Elementy analizy numerycznej

wykład 1

zadania (obliczenia na przedziałach)

1. Obliczyć

a) $[-1, 0] + [0, \pi]$

Korzystamy z definicji dodawania przedziałów:

$$[x] + [y] = [\underline{x}, \overline{x}] + [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}].$$

Mamy:

$$[-1, 0] + [0, \pi] = [-1 + 0, 0 + \pi] = [-1, \pi].$$

b) $[1, 4] - [1, 4]$

Korzystamy z definicji odejmowania przedziałów:

$$[x] - [y] = [\underline{x}, \overline{x}] - [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}].$$

Otrzymujemy:

$$[1, 4] - [1, 4] = [1 - 4, 4 - 1] = [-3, 3].$$

Zauważmy, że odjęcie przedziału od siebie nie daje wartości 0, lecz przedział zawierający liczbę 0.

c) $\left[\frac{1}{2}, 1\right] - \left[0, \frac{1}{6}\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, 1 - 0\right] = \left[\frac{2}{6}, 1\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$

d) $[2, 4] - 3$

Liczba 3 to przedział punktowy [3, 3]. Mamy więc:

$$[2, 4] - 3 = [2, 4] - [3, 3] = [2 - 3, 4 - 3] = [-1, 1].$$

e) $3 - [2,4] = [3, 3] - [2, 4] = [3 - 4, 3 - 2] = [-1, 1].$

f) $-1 \cdot [2, 5]$

Liczbę -1 traktujemy jako przedział punktowy $[-1, -1]$ o korzystamy z definicji mnożenia przedziałów:

$$[x] \cdot [y] = [\underline{x}, \overline{x}] \cdot [\underline{y}, \overline{y}]$$
$$= [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\}].$$

Otrzymujemy:

$$-1 \cdot [2, 5] = [-1, -1] \cdot [2, 5] = [\min\{-1 \cdot 2, -1 \cdot 5\}, \max\{-1 \cdot 2, -1 \cdot 5\}]$$
$$= [\min\{-2, -5\}, \max\{-2, -5\}] = [-5, -2].$$

g) $[-2,3]\cdot[-2,3]=[\min\{-2\cdot(-2),-2\cdot 3,3\cdot(-2),3\cdot 3\},$
$$\max\{-2\cdot(-2),-2\cdot 3,3\cdot(-2),3\cdot 3\}]$$
$$=[\min\{4,-6,9\},\max\{4,-6,9\}]=[-6,9].$$

Zauważmy, że podniesienie przedziału $[-2,3]$ do kwadratu daje inny przedział. Zgodnie z definicją kwadratu przedziału

$$[x]^2=\left[\langle [x]\rangle^2,\left|[x]\right|^2\right],$$

gdzie

$$\langle [x]\rangle=\min\left\{|x|:x\in[x]=[\underline{x},\overline{x}]\right\},$$
$$\left|[x]\right|=\max\left\{|x|:x\in[x]=[\underline{x},\overline{x}]\right\}=\max\{|\underline{x}|,|\overline{x}|\},$$

mamy bowiem

$$[-2,3]^2=\left[\left(\min\left\{|x|:x\in[-2,3]\right\}\right)^2,\left(\max\left\{|x|:x\in[-2,3]\right\}\right)^2\right]=[0,9].$$

Uwaga: Liczby $\left|[x]\right|$ nie należy mylić z wartością bezwzględna przedziału $[x]$, która jest elementarną funkcją przedziałową określoną następująco:

$$\mathrm{abs}([x])=\left[\langle [x]\rangle,\left|[x]\right|\right].$$

h) $[1,\sqrt{2}]\cdot[-1,1]=[\min\{1\cdot(-1),1\cdot 1,\sqrt{2}\cdot(-1),\sqrt{2}\cdot 1\},$
$$\max\{1\cdot(-1),1\cdot 1,\sqrt{2}\cdot(-1),\sqrt{2}\cdot 1\}]$$
$$=[\min\{-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\},\max\{-1,1,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}]=[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

i) $[1,2]/[-2,-1]$

Korzystamy z definicji dzielenia przedziałów:

$$[x]/[y]=[\underline{x},\overline{x}]/[\underline{y},\overline{y}]=[\underline{x},\overline{x}]\cdot\left[\frac{1}{\overline{y}},\frac{1}{\underline{y}}\right],\quad 0\notin[y].$$

