III. INTERPOLACJA

3.1. Ogólne zadanie interpolacji

Niech Φ oznacza funkcję zmiennej x zależną od $n + 1$ parametrów $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tj.

$$\Phi = \Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Definicja 3.1. *Zadanie interpolacji* polega na określeniu parametrów a_i tak, żeby dla $n + 1$ danych par $(x_i, f(x_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ liczb rzeczywistych lub zespolonych takich, że $x_i \neq x_k$ dla $i \neq k$, zachodziło

$$\Phi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_n) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Punkty x_i nazywamy *węzłami interpolacji*, $f(x_i)$ – *wartościami funkcji w węzłach* x_i, a zbiór $\pi_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ nazywamy *siatką*.

W zależności od rodzaju funkcji Φ wyróżniamy interpolację:

- liniową, w tym
  - wielomianową, a w tym
    - Lagrange'a,
    - Hermite'a,
  - trygonometryczną,
  - funkcjami sklejanymi,
- nieliniową, w tym
  - wymierną,
  - wykładniczą.

W interpolacji liniowej funkcja Φ zależy w sposób liniowy od współczynników a_i, tj.

$$\Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Psi_i(x).$$

Na przykład, dla interpolacji wielomianowej mamy

$$\Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Przykładem interpolacji nieliniowej jest interpolacja wymierna, w której

$$\Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}.$$

Interpolacja jest stosowana m. in. do określenia wartości funkcji zadanej tablicą wartości (np. interpolacja wielomianowa), do wyprowadzania wzorów numerycznego całkowania, różniczkowania, rozwiązywania równań różniczkowych, przyspieszania zbieżności pewnych ciągów (np. interpolacja wielomianowa i wymierna) i do analizy Fouriera serii pomiarów (interpolacja trygonometryczna).

3.2. Interpolacja Lagrange'a

Definicja 3.2. *Zadanie interpolacyjne Lagrange'a* polega na znalezieniu dla danej funkcji *f* wielomianu L_n stopnia nie wyższego niż *n*, którego wartości w *n* + 1 punktach x_i są takie same, jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{gdzie} \quad x_i \neq x_j \quad \text{dla} \quad i \neq j. \tag{3.1}$$

Twierdzenie 3.1. *Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma dokładnie jedno rozwiązanie, tj. dla dowolnych n* + 1 *węzłów* x_i *i wartości funkcji w tych węzłach* $f(x_i)$ *istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia nie większego od n, dla którego zachodzi zależność* (3.1).

Dowód. W pierwszej części dowodu pokażemy, że wielomian, o którym mowa w twierdzeniu, istnieje, a następnie udowodnimy jego jednoznaczność.

Skonstruujmy następujące funkcje pomocnicze:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Są to wielomiany stopnia *n*, takie że

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } i = j, \\ 0, & \text{gdy } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} oznacza *symbol Kronecker'a*). Stąd wielomian

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3.2}$$

jest wielomianem stopnia co najwyżej *n* przyjmującym w punktach x_i wartości $f(x_i)$, czyli istnieje wielomian spełniający zależność (3.1).

Przypuśćmy, że istnieją dwa wielomiany $L_n^1(x)$ i $L_n^2(x)$ stopnia nie większego od *n*, dla których

$$L_n^1(x_i) = L_n^2(x_i) = f(x_i).$$

Wówczas wielomian $L_n^1(x) - L_n^2(x)$ jest wielomianem stopnia nie większego od n, który ma co najmniej $n + 1$ różnych pierwiastków x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Oznacza to, że jest to wielomian tożsamościowo równy 0, tj.

$$L_n^1(x) - L_n^2(x) \equiv 0,$$

a więc

$$L_n^1(x) \equiv L_n^2(x),$$

co jest sprzeczne z przyjętym założeniem, że wielomiany $L_n^1(x)$ i $L_n^2(x)$ są różne. ■

Wzór (3.2) nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Lagrange'a*, a wielomian $L_n(x)$ nazywa się *wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a*. Z wzoru tego wynika, że wielomian $L_n(x)$ zależy liniowo od wartości $f(x_i)$. Dla dużych wartości n wzór ten jest niepraktyczny.

