Elementy analizy numerycznej

wykład 12

zadania

str. 85 zad. 8
Konstruujemy ciąg Sturma przyjmując

$$p_0(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Wielomian $p_1(x)$ jest określony następująco:

$$p_1(x) = -p_0'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

W celu wyznaczenia wielomianu $p_2(x)$ dzielimy wielomian $p_0(x)$ przez $p_1(x)$. Mamy

$$(x^3 + x^2 - x - 1):(3x^2 + 2x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$- x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$\text{-----------}$$

$$= \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$- \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}$$

$$\text{-----------}$$

$$= \quad -\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}$$

Wielomian $p_2(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $p_0(x)$ przez $p_1(x)$ wziętą ze znakiem minus pomnożoną przez dowolną stałą dodatnią. Aby pozbyć się ułamków, jest wygodnie otrzymaną resztę pomnożyć przez 9/8. Wówczas otrzymamy

$$p_2(x) = x + 1.$$

W celu wyznaczenia wielomianu $p_3(x)$ dzielimy wielomian $p_1(x)$ przez $p_2(x)$. Otrzymujemy

$$(3x^2 + 2x - 1):(x+1) = 3x - 1$$
$$-3x^2 - 3x$$
$$- - - - - - -$$
$$= \quad -x - 1$$
$$x + 1$$
$$- - - - - - -$$
$$0$$

Okazuje się, że ostatni wielomian jest stałą równą 0 (powinien być stałą różną od zera). Fakt ten świadczy, że dany wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek podwójny. Jest on pierwiastkiem poprzedniego wielomianu, czyli wielomianu $p_2(x)$. Pierwiastkiem tym jest oczywiście -1. W celu jego wyeliminowania dzielimy dany wielomian przez $x + 1$. Mamy

$$(x^3 + x^2 - x - 1):(x+1) = x^2 - 1$$
$$-x^3 - x^2$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$= \quad -x - 1$$
$$x + 1$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$0$$

Otrzymany wielomian przyjmujemy za nowy „zerowy” wielomian w ciągu Sturma, tzn.

$$\hat{p}_0(x) = x^2 - 1$$

i dalej dla tego wielomianu konstruujemy ten ciąg. Mamy

$$\hat{p}_1(x) = -\hat{p}_0(x) = -2x,$$

a po podzieleniu wielomianu $\hat{p}_0(x)$ przez $\hat{p}_1(x)$, czyli

$$(x^2 - 1):(-2x) = -\frac{1}{2}x$$
$$-x^2$$
$$- - - - -$$
$$= \quad -1$$

otrzymujemy wielomian

$$\hat{p}_2(x) = 1$$

(reszta z dzielenia wzięta ze znakiem minus). Dla otrzymanego nowego ciągu Sturma badamy zmiany znaków w punktach -2 i 2. W tym celu konstruujemy tabelkę

	-2	2
$\hat{p}_0(x) = x^2 - 1$	$+$	$+$
$\hat{p}_1(x) = -2x$	$+$	$-$
$\hat{p}_3(x) = 1$	$+$	$+$
zmiany znaków	0	2

Różnica liczby zmian znaków w punktach 2 i -2, czyli $2 - 0 = 2$, jest liczbą pierwiastków wielomianu $\hat{p}_0(x)$ w przedziale $[-2, 2)$. Zatem dany wielomian $p_0(x)$ ma w tym przedziale dwa pierwiastki rzeczywiste, w tym jeden podwójny.

str. 85 zad. 9

Liczba pierwiastków rzeczywistych, to liczba takich pierwiastków w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Dla danego wielomianu konstruujemy ciąg Sturma. Mamy

$$p_0(x) = x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4,$$
$$p_1(x) = -p_0'(x) = -6x^5 - 20x^4 - 16x^3 + 2x + 4.$$

W celu wyznaczenia wielomianu $p_2(x)$ dzielimy wielomian $p_0(x)$ przez $p_1(x)$. Działania są następujące:

$$(x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4):(-6x^5 - 20x^4 - 16x^3 + 2x + 4) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}$$

$$-x^6 - \frac{10}{3}x^5 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$= \quad \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 4$$

$$-\frac{2}{3}x^5 - \frac{20}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 + \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}$$

$$= \quad -\frac{8}{9}x^4 - \frac{16}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{28}{9}x - \frac{32}{9}$$

Otrzymaną resztę „bierzemy” ze znakiem minus i mnożymy przez 9/2. Otrzymujemy

$$p_2(x) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 14x + 16.$$

Dzielimy wielomian $p_1(x)$ przez $p_2(x)$:

$$
\begin{array}{l}
(-6x^5 - 20x^4 - 16x^3 + 2x + 4) : (4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 14x + 16) = -\frac{3}{2}x - 2 \\
\quad 6x^5 + 12x^4 + \frac{9}{2}x^3 + 21x^2 + 24x \\
\hline
\quad = \quad -8x^4 - \frac{23}{2}x^3 + 21x^2 + 26x + 4 \\
\qquad\qquad 8x^4 + 16x^3 + 6x^2 + 28x + 32 \\
\hline
\qquad\quad = \quad \frac{9}{2}x^3 + 27x^2 + 54x + 36
\end{array}
$$

