$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

gdy wielomian $p(x)$ jest podzielny bez reszty przez trójmian kwadratowy $x^2 - rx - q$. W takim przypadku

$$p(x) = p_1(x)(x^2 - rx - q) + Ax + B, \tag{5.10}$$

gdzie stopień wielomianu $p_1(x)$ jest mniejszy lub równy $n - 2$, przy czym wyrażenie $Ax + B$ jest resztą powstałą przy dzieleniu przez trójmian $x^2 - rx - q$.

Współczynniki A i B są zależne od r i q, tj. $A = A(r, q)$ i $B = B(r, q)$. Ponieważ reszta ma być zerem, więc należy rozwiązać równania

$$\begin{aligned} A(r, q) &= 0, \\ B(r, q) &= 0. \end{aligned}$$

Do tego celu stosuje się metodę Newtona:

$$\begin{bmatrix} r^{(i+1)} \\ q^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{(i)} \\ q^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial r} & \dfrac{\partial A}{\partial q} \\ \dfrac{\partial B}{\partial r} & \dfrac{\partial B}{\partial q} \end{bmatrix}_{\substack{r = r^{(i)} \\ q = q^{(i)}}} \begin{bmatrix} A(r^{(i)}, q^{(i)}) \\ B(r^{(i)}, q^{(i)}) \end{bmatrix}.$$

Aby można było zastosować metodę Newtona, należy najpierw obliczyć pochodne cząstkowe oraz wartości A i B. Różniczkując wzór (5.10) względem r i q mamy

$$0 \equiv \frac{\partial p(x)}{\partial r} = (x^2 - rx - q)\frac{\partial p_1(x)}{\partial r} - xp_1(x) + \frac{\partial A}{\partial r}x + \frac{\partial B}{\partial r}, \tag{5.11}$$

$$0 \equiv \frac{\partial p(x)}{\partial q} = (x^2 - rx - q)\frac{\partial p_1(x)}{\partial q} - p_1(x) + \frac{\partial A}{\partial q}x + \frac{\partial B}{\partial q}. \tag{5.12}$$

Dzieląc wielomian $p_1(x)$ przez trójmian $x^2 - rx - q$ otrzymujemy

$$p_1(x) = p_2(x)(x^2 - rx - q) + A_1 x + B_1. \tag{5.13}$$

Zakładając, że równanie $x^2 - rx - q = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2, mamy

$$p_1(x_i) = A_1 x_i + B_1, \quad i = 1, 2.$$

Zatem z równań (5.11) i (5.12) wynika, że

$$-x_i(A_1 x_i + B_1) + \frac{\partial A}{\partial r}x_i + \frac{\partial B}{\partial r} = 0,$$

$$-(A_1 x_i + B_1) + \frac{\partial A}{\partial q}x_i + \frac{\partial B}{\partial q} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ponieważ $x_1 \neq x_2$, więc z drugiego równania otrzymujemy

$$\frac{\partial A}{\partial q} = A_1, \quad \frac{\partial B}{\partial q} = B_1 \tag{5.14}$$

i po podstawieniu do pierwszego równania mamy

$$-x_i^2\frac{\partial A}{\partial q}+x_i\left(\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)+\frac{\partial B}{\partial r}=0,\quad i=1,2.$$

Ale

$$x_i^2=rx_i+q,$$

więc mamy

$$x_i\left(\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial q}r\right)+\frac{\partial B}{\partial r}-\frac{\partial A}{\partial q}q=0,\quad i=1,2$$

i z uwagi na fakt, że $x_1 \neq x_2$ otrzymujemy

$$\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{\partial B}{\partial q}-\frac{\partial A}{\partial q}r=0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial r}-\frac{\partial A}{\partial q}q=0.$$

Uwzględniając w powyższych równaniach zależności (5.14) dostajemy

$$\frac{\partial A}{\partial r}=rA_1+B_1,\quad \frac{\partial B}{\partial r}=qA_1. \tag{5.15}$$

Z równań (5.14) i (5.15) możemy wyznaczyć pochodne cząstkowe występujące w procesie iteracyjnym, o ile znane będą wielkości A_1 i B_1.