Przykład 3.1

Niech dla $n = 3$ będzie dana tablica wartości

i	0	1	2	3
x_i	0	1	3	4
$f(x_i)$	1	3	2	1

Należy wyznaczyć wartość wielomianu interpolacyjnego L_3 w punkcie $x = 2$ przy założeniu, że $L_3(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, 2, 3$. Mamy

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}, \quad l_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}, \quad l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}$$

i na podstawie wzoru (3.2) otrzymujemy

$$L_3(2) = 1 \cdot l_0(2) + 3 \cdot l_1(2) + 2 \cdot l_2(2) + 1 \cdot l_3(2) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 3.$$ ■

Przy obliczaniu wartości wielomianu interpolacyjnego wygodnie jest posługiwać się *algorytmem Neville'a*, który sformułujemy w twierdzeniu.

Twierdzenie 3.2. *Niech dla danych punktów węzłowych* $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots,$ $P_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ *oznacza wielomian stopnia nie większego od k, taki że*

$$P_{i_0 i_1 \ldots i_k}(x_{i_j}) = f(x_{i_j}), \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Wówczas zachodzą wzory rekurencyjne:

$$
\begin{aligned}
&a)\ P_i(x) \equiv f(x_i),\\
&b)\ P_{i_0 i_1 \ldots i_k}(x) \equiv \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Dowód. Wzór a) jest oczywisty. W celu wykazania wzoru b) oznaczmy prawą stronę przez $R(x)$. Pokażemy, że wielomian R ma własności wielomianu $P_{i_0 i_1 \ldots i_k}$. Zauważmy, że stopień wielomianu R jest nie większy od k. Z definicji wielomianów $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ i $P_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ mamy

$$
R(x_{i_k}) = P_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_{i_k}) = f(x_{i_k}), \quad R(x_{i_0}) = P_{i_0 i_1 \ldots i_{k-1}}(x_{i_0}) = f(x_{i_0}),
$$

a dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$ otrzymujemy

$$
R(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})f(x_{i_j}) - (x_{i_j} - x_{i_k})f(x_{i_j})}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f(x_{i_j}).
$$

Z twierdzenia 3.1 wynika jednoznaczność interpolacji wielomianowej, a więc $R = P_{i_0 i_1 \ldots i_k}$. ■

Algorytm Neville'a polega na tym, że za pomocą wzorów (3.3) konstruujemy tablicę symetryczną, która zawiera wartości wielomianu interpolacyjnego $P_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ w ustalonym punkcie x:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
x_0	$f(x_0) = P_0(x)$			
		$\rangle\ P_{01}(x)$		
x_1	$f(x_1) = P_1(x)$		$\rangle\ P_{012}(x)$	
		$\rangle\ P_{12}(x)$		$\rangle\ P_{0123}(x)$
x_2	$f(x_2) = P_2(x)$		$\rangle\ P_{123}(x)$	
		$\rangle\ P_{23}(x)$		
x_3	$f(x_3) = P_3(x)$			

W praktyce wielomian $P_{i,i+1,\ldots,i+k}$ oznaczamy przez $P_{i+k,\,k}$, co ułatwia komputerowe zaprogramowanie powyższej tablicy (jako tablicy dwuwymiarowej). Przyjmuje ona wówczas postać

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
x_0	$f(x_0) = P_{00}$			
		$\rangle\ P_{11}$		
x_1	$f(x_1) = P_{10}$		$\rangle\ P_{22}$	
		$\rangle\ P_{21}$		$\rangle\ P_{33}$
x_2	$f(x_2) = P_{20}$		$\rangle\ P_{32}$	
		$\rangle\ P_{31}$		
x_3	$f(x_3) = P_{30}$			

Stosując to oznaczenie wzory (3.3) można zapisać następująco:

$$
\begin{aligned}
P_{i0} &= f(x_i), \\
P_{ik} &= \frac{(x - x_{i-k})P_{i,k-1} - (x - x_i)P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}} \\
&= P_{i,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{\dfrac{x - x_{i-k}}{x - x_i} - 1}, \quad 1 \le k \le i, \quad i = 0, 1, \dots .
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Przykład 3.2