Stąd (reszta ze znakiem minus pomnożona przez 2/9)

$$p_3(x) = -x^3 - 6x^2 - 12x - 8.$$

Następnie dzielimy wielomian $p_2(x)$ przez $p_3(x)$:

$$
\begin{array}{l}
(4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 14x + 16) : (-x^3 - 6x^2 - 12x - 8) = -4x + 16 \\
-4x^4 - 24x^3 - 48x^2 - 32x \\
\hline
\quad = \quad -16x^3 - 45x^2 - 18x + 16 \\
\qquad\quad 16x^3 + 96x^2 + 192x + 128 \\
\hline
\qquad\quad = \qquad 51x^2 + 174x + 144
\end{array}
$$

Biorąc resztę ze znakiem minus po podzieleniu przez 3 otrzymujemy

$$p_4(x) = -17x^2 - 58x - 48.$$

Dzielimy wielomian $p_3(x)$ przez $p_4(x)$. Mamy

$$(-x^3-6x^2-12x-8):(-17x^2-58x-48)=\frac{1}{17}x+\frac{44}{289}$$

$$x^3+\frac{58}{17}x^2+\frac{48}{17}x$$

$$-----------------$$

$$=\quad -\frac{44}{17}x^2-\frac{156}{17}x-8$$

$$\frac{44}{17}x^2+\frac{2552}{289}x+\frac{2112}{289}$$

$$-----------------$$

$$=\quad -\frac{100}{289}x-\frac{200}{289}$$

Zatem (otrzymaną resztę „bierzemy" ze znakiem minus i mnożymy przez 289/100)

$$p_5(x)=x+2.$$

Ostatnim dzieleniem jest podzielenie wielomianu $p_4(x)$ przez $p_5(x)$. Działania są następujące:

$$(-17x^2-58x-48):(x+2)=-17x-24$$

$$17x^2+34x$$

$$-----------$$

$$=\quad -24x-48$$

$$24x+48$$

$$-----------$$

$$0$$

Otrzymaliśmy resztę równą 0, a więc pierwiastek wielomiany $p_5(x)$, czyli -2, jest pierwiastkiem podwójnym danego wielomianu stopnia szóstego. Dzieląc ten wielomian przez $x+2$ otrzymujemy nowy zerowy wielomian

$$\hat{p}_0(x)=x^5+2x^4-x-2$$

i konstruujemy dla niego ciąg Sturma. Mamy

$$\hat{p}_1(x)=-\hat{p}_0(x)=-5x^4-8x^3+1.$$

Dzielenie wielomianu $\hat{p}_0(x)$ przez $\hat{p}_1(x)$, czyli

$$(x^5+2x^4-x-2):(-5x^4-8x^3+1)=-\frac{1}{5}x-\frac{2}{25}$$

$$-x^5-\frac{8}{5}x^4+\frac{1}{5}x$$

$$-----------$$

$$=\quad \frac{2}{5}x^4-\frac{4}{5}x-2$$

$$-\frac{2}{5}x^4-\frac{16}{25}x^3+\frac{2}{25}$$

$$----------------$$

$$=\;-\frac{16}{25}x^3-\frac{4}{5}x-\frac{48}{25}$$

pozwala nam określić następny wielomian. Mamy (po rozważeniu reszty ze znakiem minus i pomnożeniu jej przez 25/4)

$$\hat{p}_2(x)=4x^3+5x+12.$$

Dzielimy wielomian $\hat{p}_1(x)$ przez $\hat{p}_2(x)$:

$$(-5x^4-8x^3+1):(4x^3+5x+12)=-\frac{5}{4}x-2$$

$$5x^4+\frac{25}{4}x^2+15x$$

$$----------------$$

$$=\quad -8x^3+\frac{25}{4}x^2+15x+1$$

$$8x^3+10x+24$$

$$----------------$$

$$=\quad \frac{25}{4}x^2+25x+25$$

Zatem (reszta ze znakiem minus pomnożona przez 4/25)

$$\hat{p}_3(x)=-x^2-4x-4.$$

Kolejnym dzieleniem jest podzielenie wielomianu $\hat{p}_2(x)$ przez $\hat{p}_3(x)$:

$$(4x^3 + 5x + 12):(-x^2 - 4x - 4) = -4x + 16$$

$$-4x^3 - 16x^2 - 16x$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$= -16x^2 - 11x + 12$$

$$16x^2 + 64x + 64$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$= \quad 53x + 76$$