Wielkości A_1 i B_1 wyznacza się w podobny sposób, jak wielkości A i B. Jeśli współczynniki wielomianu $p_1(x)$ oznaczymy przez b_i ($i = 0, 1, \ldots, n - 2$), tj.

$$p_1(x)=b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots+b_{n-2},$$

To przez porównanie współczynników przy tych samych potęgach x z lewej i prawej strony wzoru (5.10) otrzymamy

$$\begin{aligned} b_0&=a_0,\\ b_1&=b_0r+a_1,\\ b_i&=b_{i-2}q+b_{i-1}r+a_i,\quad i=2,3,\ldots,n-2,\\ A&=b_{n-3}q+b_{n-2}r+a_{n-1},\\ B&=b_{n-2}q+a_n. \end{aligned}$$

Z kolei oznaczając współczynniki wielomianu $p_2(x)$ przez c_i ($i = 0, 1, \ldots, n - 4$), tj.

$$p_2(x)=c_0x^{n-4}+c_1x^{n-5}+\ldots+c_{n-4},$$

przez porównanie współczynników w równaniu (5.13) dostajemy

$$\begin{aligned} c_0&=b_0,\\ c_1&=c_0r+b_1,\\ c_i&=c_{i-2}q+c_{i-1}r+b_i,\quad i=2,3,\ldots,n-4, \end{aligned}$$

$$A_1 = c_{n-5}q + c_{n-4}r + b_{n-3},$$
$$B_1 = c_{n-4}q + b_{n-2}.$$

Do określenia liczby i położenia rzeczywistych pierwiastków wielomianu $p(x)$ wykorzystuje się w pojęcie ciągu Sturma.

Definicja 5.3. Ciąg

$$p(x) = p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$$

wielomianów rzeczywistych nazywamy *ciągiem Sturma*, jeśli

a) wielomian $p_0(x)$ stopnia n ma tylko pojedyncze pierwiastki,

b) $\operatorname{sign} p_1(\xi) = -\operatorname{sign} p_0'(\xi)$ dla wszystkich rzeczywistych pierwiastków ξ wielomianu $p_0(x)$,

c) dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$ mamy

$$p_{i+1}(\xi)p_{i-1}(\xi) < 0,$$

gdzie ξ oznacza pierwiastek rzeczywisty wielomianu $p_i(x)$,

d) ostatni wielomian $p_n(x)$ nie zmienia swojego znaku.

Twierdzenie 5.2. *Liczba rzeczywistych pierwiastków wielomianu $p(x) \equiv p_0(x)$ w przedziale $[a, b)$ jest równa $w(b) - w(a)$, gdzie $w(x)$ oznacza liczbę zmian znaku w punkcie x w ciągu Sturma $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$.*

Przed udowodnieniem tego twierdzenia, zwanego twierdzeniem Sturma, podamy sposób konstrukcji ciągu Sturma. Z definicji 5.3 mamy $p_0(x) = p(x)$. Podstawiamy

$$p_1(x) \overset{df}{=} -p_0'(x) = -p'(x)$$

i pozostałe wielomiany $p_i(x)$ tworzymy za pomocą wzoru

$$p_{i-1}(x) = q_i(x)p_i(x) - c_i p_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots, \tag{5.16}$$

gdzie $q_i(x)$ oznacza iloraz z dzielenia wielomianu $p_{i-1}(x)$ przez wielomian $p_i(x)$, a wielkości c_i mogą być dowolnymi stałymi dodatnimi. Innymi słowy: kolejny wielomian w ciągu Sturma jest resztą z dzielenia dwóch poprzednich wielomianów wziętą ze znakiem „−" (minus) i pomnożoną przez dowolną stałą dodatnią. Mamy przy tym:

$$\text{stopień } p_i(x) > \text{stopień } p_{i+1}(x).$$

Ponieważ stopień wielomianu $p_i(x)$ zmniejsza się wraz ze wzrostem i, więc po n krokach, gdzie n oznacza stopień wielomianu $p_0(x)$, mamy

$$p_{n-1}(x) = q_n(x)p_n(x) \text{ i } p_n(x) \neq 0.$$

Wielomian $p_n(x)$ jest więc „największą częścią wspólną" wielomianów $p(x)$ i $p'(x)$. Jeśli wielomian $p(x)$ ma tylko pojedyncze pierwiastki, to wielomian $p_n(x)$ musi być stałą różną od 0, a więc jest spełniony warunek d) definicji 5.3.

Jeśli $p_i(\xi) = 0$, gdzie ξ oznacza pierwiastek wielomianu $p_0(x)$, to z równania (5.16) otrzymujemy

$$p_{i-1}(\xi) = -c_i p_{i+1}(\xi)$$

i jeśli $p_{i+1}(\xi) = 0$, to z równania (5.16) wynikałoby, że $p_{i+1}(\xi) = \ldots = p_n(\xi) = 0$, w sprzeczności z tym, że wielomian $p_n(x)$ jest stałą różną od 0. Widać zatem, że spełniony jest też punkt c) definicji 5.3.

Udowodnimy teraz twierdzenie 5.2.

Dowód. Zbadamy, jak zmienia się liczba zmian znaku $w(a)$ w ciągu

$$p_0(a), p_1(a), \ldots, p_n(a)$$

wraz ze wzrostem wartości a. Dopóki wartość a jest różna od 0, dla żadnego z wielomianów $p_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ wartość $w(a)$ nie zmienia się. Dla pierwiastka a wielomianu $p_i(x)$ należy rozpatrzyć dwa przypadki:

a) $p_i(a) = 0, \ i \neq 0$,
b) $p_0(a) = 0$.

W przypadku a), z uwagi na punkty c) i d) definicji 5.3, mamy $p_{i+1}(a) \neq 0, p_{i-1}(a) \neq 0$ oraz $i \neq n$. Dla dostatecznie małego $h > 0$ znaki wartości $p_j(a)$ $(j = i-1, i, i+1)$ zachowują się tak, jak pokazano w jednej z poniższych tabelek.

	$a-h$	a	$a+h$	$a-h$	a	$a+h$	$a-h$	a	$a+h$	$a-h$	a	$a+h$
$i-1$	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+
i	−	0	+	−	0	+	+	0	−	+	0	−
$i+1$	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	−

W każdym z tych przypadków $w(a-h) = w(a) = w(a+h)$, czyli liczba zmian znaku nie zmienia się.

W przypadku b) z punktu a) i b) definicji 5.3 mamy:

i	$a-h$	a	$a+h$	$a-h$	a	$a+h$
0	−	0	+	+	0	−
1	−	−	−	+	+	+

Za każdym razem $w(a-h) = w(a) = w(a+h) - 1$ i przy przejściu przez pierwiastek a wielomianu $p_0(x) \equiv p(x)$ otrzymujemy jedną zmianę znaku. Dla $a < b$ różnica

$$w(b) - w(a) = w(b-h) - w(a-h),$$

gdzie $h > 0$ oznacza wielkość dostatecznie małą, podaje liczbę pierwiastków wielomianu $p(x)$ w przedziale $a - h < x < b - h$, tzn. pierwiastków w przedziale $a \le x < b$, bo wielkość $h > 0$ może być dowolnie małą. ■

Przykład 5.1

Zastosujmy twierdzenie 5.2 do określenia liczby pierwiastków wielomianu

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 5$$

w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $[0, \infty)$. Mamy

$$p_0(x) \equiv p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 5,$$
$$p_1(x) = -p_0'(x) = -3x^2 + 4x + 5.$$

W celu określenia wielomianu $p_2(x)$ dzielimy wielomian $p_0(x)$ przez $p_1(x)$:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 5):(-3x^2 + 4x + 5) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

$$-x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{3}x$$

$$------------$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x - \frac{10}{9}$$

$$----------$$

$$= -\frac{38}{9}x + \frac{35}{9}$$

Zgodnie z wzorem (5.16), wielomian $p_2(x)$ jest resztą z dzielenia wziętą ze znakiem „−" (minus). Resztę tę możemy pomnożyć przez dowolną stałą dodatnią. Zatem

$$p_2(x) = 38x - 35.$$

Aby otrzymać wielomian $p_3(x)$, dzielimy wielomian $p_1(x)$ przez $p_2(x)$:

$$(-3x^2 + 4x + 5):(38x - 35) = -\frac{3}{38}x + \frac{47}{1444}$$

$$3x^2 - \frac{105}{38}x$$

$$----------$$

$$= \frac{47}{38}x + 5$$

$$-\frac{47}{38}x + \frac{1645}{1444}$$

$$--------$$

$$= \frac{8865}{1444}$$

Możemy przyjąć $p_3(x) = -1$ (reszta ze znakiem „−" jest stałą ujemną, którą możemy podzielić przez 8865/1444).

Do przeanalizowania liczby zmian znaków w ciągu Sturma $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ wygodnie jest skonstruować następującą tabelkę:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$p_0(x)$	$-$	$+$	$+$
$p_1(x)$	$-$	$+$	$-$
$p_2(x)$	$-$	$-$	$+$
$p_3(x)$	$-$	$-$	$-$
$w(x)$	0	1	3

W ostatnim wierszu tabelki są wpisane liczby zmian znaku w ciągu Sturma. Na podstawie tych danych otrzymujemy, że liczba rzeczywistych pierwiastków wielomianu $p(x)$ w przedziale $(-\infty, 0)$ wynosi $w(0) - w(-\infty) = 1 - 0 = 1$, a w przedziale $[0, +\infty)$ pierwiastków jest $w(+\infty) - w(0) = 3 - 1 = 2$. ∎

Zadania

1. Równanie $x^2 - 2 = 0$ ma pierwiastki $x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}414214$. Ile iteracji należy wykonać w metodzie połowienia, aby startując z przedziału [1, 2] obliczyć pierwiastek z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych? Jaki jest maksymalny błąd po tej liczbie iteracji?

2. Pokazać, że równanie
$$\sin x + x - 1 = 0$$
ma pierwiastek w przedziale [0, 1]. Ile iteracji trzeba wykonać, aby metodą połowienia otrzymać przybliżoną wartość pierwiastka z błędem nie przekraczającym $0{,}5 \cdot 10^{-4}$?

3. Ile iteracji należy wykonać, aby metodą połowienia znaleźć pierwiastek równania
$$x^3 - x - 1 = 0$$
z dokładnością 10^{-4}, który leży w przedziale [1, 2]?

4. Stosując metodę *regula falsi* znaleźć z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych pierwiastek równania
$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$
leżący w przedziale [1, 2].

5. Zastosować metodę Newtona do obliczenia z dokładnością 10^{-2} pierwiastka równania z zadania 4 przyjmując $x^{(0)} = 2$.

6. Stosując metodę Newtona do równania
$$x^n - c = 0$$
wyprowadzić wzór na obliczanie pierwiastka n-tego stopnia z liczby dodatniej c.

7. Odwrotność liczby n można obliczyć za pomocą wzoru iteracyjnego
$$x^{(i+1)} = x^{(i)}(2 - nx^{(i)}).$$

Wyprowadzić ten wzór stosując metodę Newtona do funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} - n.$$

8. Zastosować twierdzenie Sturma do określenia liczby pierwiastków rzeczywistych wielomianu

$$x^3 + x^2 - x - 1$$

w przedziale $[-2, 2)$.

9. Ile pierwiastków rzeczywistych ma wielomian

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4\,?$$

10. Wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych wielomianu

$$x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 25$$

większych od 1.

11. Ile pierwiastków rzeczywistych ma wielomian

$$x^3 - x^2 - x - 1\,?$$