Dla danych z przykładu 3.1 znajdźmy wartość $L_3(2)$ stosując algorytm Neville'a. Korzystając z wzorów (3.4) konstruujemy następującą tablicę:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & k=0 & & k=1 & & k=2 & & k=3 \\
\hline
0 & P_{00} = 1 & & & & & & \\
 & & \rangle & P_{11} = 5 & & & & \\
1 & P_{10} = 3 & & & \rangle & P_{22} = \frac{10}{3} & & \\
 & & \rangle & P_{21} = \frac{5}{2} & & & \rangle & P_{33} = 3 \\
3 & P_{20} = 2 & & & \rangle & P_{32} = \frac{8}{3} & & \\
 & & \rangle & P_{31} = 3 & & & & \\
4 & P_{30} = 1 & & & & & &
\end{array}
$$

Zatem $L_3(2) = P_{33} = 3.$ ■

3.3. Wzór interpolacyjny Newtona

W przypadku wyznaczania samego wielomianu interpolacyjnego lub obliczania wielu interpolowanych wartości korzysta się z wielomianu interpolacyjnego Newtona. W zapisie tego wielomianu wykorzystuje się ilorazy różnicowe.

Definicja 3.3. *Ilorazem różnicowym rzędu k* funkcji *f* opartym na parami różnych węzłach $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$, w których jest określona funkcja *f* (tj. znane są wartości $f(x_i)$) nazywamy wyrażenie postaci

$$
[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}; f] = \sum_{i=l}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l \\ j \ne i}}^{l+k} (x_i - x_j)},
\tag{3.5}
$$

przy czym przez iloraz różnicowy rzędu zerowego oparty na węźle x_l rozumiemy wartość $[x_l; f] = f(x_l)$.

Poniżej podajemy podstawowe własności ilorazu różnicowego.

1° Iloraz różnicowy jest funkcją symetryczną, tj.

$$[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}; f] = [x_{i_l}, x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_{l+k}}; f],$$

gdzie liczby $i_l, i_{l+1}, \dots, i_{l+k}$ są dowolną permutacją liczb l, $l + 1$, ... , $l + k$.

2° Iloraz różnicowy jest funkcjonałem liniowym, tj.

$$[\pi_n; \alpha f + \beta g] = \alpha[\pi_n; f] + \beta[\pi_n; g],$$

gdzie π_n oznacza siatkę.

3° Jeśli siatka π_n jest jednostajna, tj. $x_{k+1} = x_0 + (k+1)h$, h = const, k = 0, 1, ... , n − 1, to

$$[\pi_n; f] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n},$$

gdzie Δ oznacza operator różnicy progresywnej zdefiniowany następująco:

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \quad \Delta^1 f(x) \equiv \Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \quad n = 2, 3, \dots .$$

Poniższe twierdzenie podaje związek rekurencyjny dla ilorazów różnicowych.

Twierdzenie 3.3. *Dla dowolnego układu parami różnych punktów $x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}$ należących do dziedziny funkcji f zachodzi zależność rekurencyjna*

$$[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k}; f] = \frac{[x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+k}; f] - [x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k-1}; f]}{x_{l+k} - x_l}. \tag{3.6}$$

Dowód. Z wzoru (3.5) mamy

$$[x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+k-1}; f] = \sum_{i=l+1}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l+1 \\ j \neq i}}^{l+k} (x_i - x_j)} = \frac{f(x_{l+k})}{\prod\limits_{\substack{j=l+1 \\ j \neq i}}^{l+k} (x_{l+k} - x_j)} + \sum_{i=l+1}^{l+k-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l+1 \\ j \neq i}}^{l+k} (x_i - x_j)},$$

$$[x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+k}; f] = \sum_{i=l}^{l+k-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k-1} (x_i - x_j)} = \frac{f(x_l)}{\prod\limits_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k-1} (x_l - x_j)} + \sum_{i=l+1}^{l+k-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l \\ j \neq i}}^{l+k-1} (x_i - x_j)}.$$