Stąd

$$\hat{p}_4(x) = -53x - 76.$$

Ostatnim dzieleniem jest podzielenie wielomianu $\hat{p}_3(x)$ przez $\hat{p}_4(x)$. Otrzymujemy

$$(-x^2 - 4x - 4):(-53x - 76) = \frac{1}{53}x + \frac{136}{2809}$$

$$x^2 + \frac{76}{53}x$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$= \quad -\frac{136}{53}x - 4$$

$$\frac{136}{53}x + \frac{10336}{2809}$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$= \quad -900$$

Ponieważ reszta jest stałą ujemną, więc wielomian $\hat{p}_5(x)$ będzie stałą dodatnią. Możemy zatem przyjąć

$$\hat{p}_5(x) = 1.$$

W celu zbadania w otrzymanym ciągu Sturma znaków oraz liczby ich zmian w $-\infty$ i $+\infty$ tworzymy następującą tabelkę:

	$-\infty$	$+\infty$
$\hat{p}_0(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$	$-$	$+$
$\hat{p}_1(x) = -5x^4 - 8x^3 + 1$	$-$	$-$
$\hat{p}_2(x) = 4x^3 + 5x + 12$	$-$	$+$
$\hat{p}_3(x) = -x^2 - 4x - 4$	$-$	$-$
$\hat{p}_4(x) = -53x - 76$	$+$	$-$
$\hat{p}_5(x) = 1$	$+$	$+$
zmiany znaków	1	4

Różnica liczby zmian znaków wynosi $4 - 1 = 3$, co oznacza, że wielomian $\hat{p}_0(x)$ ma w przedziale $(-\infty, +\infty)$ trzy różne pierwiastki rzeczywiste. Zatem dany wielomian $p_0(x)$ (stopnia szóstego) ma w tym przedziale także trzy pierwiastki rzeczywiste, w tym jeden podwójny. Można sprawdzić, że pierwiastkami tymi są -2 (pierwiastek podwójny), -1 i 1.

str. 85 zad. 10

Należy wyznaczyć liczbę pierwiastków rzeczywistych w przedziale $(1, +\infty)$ (przedział lewostronnie otwarty). Konstruujemy ciąg Sturma. Mamy

$$p_0(x) = x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 25,$$

$$p_1(x) = -p_0'(x) = -4x^3 + 30x^2 - 68x + 50.$$

$p_0(x) \,/\, p_1(x)$:

$$(x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 125) : (-4x^3 + 30x^2 - 68x + 50) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}$$

$$-x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 17x^2 + \frac{25}{2}x$$

$$-------------------$$

$$= \ -\frac{5}{2}x^3 + 17x^2 - \frac{75}{2}x + 125$$

$$\frac{5}{2}x^3 - \frac{75}{4}x^2 + \frac{85}{2}x - \frac{125}{4}$$

$$-------------------$$

$$= \quad -\frac{7}{4}x^2 + 5x - \frac{25}{4}$$

Stąd („bierzemy” resztę ze znakiem minus i mnożymy ją przez 4)

$$p_2(x) = 7x^2 - 20x + 25.$$

$p_1(x) \,/\, p_2(x)$:

$$(-4x^3 + 30x^2 - 68x + 50):(7x^2 - 20x + 25) = -\frac{4}{7}x + \frac{130}{49}$$

$$4x^3 - \frac{80}{7}x^2 + \frac{100}{7}x$$

$$-------------$$

$$= \quad \frac{130}{7}x^2 - \frac{376}{7}x + 50$$

$$-\frac{130}{7}x^2 + \frac{2600}{49}x - \frac{3250}{49}$$

$$----------------$$

$$= \qquad -\frac{32}{49}x - \frac{800}{49}$$

Po pomnożeniu reszty przez 49/32 i wzięciu jej ze znakiem przeciwnym otrzymujemy

$$p_3(x) = x + 25.$$

$p_2(x) \,/\, p_3(x)$:

$$(7x^2 - 20x + 25):(x + 25) = 7x - 195$$

$$-7x^2 - 175x$$

$$----------$$

$$= \quad -195x + 25$$

$$195x + 4875$$

$$-----------$$

$$= \quad 4900$$

Zatem

$$p_4(x) = -1.$$

Tabelka zmian znaków ma postać

	1	$+\infty$
$p_0(x) = x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 50x + 25$	0	+
$p_1(x) = -4x^3 + 30x^2 - 68x + 50$	+	−
$p_2(x) = 7x^2 - 20x + 25$	+	+
$p_3(x) = x + 25$	+	+
$p_4(x) = -1$	−	−
zmiany znaków	1	3

Zatem w przedziale $[1, +\infty)$ wielomian ma $3 - 1 = 2$ pierwiastki rzeczywiste. Ponieważ dany wielomian ma m. in. pierwiastek równy 1, więc większy od 1 jest tylko jeden pierwiastek.