

Elementy analizy numerycznej

wykład 13

zadania

str. 89 zad. 1

Zauważmy, że nie trzeba przestawiać wierszy, bo element o maksymalnej wartości w pierwszej kolumnie znajduje się w pierwszym wierszu. Dodajmy do macierzy T wektor przestawień wierszami przestawień:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Korzystając z metody eliminacji Gaussa eliminujemy w pierwszej kolumnie elementy w drugim i trzecim wierszu za pomocą mnożników

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ i } l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Wówczas

$$a'_{21} = a'_{31} = 0$$

oraz

$$a'_{22} = a_{22} - l_{21}a_{12} = 0 - (-1) \cdot 2 = 2,$$

$$a'_{23} = a_{23} - l_{21}a_{13} = 2 - (-1) \cdot 0 = 2,$$

$$a'_{32} = a_{32} - l_{31}a_{12} = -2 - 0 \cdot 2 = -2,$$

$$a'_{33} = a_{33} - l_{31}a_{13} = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Otrzymujemy macierz z wektorem przestawień postaci (w miejscu elementów a'_{21} i a'_{31} wpisujemy mnożniki l_{21} i l_{31})

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Eliminujemy drugi element z trzeciego wiersza (ponownie nie musimy przestawiać wierszy) za pomocą mnożnika

$$l_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Mamy

$$a''_{32} = 0 \text{ i } a''_{33} = a_{33} - l_{32}a'_{32} = 0 - (-1) \cdot 2 = 2$$

i otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right],$$

skąd otrzymujemy

$$L = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad U = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

str. 89 zad. 2

$$\det T = \det(LU) = \det L \cdot \det U = 1 \cdot 8 = 8.$$

str. 89 zad. 3

Dopiszmy do macierzy A wektor przestawień wierszy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{array} \right].$$

W pierwszym kroku nie musimy przestawiać wierszy. Eliminujemy elementy a_{21} i a_{31} za pomocą mnożników

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{i} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} a'_{21} &= a'_{31} = 0, \\ a'_{22} &= a_{22} - l_{21}a_{12} = 2 - 1 \cdot 1 = 1, \\ a'_{23} &= a_{23} - l_{21}a_{13} = 3 - 1 \cdot 1 = 2, \\ a'_{32} &= a_{32} - l_{31}a_{12} = 3 - 1 \cdot 1 = 2, \\ a'_{33} &= a_{33} - l_{31}a_{13} = 6 - 1 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right].$$

Przestawiamy wiersze trzeci i drugi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right].$$

Eliminujemy element a'_{32} za pomocą mnożnika

$$l_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{1}{2}.$$

Otrzymujemy

$$a''_{32} = 0,$$

$$a''_{33} = a'_{33} - l_{32}a'_{23} = 2 - \frac{1}{2} \cdot 5 = -\frac{1}{2}.$$

Mamy zatem końcową macierz i wektor przestawień wierszy w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

czyli

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy równania

$$LUx^{(i)} = e^{(i)} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3.$$

Dla $i = 1$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy najpierw układ z macierzą trójkątną dolną, tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$y_1^{(1)} = 1,$$

$$y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 0 \Rightarrow y_2^{(1)} = -1,$$

$$y_1^{(1)} + \frac{1}{2}y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 0 \Rightarrow y_3^{(1)} = -1 - \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Drugi układ (z macierzą trójkątną górną) ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

skąd

$$-\frac{1}{2}x_3^{(1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_3^{(1)} = 1,$$

$$2x_2^{(1)} + 5x_3^{(1)} = -1 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{-1 - 5 \cdot 1}{2} = -3,$$

$$x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 1 \Rightarrow x_1^{(1)} = 1 - (-3) - 1 = 3.$$

Otrzymaliśmy zatem wektor

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $i = 2$ mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, otrzymujemy wektor

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $i = 3$ mamy do rozwiązania układ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

skąd

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Numer 1 w wektorze przestawień zajmuje pierwszą pozycję, więc jako pierwszą kolumnę macierzy A^{-1} należy przyjąć wektor $x^{(1)}$. Numer 2 zajmuje trzecią pozycję we wspomnianym wektorze, więc drugą kolumną macierzy A^{-1} jest wektor $x^{(3)}$. Zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu sprawdzenia otrzymanego wyniku można wykonać mnożenie

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

str. 95 zad. 1

Szukany wielomian ma postać

$$a_0 + a_1x.$$

Do rozwiązania mamy zatem układ (zob. wykład 13 wzór (7.6))

$$\sum_{i=0}^1 a_i \left(\sum_{j=0}^6 x_j^{i+k} \right) = \sum_{j=0}^6 y_j x_j^k, \quad k = 0, 1,$$

czyli układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi. Uwzględniając dane podane w tabelce mamy

$$\begin{aligned} & a_0(0^0 + 1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 + 6^0) + a_1(0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + 6^1) \\ &= 29 \cdot 0^0 + 28 \cdot 1^0 + 27 \cdot 2^0 + 24 \cdot 3^0 + 21 \cdot 4^0 + 21 \cdot 5^0 + 18 \cdot 6^0, \\ & a_0(0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 + 6^1) + a_1(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \\ &= 29 \cdot 0^1 + 28 \cdot 1^1 + 27 \cdot 2^1 + 24 \cdot 3^1 + 21 \cdot 4^1 + 21 \cdot 5^1 + 18 \cdot 6^1, \end{aligned}$$

czyli (przyjmujemy, że $0^0 = 1$)

$$\begin{aligned} 7a_0 + 22a_1 &= 168, \\ 22a_0 + 91a_1 &= 451. \end{aligned}$$

Otrzymujemy stąd

$$a_0 = \frac{26243}{1071} \approx 24,50, \quad a_1 = -\frac{539}{153} \approx -3,52.$$

Zatem wielomian ma postać

$$24,50 - 3,52x.$$