Mamy:

$$[1,2]/[-2,-1]=[1,2]\cdot\left[\frac{1}{-1},\frac{1}{-2}\right]=[1,2]\cdot\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$$
$$=\left[\min\left\{1\cdot(-1),1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),2\cdot(-1),2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\},\right.$$
$$\left.\max\left\{1\cdot(-1),1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),2\cdot(-1),2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\left[\min\left\{-1,-\frac{1}{2},-2\right\},\max\left\{-1,-\frac{1}{2},-2\right\}\right]=\left[-2,-\frac{1}{2}\right].$$

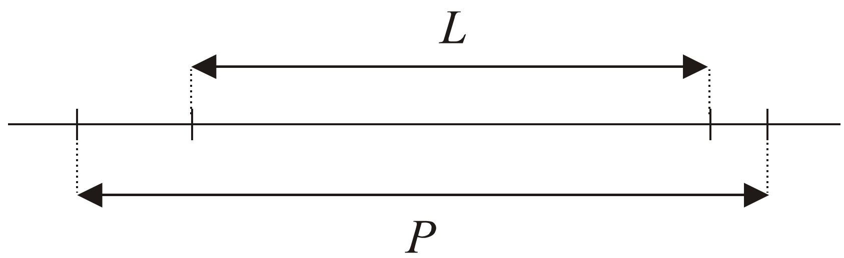
j) $[1, 2]/[-2, 1]$

Przedział, przez który ma zostać wykonane dzielenie zawiera 0. Działanie nie jest więc określone.

2. Znaleźć przykłady przedziałów $[x]$, $[y]$ i $[z]$, dla których w relacji

$$[x]([y]+[z]) \subseteq [x][y]+[x][z] \qquad (*)$$

zachodzi zawieranie właściwe, tzn. przedział lewostronny leży całkowicie we wnętrzu przedziału prawostronnego (przedziały takie nie mogą mieć wspólnych końców). Jeżeli przedział lewostronny oznaczymy przez L, a prawostronny przez P, to położenie przedziałów powinno być takie, jak na poniższym rysunku.



Przedziałami takimi mogą być

$$[x]=[1, 2], \quad [y]=[2, 3], \quad [z]=[-4, -3].$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned}
L &= [1, 2]([2, 3]+[-4, -3]) = [1, 2][-2, 0] \\
&= [\min\{1\cdot(-2), 1\cdot 0, 2\cdot(-2), 2\cdot 0\}, \max\{1\cdot(-2), 1\cdot 0, 2\cdot(-2), 2\cdot 0\}] \\
&= [\min\{-2, 0, -4\}, \max\{-2, 0, -4\}] = [-4, 0], \\
P &= [1, 2][2, 3]+[1, 2][-4, -3] \\
&= [\min\{1\cdot 2, 1\cdot 3, 2\cdot 2, 2\cdot 3\}, \max\{1\cdot 2, 1\cdot 3, 2\cdot 2, 2\cdot 3\}] \\
&\quad + [\min\{1\cdot(-4), 1\cdot(-3), 2\cdot(-4), 2\cdot(-3)\}, \max\{1\cdot(-4), 1\cdot(-3), 2\cdot(-4), 2\cdot(-3)\}] \\
&= [\min\{2, 3, 4, 6\}, \max\{2, 3, 4, 6\}] + [\min\{-4, -3, -8, -6\}, \max\{-4, -3, -8, -6\}] \\
&= [2, 6]+[-8, -3] = [-6, 3]
\end{aligned}$$

i widzimy, że przedział L leży całkowicie we wnętrzu przedziału P.

Ciekawostka: Jeśli wybierzemy dwa przedziały o obu końcach dodatnich i trzeci o obu końcach ujemnych lub dwa przedziały o obu końcach ujemnych i trzeci i obu końcach dodatnich, to relacja (*) zawsze będzie zwieraniem właściwym. Nie wyczerpuje to jednak wszystkich możliwych przypadków.

3. Podać przykład przedziału, dla którego

$$[x]^2 \subset [x]\cdot[x]. \qquad (**)$$

Jeden przykład został podany na wykładzie. Inny przykład podano w zad. 1 g) dla przedziału $[-2, 3]$, dla którego $[-2, 3]^2 = [0, 9]$, a $[-2, 3]\cdot[-2, 3] = [-6, 9]$.

Jeśli jeden koniec przedziału jest ujemny, a drugi dodatni, to zawsze zachodzi relacja (**).

4. Na przykładzie trzech, matematycznie równoważnych, zapisów funkcji f zmiennej rzeczywistej x:

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}}^{f^{(1)}(x)} = \overbrace{\frac{4}{4 - x \cdot x}}^{f^{(2)}(x)} = \overbrace{\frac{4}{4-x^2}}^{f^{(3)}(x)}, \quad |x| < 2$$

i przedziału

$$[x] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

pokazać, że jej rozszerzenia przedziałowe mogą być różne. Jaka jest wartość funkcji przedziałowej odpowiadającej danej funkcji rzeczywistej dla podanego przedziału?

Rozważmy najpierw dla podanego przedziału wartość funkcji przedziałowej. Definicja takiej funkcji (odpowiadającej danej funkcji zmiennej rzeczywistej) jest następująca:

$$f([x]) = \bigcup_{x \in [x]} f(x).$$

Ponieważ funkcja f jest symetryczna, więc zakres jej wartości dla $x \in (-2, 2)$ jest dany wzorem

$$f([x]) = [f(<[x]>), f(|[x]|)].$$

Dla przedziału $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ mamy

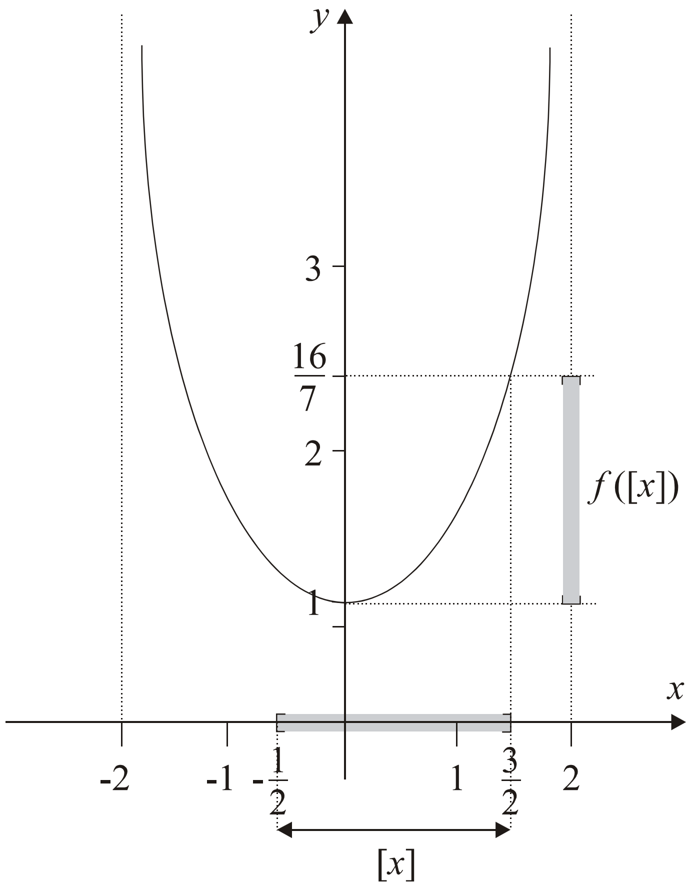
$$f(\langle [x] \rangle) = f\left(\min\left\{|x| : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\}\right) = f(0) = 1,$$

$$f(|[x]|) = f\left(\max\left\{|x| : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{4 - \frac{9}{4}} = \frac{4}{\frac{7}{4}} = \frac{16}{7}.$$

Zatem

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[1, \frac{16}{7}\right].$$

Wykres funkcji $f(x)$ oraz otrzymany przedział przedstawiono na rysunku.



Dla pierwszego zapisu funkcji zmiennej rzeczywistej jej rozszerzenie przedziałowe jest następujące:

$$f_{[\,]}^{(1)}([x]) = \frac{1}{2-[x]} + \frac{1}{2+[x]}$$

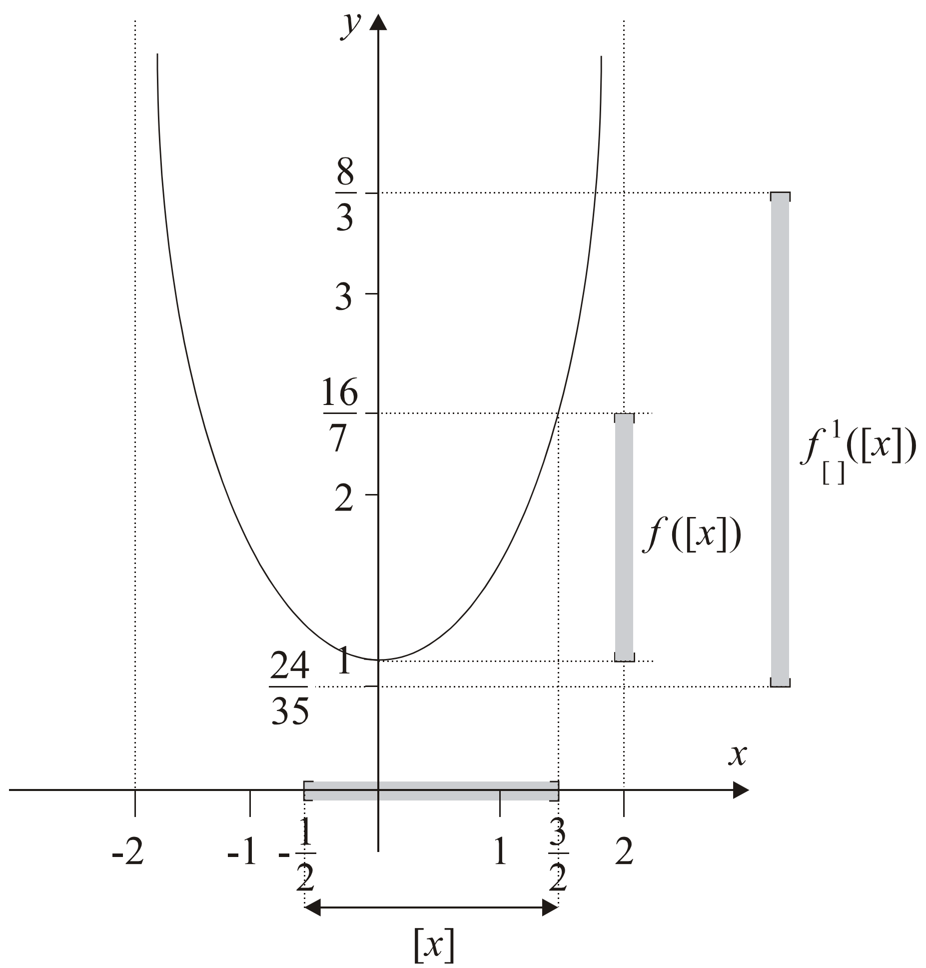
i dla podanego przedziału mamy

$$f_{[\,]}^{(1)}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\right) = \frac{1}{2-\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]} + \frac{1}{2+\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]} + \frac{1}{\left[\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]}$$

$$= [1,1]\cdot\left[\frac{1}{\frac{5}{2}},\frac{1}{\frac{1}{2}}\right] + [1,1]\cdot\left[\frac{1}{\frac{7}{2}},\frac{1}{\frac{3}{2}}\right] = [1,1]\cdot\left[\frac{2}{5},2\right] + [1,1]\cdot\left[\frac{2}{7},\frac{2}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{5},2\right] + \left[\frac{2}{7},\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{2}{5}+\frac{2}{7}, 2+\frac{2}{3}\right] = \left[\frac{14+10}{35},\frac{8}{3}\right] = \left[\frac{24}{35},\frac{8}{3}\right].$$

Otrzymany przedział zaznaczamy na rysunku. Widzimy, że jest on znacznie szerszy od przedziału, który otrzymaliśmy dla funkcji przedziałowej.



Dla drugiego zapisu funkcji rzeczywistej mamy rozszerzenie przedziałowe postaci

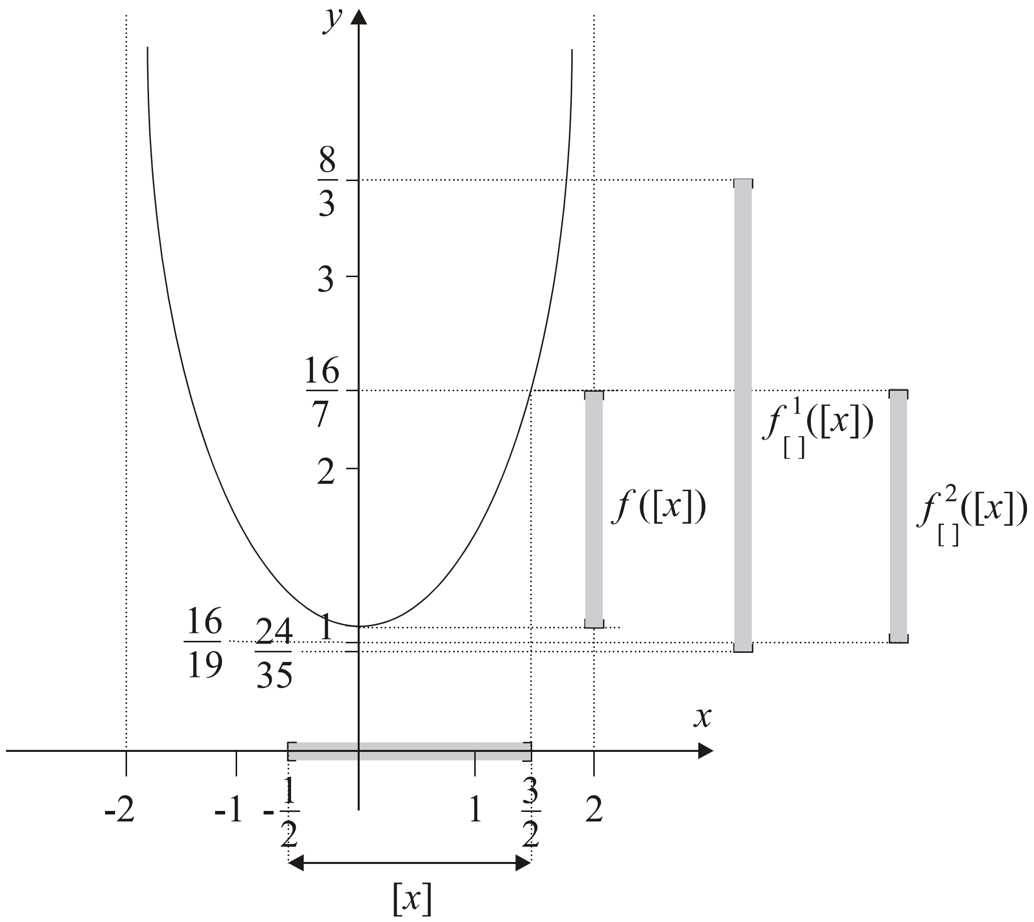
$$f_{[]}^{(2)}([x]) = \frac{4}{4 - [x]\cdot[x]}$$

i otrzymujemy

$$f_{[]}^{(2)}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\right) = \frac{4}{4-\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]\cdot\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]} = \frac{4}{[4,4]-\left[-\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right]} = \frac{4}{\left[\frac{7}{4},\frac{19}{4}\right]}$$

$$= [4,4]\cdot\left[\frac{1}{\frac{19}{4}},\frac{1}{\frac{7}{4}}\right] = [4,4]\cdot\left[\frac{4}{19},\frac{4}{7}\right] = \left[\frac{16}{19},\frac{16}{7}\right].$$

Przedział ten także zaznaczamy na rysunku i widzimy, że jest on węższy od przedziału otrzymanego poprzednio, ale w dalszym ciągu szerszy niż przedział otrzymany dla funkcji przedziałowej.



Trzecie rozszerzenie przedziałowe funkcji zmiennej rzeczywistej jest następujące:

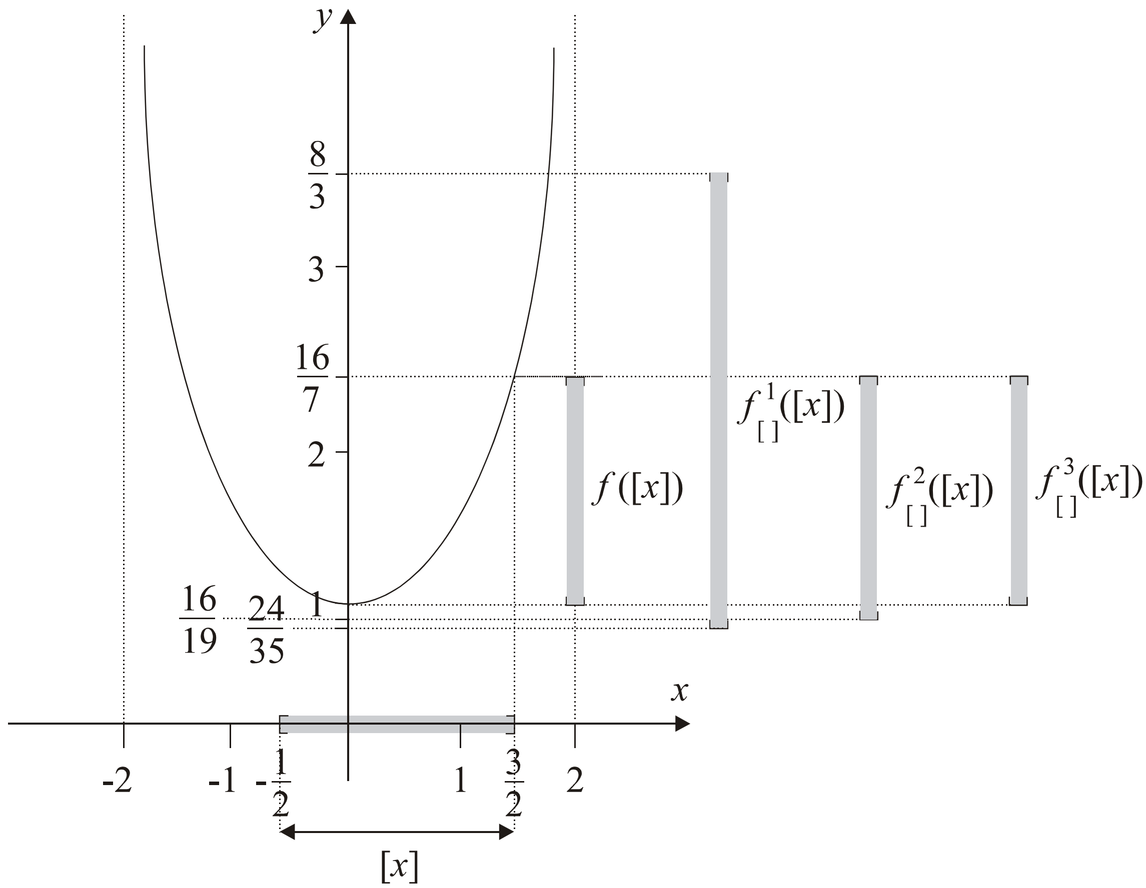
$$f_{[\,]}^{(3)}([x]) = \frac{4}{4 - [x]^2}.$$

Dla przedziału $[x] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ mamy

$$f_{[\,]}^{(3)}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \frac{4}{4 - \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^2} = \frac{4}{4 - \left[\left\langle\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right\rangle^2, \left|\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right|^2\right]}$$

$$= \frac{4}{[4,4] - \left[0, \frac{9}{4}\right]} = \frac{4}{\left[\frac{7}{4}, 4\right]} = [4,4] \cdot \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{\frac{7}{4}}\right] = [4,4] \cdot \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{7}\right] = \left[1, \frac{16}{7}\right].$$

Otrzymaliśmy taki sam przedział, jak dla funkcji przedziałowej (zob. rysunek).



Rozwiązanie zadania pokazuje empiryczny fakt, że w celu otrzymania przedziału o najmniejszej szerokości z kilku matematycznie równoważnych zapisów funkcji zmiennej rzeczywistej należy wybrać zapis, w którym argument x występuje najmniejszą liczbę razy i dla niego skonstruować rozszerzenie przedziałowe tej funkcji.