Elementy analizy numerycznej

wykład 3

zadania

str. 20 zad. 1
Wielomian jest stopnia czwartego, zatem kolejno obliczamy

$$\begin{aligned} w_4 &= a_4 = 1, \\ w_3 &= w_4 x + a_3 = 1 \cdot 1 + 1 = 2, \\ w_2 &= w_3 x + a_2 = 2 \cdot 1 + (-4) = -2, \\ w_1 &= w_2 x + a_1 = -2 \cdot 1 + (-3) = -5, \\ w_0 &= w_1 x + a_0 = -5 \cdot 1 + 3 = -2. \end{aligned}$$

Wartość współczynnika w_0 jest szukaną wartością danego wielomianu w punkcie 1.

str. 20 zad. 2
Wielomian zapisujemy jako wielomian zmiennej y:

$$w(y) = y^4 + y^3 - 4y^2 - 3y + 3.$$

Szukamy ilorazu z dzielenia tego wielomianu przez $y - 1$, a więc w algorytmie należy przyjąć $x = 1$. Ponieważ współczynniki b_i ilorazu są równe współczynnikom w_i ($i = 1, 2, 3, 4$), a te ostatnie wyznaczyliśmy w zadaniu 1, więc iloraz ma postać

$$v(y) = y^3 + 2y^2 - 2y - 5.$$

Współczynnik $b_0 = w_0 = -2$ jest resztą z tego dzielenia.

str. 20 zad. 3
W celu weryfikacji wartości znormalizowanych pochodnych otrzymanych algorytmem Hornera wyznaczmy je najpierw w zwykły sposób. Mamy

$$\begin{aligned} w(x) &= x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow \quad w(1) = -2, \\ w'(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{w'(1)}{1!} = -4, \\ w''(x) &= 12x^2 + 6x - 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{w''(1)}{2!} = 5, \\ w'''(x) &= 24x + 6 \quad \Rightarrow \frac{w'''(1)}{3!} = 5, \\ w^{(4)}(x) &= 24 \quad \Rightarrow \quad \frac{w^{(4)}(1)}{4!} = 1. \end{aligned}$$

W zadaniu 1 wyznaczyliśmy algorytmem Hornera wartość $w(1) = -2$. W celu wyznaczenia $\frac{w'(1)}{1!} = w'(1)$ wielomian $w(y)$ dzielimy przez $y - 1$ algorytmem Hornera. Wykonaliśmy to w zadaniu 2, więc możemy napisać, że iloraz ten jest równy

$$v_1(y) = y^3 + 2y^2 - 2y - 5.$$

Dalej obliczamy $v_1(1)$ algorytmem Hornera. Mamy

$$\begin{aligned} w_3 &= 1, \\ w_2 &= 1 \cdot 1 + 2 = 3, \\ w_1 &= 3 \cdot 1 - 2 = 1, \\ w_0 &= 1 \cdot 1 - 5 = -4. \end{aligned}$$

Obliczona wartość współczynnika w_0 powinna być równa $w'(1)$ i widzimy, że tak jest. Aby wyznaczyć $\frac{w''(2)}{2!} = \frac{w''(2)}{2}$, należy najpierw podzielić $v_1(y)$ przez $y - 1$ algorytmem Hornera. Ale współczynniki tego ilorazu są równe wyznaczonym już współczynnikom w_i ($i = 1$, 2, 3). Możemy zatem od razu napisać ten iloraz:

$$v_2(y) = y^2 + 3y + 1.$$

Obliczamy $v_2(1)$ algorytmem Hornera. Mamy

$$\begin{aligned} w_2 &= 1, \\ w_1 &= 1 \cdot 1 + 3 = 4, \\ w_0 &= 4 \cdot 1 + 1 = 5 \end{aligned}$$

i widzimy, że wartość współczynnika w_0 jest równa $\frac{w''(2)}{2}$. Kolejnym dzieleniem powinno być podzielenie $v_2(y)$ przez $y - 1$. Wykorzystujemy znowu fakt, że współczynniki tego ilorazu są równe ostatnio wyznaczonym współczynnikom w_i ($i = 1, 2$). Iloraz jest zatem następujący:

$$v_3(y) = y + 4.$$

Stosując ponownie algorytm Hornera wyznaczamy $v_3(1)$:

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, \\ w_0 &= 1 \cdot 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

i mamy $w_0 = \frac{w'''(1)}{3!} = \frac{w'''(1)}{6}$. Iloraz z dzielenia $v_3(y)$ przez $y - 1$ ma postać

$$v_4(y) = 1.$$

Jest oczywiste, że $v_4(1) = w_0 = 1 = \frac{w^{(4)}(1)}{4!} = \frac{w^{(4)}(1)}{24}$. Wzór

$$(m+1)\left(n - \frac{m}{2}\right)$$

określa liczbę dodawań i mnożeń, którą należy wykonać, by algorytmem Hornera znaleźć m początkowych znormalizowanych pochodnych wielomianu stopnia n. W naszym przypadku $m = 4$

i n =4, więc, zgodnie z tym wzorem, należało wykonać 10 dodawań i 10 mnożeń. Możemy to sprawdzić przez policzenie wszystkich wykonanych dodawań i mnożeń.

str. 20 zad. 5

Najpierw wybieramy liczby naturalne p i q tak, by $n + 1 = pq$, gdzie n oznacza stopień wielomianu. Z teorii wiadomo, że dla $q = n + 1$ mamy algorytm optymalny ze względu na liczbę mnożeń. Niech zatem $p = 1$ i $q = 5$ (bo $n = 4$). Możliwy jest jeszcze przypadek $p = 5$ i $q = 1$, który należy przeliczyć samodzielnie. Następnie określamy funkcje pomocnicze

$$s(j) = (n - j) \bmod q \quad \text{i} \quad r(j) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \ j \bmod q \neq 0, \\ q, & \text{dla } \ j \bmod q = 0, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

W naszym przypadku funkcje te mają następujące postacie:

$$s(j) = \begin{cases} 4, & \text{dla } \ j = 0, \\ 3, & \text{dla } \ j = 1, \\ 2, & \text{dla } \ j = 2, \\ 1, & \text{dla } \ j = 3, \\ 0, & \text{dla } \ j = 4, \end{cases}$$

$$r(j) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \ j \bmod 5 \neq 0, \ \text{ czyli dla } \ j = 1, 2, 3, 4, \\ 5, & \text{dla } \ j \bmod 5 = 0, \ \text{ czyli dla } \ j = 0. \end{cases}$$

Wyznaczamy elementy tablicy T_i^j. Mamy

$$T_i^{-1} = a_{4-i-1} x^{s(i+1)} = a_{3-i} x^{s(i+1)} \ \text{ dla } \ i = 0, 1, 2, 3,$$

czyli

$$\begin{aligned} T_0^{-1} &= a_3 x^{s(1)} = 1 \cdot 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \\ T_1^{-1} &= a_2 x^{s(2)} = -4 \cdot 1^2 = -4 \cdot 1 \cdot 1 = -4, \\ T_2^{-1} &= a_1 x^{s(3)} = -3 \cdot 1^1 = -3, \\ T_3^{-1} &= a_0 x^{s(4)} = 3. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w celu wyznaczenia T_3^{-1} nie trzeba wykonywać żadnych działań, w celu wyznaczenia T_2^{-1} należy wykonać jedno mnożenie, T_1^{-1} – dwa mnożenia i mogłoby wydawać się, że do wyznaczenia T_0^{-1} należy wykonać trzy mnożenia. Ponieważ $x^{s(1)} = x^{s(2)} \cdot x$, więc korzystając z wcześniej wyznaczonej wartości $x^{s(2)}$ wystarczą tu tylko dwa mnożenia. Zatem razem wykonaliśmy dotąd 5 mnożeń. Dalej mamy

$$T_j^j = a_4 x^{s(0)} = 1 \cdot 1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \ \text{ dla } \ j = 0, 1, 2, 3, 4$$

i mogłoby wydawać się, że trzeba tu wykonać cztery mnożenia. Jeśli jednak skorzystamy z faktu, że $x^{s(0)} = x^{s(1)} \cdot x$ i uwzględnimy wcześniej wyznaczoną wartość $x^{s(1)}$, to wystarczą tylko dwa mnożenia. Pozostałe elementy tablicy obliczamy z wzoru

$$T_i^j = T_{i-1}^{j-1} + T_{i-1}^j x^{r(i-j)} \ \text{ dla } \ j = 0, 1, 2, 3, 4 \ \text{ oraz } \ i = j + 1(1)4. \tag{1}$$

Zauważmy, że dla podanych wartości j oraz i mamy zawsze $r(i - j) = 0$, co oznacza, że zawsze $x^{r(i-j)} = 1$ i we wzorze (1) mnożenie nie występuje (dodajemy tylko dwa wcześniej obliczone elementy tablicy). Mamy

$$
\begin{aligned}
T_1^0 &= T_0^{-1} + T_0^0 = 1 + 1 = 2,\\
T_1^0 &= T_0^{-1} + T_0^0 = 1 + 1 = 2,\\
T_2^0 &= T_1^{-1} + T_1^0 = -4 + 2 = -2,\\
T_3^0 &= T_2^{-1} + T_2^0 = -3 + (-2) = -5,\\
T_4^0 &= T_3^{-1} + T_3^0 = 3 + (-5) = -2,\\
T_2^1 &= T_1^0 + T_1^1 = 2 + 1 = 3,\\
T_3^1 &= T_2^0 + T_2^1 = -2 + 3 = 1,\\
T_4^1 &= T_3^0 + T_3^1 = -5 + 1 = -4,\\
T_3^2 &= T_2^1 + T_2^2 = 3 + 1 = 4,\\
T_4^2 &= T_3^1 + T_3^2 = 1 + 4 = 5,\\
T_4^3 &= T_3^2 + T_3^3 = 4 + 1 = 5.
\end{aligned}
$$

Do wyznaczenia tych elementów trzeba było wykonać tylko 10 dodawań. W celu wyznaczenia $\dfrac{w^{(j)}(1)}{j!}$ korzystamy z wzoru

$$T_4^j = \frac{w^{(j)}(1)}{j!} \cdot 1^{j \bmod 5} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

bo w naszym przypadku $x = 1$. Mamy

$$T_4^1 = \frac{w'(1)}{1!} \cdot 1^{1 \bmod 5} = w'(1) \cdot 1^1$$

i aby obliczyć $w'(1)$ trzeba wykonać jedno dzielenie,

$$T_4^2 = \frac{w''(1)}{2!} \cdot 1^{2 \bmod 5} = \frac{w''(1)}{2!} \cdot 1^2 = \frac{w''(1)}{2!} \cdot 1 \cdot 1$$

i dodatkowo trzeba wykonać dwa dzielenia,

$$T_4^3 = \frac{w'''(1)}{3!} \cdot 1^{3 \bmod 5} = \frac{w'''(1)}{3!} \cdot 1^3 = \frac{w'''(1)}{3!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

i trzeba wykonać jeszcze trzy dzielenia,

$$T_4^4 = \frac{w^{(4)}(1)}{4!} \cdot 1^{4 \bmod 5} = \frac{w^{(4)}(1)}{4!} \cdot 1^4 = \frac{w^{(4)}(1)}{4!} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

i dodatkowo trzeba wykonać cztery dzielenia. Ale zgodnie z teorią (zob. wzór z wykładów) dzieleń powinno być $m = 4$. I tyle dzieleń faktycznie należy wykonać, bo

$$1^{2 \bmod 5} = 1^{s(2)},$$
$$1^{3 \bmod 5} = 1^{s(1)},$$
$$1^{4 \bmod 5} = 1^{s(0)},$$

a wszystkie wartości występujące z prawej strony równości zostały już policzone. Są zatem tylko cztery dzielenia. Zauważmy, że liczba mnożeń jest mniejsza niż w przypadku algorytmu Hornera (zob. poprzednie zadanie). Rozważany przypadek algorytm Shaw-Trauba ($q = n + 1$) jest optymalny ze względu na liczbę mnożeń.