Elementy analizy numerycznej

wykłady 4 i 5

zadania

Uwaga: W materiałach z wykładów zadania dotyczące wykładów 4 i 5 znajdują się po wykładzie 6, który kończy rozdział poświęcony interpolacji. Z wykładami 4 i 5 są związane podane tam zadania, które przytoczono także poniżej.

1. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach $-2, 1, 2, 4$ przyjmuje wartości odpowiednio $3, 1, -3, 8$. Jaka jest wartość tego wielomianu w punkcie $x = 0$?
2. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w punktach $0, 1, 2$ przyjmuje wartości odpowiednio $1, 1, 3$. Obliczyć wartość tego wielomianu w punkcie $x = 1/2$.
3. Dla danych z zadania 2 znaleźć wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie $x = 1/2$ stosując algorytm Neville'a.
4. Dla danych z zadania 2 znaleźć wielomian interpolacyjny stosując wzór interpolacyjny Newtona.
5. Napisać wzór interpolacyjny Newtona dla funkcji $f(x)$ i następujących danych: $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 5$, $f(6) = 7$.
6. Udowodnić, że jeżeli
$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p),$$
to
$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = 0 \text{ dla } n \le p.$$
Jaka jest wartość tego ilorazu różnicowego, gdy $n = p + 1$?
7. Obliczyć różnice progresywne wielomianu
$$W_4(x) = x^4 - x - 1$$
przyjmując $h = 1$.
8. Znaleźć różnice wsteczne wielomianu $W_4(x)$ z zadania 6.
9. Udowodnić, że jeśli $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, k$, to
$$[x_0, x_1, \dots, x_k; f] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}.$$
10. Pokazać, że
$$\delta^2 f(x) = (\Delta - \nabla) f(x).$$
11. Udowodnić, że
$$\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha\Delta f(x) + \beta\Delta g(x).$$
12. Korzystając z przedstawienia wielomianu interpolacyjnego za pomocą różnic progresywnych znaleźć ten wielomian, gdy $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ i $f(3) = 3$.

13. Dla danych z zadania 12 znaleźć wielomian interpolacyjny korzystając jego przedstawienia za pomocą różnic wstecznych.

14. Dane są punkty x_i ($i = 0, 1, 2$) o krotnościach m_i oraz wartościach funkcji f i jej pochodnych w tych punktach:

i	0	1	2
x_i	0	1	2
m_i	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	0
$f'(x_i)$	–	2	1
$f''(x_i)$	–	–	2

Skonstruować wielomian interpolacyjny Hermite'a posługując się wzorami (3.15) na współczynniki.

15. Dla danych z zadania 14 wyznaczyć współczynniki wielomianu interpolacyjnego Hermite'a korzystając z uogólnionych ilorazów różnicowych.

16. Z jaką dokładnością można obliczyć ln(100,5) przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości ln(100), ln(101), ln(102) i ln(103).

17. Udowodnić, że jeśli funkcja g interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a funkcja h interpoluje funkcję f w węzłach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to funkcja

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)]$$

interpoluje funkcję f we wszystkich węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (funkcje g i h nie muszą być wielomianami).

18. Udowodnić, że jeśli funkcja g (wielomian lub nie) interpoluje funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, a funkcja h jest funkcją taką, że $h(x_i) = \delta_{in}$ $(0 \le i \le n)$, to istnieje stała c, dla której funkcja $g + ch$ interpoluje funkcję f w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

19. Wielomian

$$p(x) = 2 - (x+1) + \pi(x+1) - 2\pi(x+1)(x-1)$$

interpoluje cztery początkowe punkty z tablicy

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	2	1	2	−7	10

Dodając do wielomianu p jeden składnik, wyznaczyć wielomian interpolujący wszystkie dane.

Rozwiązania wybranych zadań dotyczących wykładów 4 i 5

zad. 2
Wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest określony wzorem (3.4) (zob. wykład 4). W naszym przypadku $n = 2$ i wzór ten przyjmuje postać

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2)\frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Po podstawieniu danych mamy

$$\begin{aligned} L_2(x) &= 1\cdot\frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-2}{0-2} + 1\cdot\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-2}{1-2} + 3\cdot\frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - x(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - x^2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \\ &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Stąd dla $x = 1/2$ otrzymujemy

$$L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Zauważmy, że wielomian jest „tylko" drugiego stopnia, a do wyznaczenia jego wartości w podanym punkcie x trzeba wykonać „trochę" działań.