Oznaczając prawą stronę wzoru (3.6) przez P otrzymujemy

$$P = \frac{1}{x_{l+k}} \left\{ \frac{f(x_{l+k})}{\prod\limits_{\substack{j=l+1 \\ j \neq i}}^{l+k} (x_{l+k} - x_j)} \right.$$

$$+\sum_{i=l+1}^{l+k-1} f(x_i)\left[\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=l+1\\ j\neq i}}^{l+k}(x_i-x_j)}-\frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i}}^{l+k-1}(x_i-x_j)}\right]-\frac{f(x_l)}{\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i}}^{l+k-1}(x_l-x_j)}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{x_{l+k}-x_l}\left\{\frac{f(x_{l+k})}{\prod\limits_{j=l+1}^{l+k-1}(x_{l+k}-x_j)}+\sum_{i=l+1}^{l+k-1} f(x_i)\frac{x_i-x_l-x_i+x_{l+k}}{\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i}}^{l+k}(x_i-x_j)}-\frac{f(x_l)}{\prod\limits_{j=l+1}^{l+k-1}(x_l-x_j)}\right\}$$

$$=\frac{f(x_{l+k})}{\prod\limits_{j=l}^{l+k-1}(x_{l+k}-x_j)}+\sum_{i=l+1}^{l+k-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i}}^{l+k}(x_i-x_j)}+\frac{f(x_l)}{\prod\limits_{j=l+1}^{l+k}(x_l-x_j)}=\sum_{i=l}^{l+k}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=l\\ j\neq i}}^{l+k}(x_i-x_j)}.$$

Stąd, z uwagi na wzór (3.5), otrzymujemy lewą stronę wzoru (3.6). ■

Możemy teraz zdefiniować wielomian interpolacyjny Newtona.

Definicja 3.4. Niech π_n oznacza dowolną siatkę bez węzłów wielokrotnych. *Wielomianem interpolacyjnym Newtona* dla funkcji *f* na siatce π_n nazywamy wielomian

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0)+[x_0,x_1;f](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2;f](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +\ldots+[x_0,x_1,\ldots,x_n;f](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.7}$$

przy czym $N_n(x_i)=f(x_i)$ dla $x_i\in\pi_n$ $(i=0,1,\ldots,n)$.

Z twierdzenia 3.1 wynika, że zarówno wielomian $L_n(x)$, jak i wielomian $N_n(x)$ są rozwiązaniem tego samego zadania interpolacyjnego. Ponieważ to rozwiązanie jest jednoznaczne, więc mamy

Twierdzenie 3.4. *Wielomiany Lagrange'a i Newtona są algebraicznie równoważne, tj.*

$$L_n(x)\equiv N_n(x).$$

Zauważmy, że wzór (3.7) jest postacią Newtona wielomianu (zob. p. 2.1). Współczynniki tego wielomianu określa się zwykle z tablicy ilorazów różnicowych postaci

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
x_0	$f(x_0)=[x_0;f]$			
		$\rangle\,[x_0,x_1;f]$		
x_1	$f(x_1)=[x_1;f]$		$\rangle\,[x_0,x_1,x_2;f]$	
		$\rangle\,[x_1,x_2;f]$		$\rangle\,[x_0,x_1,x_2,x_3;f]$
x_2	$f(x_2)=[x_2;f]$		$\rangle\,[x_1,x_2,x_3;f]$	
		$\rangle\,[x_2,x_3;f]$		$\vdots$
x_3	$f(x_3)=[x_3;f]$		$\vdots$	
		$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

przy czym odpowiednie ilorazy różnicowe obliczane są kolejno kolumna po kolumnie z wykorzystaniem zależności (3.6). Współczynniki wielomianu (3.7) znajdują się w najwyższym ukośnym wierszu. Algorytm ten można zrealizować kosztem tylko $2n$ miejsc pamięci (niszcząc dane wartości funkcji).

Przykład 3.3

Dla danych z przykładu 3.1 wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$\begin{aligned} N_3(x) &= f(x_0)+[x_0,x_1;f](x-x_0)+[x_0,x_1,x_2;f](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +[x_0,x_1,x_2,x_3;f](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 1+[0,1;f](x-0)+[0,1,3;f](x-0)(x-1)+[0,1,3,4;f](x-0)(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

Ilorazy różnicowe obliczamy w tablicy:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
0	1	$\rangle\,2$		
			$\rangle\,-\frac{5}{6}$	
1	3	$\rangle\,-\frac{1}{2}$		$\rangle\,\frac{1}{6}$
3	2		$\rangle\,-\frac{1}{6}$	
		$\rangle\,-1$		
4	1			

