p_{n+1}(x),$$

gdzie współczynniki b_l dane są wzorem (3.18), a więc dla $x = x_{k+1}$ otrzymujemy

$$H_{n+1}(x_{k+1}) = H_n(x_{k+1}) + p_{n+1}(x_{k+1})[x_0, m_0; x_1, m_1; \ldots ; x_k, m_k; x_{k+1}, 1; f].$$

Stąd

$$r(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) - H_n(x_{k+1}) = H_{n+1}(x_{k+1}) - H_n(x_{k+1})$$
$$= p_{n+1}(x_{k+1})[x_0, m_0; x_1, m_1; \ldots ; x_k, m_k; x_{k+1}, 1; f].$$

Wobec dowolności x_{k+1} otrzymujemy tezę twierdzenia. ■

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia wynika

Wniosek 3.1. *W przypadku interpolacji Lagrange'a*

$$r(x) = p_{n+1}(x)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x; f],$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$