zad. 3
Na podstawie wzorów (3.4) (zob. wykład 4) konstruujemy następującą tablicę (strzałki wskazują z których elementów powstają kolejne elementy):

	$k = 0$		$k = 1$		$k = 2$
x_0	P_{00}	$\searrow$			
			P_{11}	$\searrow$	
x_1	P_{10}	$\nearrow$ $\searrow$			P_{22}
			P_{21}	$\nearrow$	
x_2	P_{20}	$\nearrow$			

gdzie

$$
\begin{aligned}
P_{00} &= f(x_0), \\
P_{10} &= f(x_1), \\
P_{20} &= f(x_2), \\
P_{11} &= \frac{(x - x_0)P_{10} - (x - x_1)P_{00}}{x_1 - x_0}, \\
P_{21} &= \frac{(x - x_1)P_{20} - (x - x_2)P_{10}}{x_2 - x_1}, \\
P_{22} &= \frac{(x - x_0)P_{20} - (x - x_2)P_{11}}{x_2 - x_0}.
\end{aligned}
$$

Oczywiście element P_{22} dla podanej wartości x będzie szukaną wartością wielomianu. Zauważmy, że sposób wyznaczania elementów tablicy jest łatwo zapamiętać. W liczniku jest wykonywane odejmowanie składników, z których pierwszy jest różnicą zmiennej x i pierwszego węzła pomnożoną „na krzyż" przez odpowiedni element tablicy, a drugi – różnicą zmiennej x i drugiego węzła pomnożoną „na krzyż" przez drugi element tablicy (w danej kolumnie). W mianownikach występuje zawsze różnica pomiędzy skrajnymi węzłami (z pierwszej kolumny).
Po uwzględnieniu danych tablica ma postać

	$k=0$		$k=1$		$k=2$
0	1	$\searrow$			
			$\dfrac{\left(\frac{1}{2}-0\right)\cdot 1-\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 1}{1-0}=1$	$\searrow$	
1	1	$\nearrow$ $\searrow$			$\dfrac{\left(\frac{1}{2}-0\right)\cdot 0-\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot 1}{2-0}=\dfrac{3}{4}$
			$\dfrac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 3-\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot 1}{2-1}=0$	$\nearrow$	
2	3	$\nearrow$			

zad. 4
Zgodnie z wzorem (3.7) (zob. wykład 4) wielomian interpolacyjny Newtona dla $n = 2$ ma postać

$$N_2(x) = f(x_0) + [x_0, x_1; f](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2; f](x - x_0)(x - x_1).$$

Konstruujemy tablicę ilorazów różnicowych (strzałki pokazują z których elementów powstają kolejne elementy):

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
x_0	$f(x_0)=[x_0;f]$ $\searrow$		
		$[x_0,x_1;f]$ $\searrow$	
x_1	$f(x_1)=[x_1;f]$ $\nearrow$ $\searrow$		$[x_0,x_1,x_2;f]$
		$[x_1,x_2;f]$ $\nearrow$	
x_2	$f(x_2)=[x_2;f]$ $\nearrow$		

gdzie, zgodnie z wzorem (3.6) (zob. wykład 4) mamy

$$[x_0,x_1;f]=\frac{[x_1;f]-[x_0;f]}{x_1-x_0},$$

$$[x_1,x_2;f]=\frac{[x_2;f]-[x_1;f]}{x_2-x_1},$$

$$[x_0,x_1,x_2;f]=\frac{[x_1,x_2;f]-[x_1,x_0;f]}{x_2-x_0}.$$

Zauważmy, że tworzenie ilorazów różnicowych kolejnych rzędów (dla kolejnych wartości k) jest łatwo zapamiętać. Każdorazowo odejmujemy ilorazy różnicowe z poprzedniej kolumny i dzielimy przez różnicę pomiędzy skrajnymi węzłami. Dla naszych danych tablica ilorazów różnicowych ma postać

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	1 $\searrow$		
		$\frac{1-1}{1-0}=0$ $\searrow$	
1	1 $\nearrow$ $\searrow$		$\frac{2-0}{2-0}=1$
		$\frac{3-1}{2-1}=2$ $\nearrow$	
2	3 $\nearrow$		

Wartości ilorazów różnicowych występujących we wzorze na szukany wielomian występują w tej tabeli na pierwszej przekątnej (ze strony lewej na prawą). Mamy zatem

$$N_2(x)=1+0\cdot(x-0)+1\cdot(x-0)(x-1)=x^2-x+1.$$

Otrzymaliśmy taki sam wynik, jak w zad. 1, ale przy znacznie mniejszym nakładzie obliczeń.

zad. 7
Zgodnie z definicją różnicy progresywnej mamy

$$\Delta W(x) = W(x+h) - W(x),$$
$$\Delta^n W(x) = \Delta(\Delta^{n-1} W(x)),$$

czyli dla $h = 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Delta W(x) &= (x+1)^4 - (x+1) - 1 - (x^4 - x - 1) \\
&= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - x - 1 - 1 - x^4 + x + 1 \\
&= 4x^3 + 6x^2 + 4x, \\
\Delta^2 W(x) &= \Delta(\Delta(x)) = 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 4(x+1) - (4x^3 + 6x^2 + 4x) \\
&= 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 + 6x^2 + 12x + 6 + 4x + 4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x \\
&= 12x^2 + 24x + 14, \\
\Delta^3 W(x) &= \Delta(\Delta^2 W(x)) = 12(x+1)^2 + 24(x+1) + 14 - (12x^2 + 24x + 14) \\
&= 12x^2 + 24x + 12 + 24x + 24 + 14 - 12x^2 - 24x - 14 \\
&= 24x + 36, \\
\Delta^4 W(x) &= \Delta(\Delta^3 W(x)) = 24(x+1) + 36 - (24x + 36) \\
&= 24x + 24 + 36 - 24x - 36 \\
&= 24, \\
\Delta^n W(x) &= 0 \ \text{ dla } \ n \ge 5.
\end{aligned}$$

zad. 10
Zgodnie z definicją różnicy centralnej mamy

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$
$$\delta^n f(x) = \delta(\delta^{n-1} f(x)).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
L = \delta^2 f(x) &= \delta(\delta f(x) = \delta\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right) \\
&= f(x+h) - f(x) - (f(x) - f(x-h)) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h).
\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$P=(\Delta-\nabla)f(x)=\Delta f(x)-\nabla f(x)$$
$$=f(x+h)-f(x)-(f(x)-f(x-h))=f(x+h)-2f(x)+f(x-h),$$
czyli $L=P$.

zad. 12
Zgodnie z wzorem (3.8) (zob. wykład 4) mamy

$$L_3(x_0+th)=L_3(t)=\frac{\Delta^0 f(x_0)}{0!}q_0(t)+\frac{\Delta f(x_0)}{1!}q_1(t)$$
$$+\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}q_2(t)+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}q_3(t),$$

gdzie

$$q_0(t)=1,\quad q_k(t)=\prod_{j=0}^{k-1}(t-j),\quad j=1,2,3.$$

W naszym przypadku $x_0=0$ i $h=1$. Tworzymy tablicę różnic progresywnych (strzałki wskazują z których elementów powstają kolejne elementy):

x_i	$\Delta^0 f(x_i)=f(x_i)$		$\Delta f(x_i)$		$\Delta^2 f(x_i)$		$\Delta^3 f(x_i)$
0	1	$\searrow$					
			2	$\searrow$			
1	3	$\nearrow$ $\searrow$			−3	$\searrow$	
			−1	$\nearrow$ $\searrow$			5
2	2	$\nearrow$ $\searrow$			2	$\nearrow$	
			1	$\nearrow$			
3	3	$\nearrow$					

Szukane różnice znajdują się na pierwszej przekątnej (ze strony lewej na prawą). Zatem

$$L_3(t)=1+2t-\frac{3}{2}t(t-1)+\frac{5}{6}t(t-1)(t-2)$$
$$=1+2t-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t+\frac{5}{6}t^3-\frac{5}{3}t^2-\frac{5}{6}t^2+\frac{5}{3}t$$
$$=\frac{5}{6}t^3-4t^2+\frac{13}{6}t+1.$$

zad. 14

W zadaniu mamy $k = 2$ i ponieważ

$$\sum_{i=0}^{2} m_i = 6,$$

więc wielomian będzie stopnia $n = 5$, czyli należy wyznaczyć

$$H_5(x) = \sum_{l=0}^{5} b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{m_i - 1} b_{s(i)+j} p_{s(i)+j}(x).$$

Określamy liczby $s(i)$ dla $i = 0, 1, 2$. Mamy

$$s(0) = 0,$$
$$s(1) = m_0 = 1,$$
$$s(2) = m_0 + m_1 = 3.$$

Znajdujemy rozkład liczb l na sumę $s(i) + j$, gdzie $j = 0, 1, \ldots, m_i - 1$. Mamy

$$l = 0 = 0 + 0 = s(0) + 0,$$
$$l = 1 = 1 + 0 = s(1) + 0,$$
$$l = 2 = 1 + 1 = s(1) + 1,$$
$$l = 3 = 3 + 0 = s(2) + 0,$$
$$l = 4 = 3 + 1 = s(2) + 1,$$
$$l = 5 = 3 + 2 = s(2) + 2.$$

Wielomiany $p_{s(i)+j}(x)$ mają postać

$$p_0(x) = p_{s(0)+0}(x) = p_{s(0)}(x) = 1,$$
$$p_1(x) = p_{s(1)+0}(x) = p_{s(1)}(x) = (x - x_0)^{m_0} = (x - 0)^1 = x,$$
$$p_2(x) = p_{s(1)+1}(x) = p_{s(1)}(x)(x - x_1)^1 = x(x - 1),$$
$$p_3(x) = p_{s(2)+0}(x) = p_{s(2)}(x) = (x - x_0)^{m_0}(x - x_1)^{m_1} = x(x - 1)^2,$$
$$p_4(x) = p_{s(2)+1}(x) = p_{s(2)}(x)(x - x_2)^1 = x(x - 1)^2(x - 2),$$
$$p_5(x) = p_{s(2)+2}(x) = p_{s(2)}(x)(x - x_2)^2 = x(x - 1)^2(x - 2)^2.$$

Znajdujemy współczynniki b_l dla $l = 1, 2, 3, 4, 5$. Dla $l = 0$ wzór (3.13) (zob. wykład 5) ma postać

$$H_n(x) = b_0 p_{s(0)}(x) + W_2(x)$$

($W_1(x)$ nie występuje), a więc wzór (3.15) (zob. wykład 5) jest następujący (dla $l = 0$ mamy $i = 0$, $s(0) = 0, j = 0$):

$$b_0 = \frac{f(x_0)}{p_{s(0)}(x_0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Dla $l = 1$ mamy $i = 1$, $s(1) = 1$, $j = 0$ oraz

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) = 0.$$

Zatem z wzoru (3.15) otrzymujemy

$$b_1 = \frac{f(x_1) - W_1(x_1)}{p_{s(1)}(x_1)} = \frac{f(x_1)}{p_1(x_1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dla $l = 2$ mamy $i = 1$, $s(1) = 1$, $j = 1$,

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) = x,$$

więc

$$b_2 = \frac{f'(x_1) - W_1'(x_1)}{p_{s(1)}(x_1)} = \frac{2-1}{1} = 1.$$

Dla $l = 3$ mamy $i = 2$, s(2) = 3, $j = 0$ oraz

$$W_1(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) = x + x(x-1) = x^2.$$

Zatem

$$b_3 = \frac{f(x_2) - W_1(x_2)}{p_{s(2)}(x_2)} = \frac{0-4}{2} = -2.$$

Dla $l = 4$ mamy $i = 2$, $s(2) = 3$, $j = 1$,

$$\begin{aligned} W_1(x) &= b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x) \\ &= x^2 - 2x(x-1)^2 = -2x^3 + 5x^2 - 2x, \end{aligned}$$

skąd

$$W_1' = -6x^2 + 10x - 2$$

oraz

$$b_4 = \frac{f'(x_2) - W_1'(x_2)}{p_{s(2)}(x_2)} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}.$$

Wreszcie, dla $l = 5$ mamy $i = 2$, $s(2) = 3$, $j = 2$,

$$\begin{aligned} W_1(x) &= b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x) + b_4 p_4(x) \\ &= -2x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{7}{2}x(x-1)^2(x-2) \\ &= \frac{7}{2}x^4 - 16x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 9x, \end{aligned}$$

skąd

$$W_1'(x) = 14x^3 - 48x^2 + 45x - 9$$

i

$$W_1''(x) = 42x^2 - 96x + 45.$$

Zatem

$$b_5 = \frac{f''(x_2) - W_1''(x_2)}{p_{s(2)}(x_2) \cdot 2!} = \frac{2-21}{4} = -\frac{19}{4}.$$

Wyznaczyliśmy wszystkie współczynniki b_l ($l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) szukanego wielomianu Hermite'a. Możemy więc go napisać:

$$\begin{aligned} H_5(x) &= x + x(x-1) - 2x(x-1)^2 + \frac{7}{2}x(x-1)^2(x-2) - \frac{19}{4}x(x-1)^2(x-2)^2 \\ &= \ldots = -\frac{19}{4}x^5 + 32x^4 - \frac{311}{4}x^3 + \frac{159}{2}x^2 - 28x. \end{aligned}$$

W celu weryfikacji wielomianu (sprawdzenia, czy poprawnie wyznaczyliśmy wielomian) możemy sprawdzić, czy

$$H_5^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),$$

czyli skorzystać z warunku interpolacji.

zad. 15

Na podstawie wzoru (3.18) (zob. wykład 5) mamy

$$\begin{aligned} b_0 &= [x_0, 1; f], \\ b_1 &= [x_0, 1; x_1, 1; f], \\ b_2 &= [x_0, 1; x_1, 2; f], \\ b_3 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 1; f], \\ b_4 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 2; f], \\ b_5 &= [x_0, 1; x_1, 2; x_2, 3; f]. \end{aligned}$$

Korzystając z definicji uogólnionych ilorazów różnicowych (wzory (3.16) i (3.17) – zob. wykład 5) otrzymujemy

$$b_0 = f(x_0) = 0,$$

$$b_1 = \frac{[x_1, 1; f] - [x_0, 1; f]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{1-0} = 1,$$

$$b_2 = \frac{[x_1, 2; f] - [x_0, 1; x_1, 1 f]}{x_1 - x_0} = \frac{f'(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{2 - \dfrac{1-0}{1-0}}{1-0} = 1,$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{[x_1, 2; x_2, 1; f] - [x_0, 1; x_1, 2; f]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\dfrac{[x_1, 1; x_2, 1; f] - [x_1, 2; f]}{x_2 - x_1} - \dfrac{[x_1, 2; f] - [x_0, 1; x_1, 1; f]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - f'(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f'(x_1) - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_2-x_1}}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{0-1}{2-1}-2}{2-1} - \dfrac{2-\dfrac{1-0}{1-0}}{1-0}}{2-0} = -2,$$

$$b_4 = \frac{[x_0,1;x_1,2;x_2,1;f]-[x_1,2;x_2,2;f]}{x_2-x_0} = \ldots = \frac{7}{2},$$

$$b_5 = \frac{[x_0,1;x_1,2;x_2,2;f]-[x_1,2;x_2,3;f]}{x_2-x_0} = \ldots = -\frac{19}{4}.$$

zad. 16

Z wzoru (3.20) (zob. wykład 5) wynika, że

$$|r(x)| \le \frac{|p_{n+1}(x)|}{(n+1)!} \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|. \tag{1}$$

W zadaniu mamy $n = 3$, $f(x) = \ln x$, $a = 100$, $b = 103$, więc

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

$$p_4(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Stąd

$$\sup_{x\in[100,\,103]} \left| f^{(4)}(x) \right| = \frac{6}{100^4},$$

a ponieważ $x_0 = 100$, $x_1 = 101$, $x_2 = 102$, $x_3 = 103$ i $x = 100{,}5$, więc

$$|p_4(x)| = |(100{,}5-100)(100{,}5-101)(100{,}5-102)(100{,}5-103)| = 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5.$$

Po podstawieniu do wzoru (1) mamy

$$|r(x)| \le \frac{6}{100^4\cdot 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5 \approx 2{,}344\cdot 10^{-9}.$$

zad. 17

Oznaczmy

$$k(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}[g(x) - h(x)].$$

Należy wykazać, że

$$k(x_i) = f(x_i) \tag{2}$$

dla każdego $i = 0, 1, \ldots, n$.

Dla $i = 0$ mamy

$$k(x_0) = g(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0}[g(x_0) - h(x_0 0] = g(x_0) + 0 = g(x_0) = f(x_0),$$

bo funkcja *g* interpoluje funkcję *f* w punkcie x_0.
Dla $i = n$ otrzymujemy

$$k(x_n) = g(x_n) + \frac{x_0 - x_n}{x_n - x_0}[g(x_n) - h(x_n)] = g(x_n) - g(x_n) + h(x_n) = h(x_n) = f(x_n),$$

gdyż funkcja *h* interpoluje funkcję *f* w punkcie x_n.
W punktach x_i dla $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ obie funkcje *g* i *h* interpolują funkcję *f*. Zatem dla tych wartości *i* mamy

$$k(x_i) = g(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0}[g(x_i) - h(x_i)] = f(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0}[f(x_i) - f(x_i)]$$

$$= f(x_i) + \frac{x_0 - x_i}{x_n - x_0} \cdot 0 = f(x_i).$$

Tym samym wykazaliśmy, że funkcja *k* interpoluje funkcję *f* we wszystkich punktach x_i.