Szukany wielomian jest więc następujący:

$$N_3(x)=1+2x-\frac{5}{6}x(x-1)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-3)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{10}{3}x+1.$$

Łatwo sprawdzić, że $N_3(2)=3$. ■

3.4. Interpolacja Lagrange'a dla węzłów równoodległych

Załóżmy, że węzły x_i, $i=0,1,\ldots,n$, są rzeczywiste i równoodległe (tzn. siatka π_n jest jednostajna), czyli $x_i=x_0+ih$, gdzie h oznacza stałą długość kroku. Jeśli we wzorze (3.2) podstawimy $x=x_0+th$, to otrzymamy

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}.$$

Przy węzłach równoodległych szczególnie wygodna jest postać wielomianu interpolacyjnego, którego współczynniki są wyrażone za pomocą tzw. różnic skończonych funkcji *f*. Wprowadźmy teraz odpowiednie pojęcia.

Definicja 3.5. Niech $M(\mathbf{R})$ oznacza klasę funkcji ograniczonych na całej osi rzeczywistej, tj.

$$f \in M(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| < \infty.$$

a) *Różnicą zwykłą* (*progresywną*) funkcji $f \in M(\mathbf{R})$ nazywamy operację Δ, której wartością jest Δf, zdefiniowaną wzorem

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x),$$

gdzie $x \in \mathbf{R}$, $h \in \mathbf{R}$, przy czym $h = \text{const}$.
Podobnie definiujemy pozostałe operacje.

b) *Operacja przesunięcia*: $Ef(x) = f(x+h)$.

c) *Różnica wsteczna*: $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$.

d) *Różnica centralna*: $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$.

Odpowiednie różnice rzędu n określamy jako różnice z różnic rzędu $n-1$, np..

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

przy czym $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

Poniżej podano kilka podstawowych własności różnic skończonych. Ich udowodnienie pozostawiamy Czytelnikowi.

1° $\Delta f(x) = (E - I) f(x) \overset{df}{=} Ef(x) - If(x)$
(I oznacza operację identyczności: $If(x) = f(x)$)

2° $(\Delta \circ \nabla) f(x) \overset{df}{=} \Delta(\nabla f(x)) = (\Delta - \nabla) f(x)$

3° $\delta^2 f(x) = (\Delta - \nabla) f(x)$

4° $\Delta^n \circ \Delta^m f(x) = \Delta^m \circ \Delta^n f(x)$

5° $\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x)$

6° $\Delta(f(x) g(x)) = g(x) \Delta f(x) + f(x+h) \Delta g(x)$

7° $\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x) g(x+h)}, \quad g(x), g(x+h) \neq 0$

8° $E^n f(x) = f(x+nh) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x)$

Korzystając z pojęcia różnicy progresywnej i różnicy wstecznej można udowodnić

Twierdzenie 3.5. *Jeżeli węzły są równoodległe, to*

$$L_n(x_0+th) = L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!} q_i(t), \tag{3.8}$$

gdzie

$$q_0(t) = 1, \quad q_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1}(t-j), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

oraz

$$L_n(x_0+th) = L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\nabla^i f(x_0)}{i!} \widetilde{q}_i(t), \tag{3.9}$$

gdzie

$$\widetilde{q}_0(t) = 1, \quad \widetilde{q}_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1}(t+j), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Dowód. Udowodnimy wzór (3.8) (dowód wzoru (3.9) przebiega podobnie). Stosując zasadę indukcji matematycznej można pokazać, że dla węzłów równoodległych mamy

$$[x_0, x_1, \dots, x_k; f] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}. \tag{3.10}$$

Jeśli $x = x_0 + th$, to

$$\prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = h^k \prod_{i=0}^{k-1}(t-i).$$

Stąd oraz z wzorów (3.7) i (3.10) otrzymujemy wzór (3.8). ■

Przykład 3.4

Dana jest następująca tablica wartości funkcji:

i	0	1	2	3	4
x_i	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70
$f(x_i)$	33,115	34,813	36,598	38,475	40,447

Należy obliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = 3{,}58$.

Ponieważ węzły są równoodległe, możemy użyć wzoru (3.8) lub (3.9). Wybierając pierwszy z tych wzorów sporządzamy najpierw tablicę różnic progresywnych: