ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

Andrzej Marciniak

Politechnika Poznańska, Instytut Informatyki

Prezentacja multimedialna przygotowana za pomocą systemu Corel® Presentations X3

WSTĘP DO PODSTAW ELEMENTÓW ANALIZY NUMERYCZNEJ

Andrzej Marciniak

Politechnika Poznańska, Instytut Informatyki

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

- ★arytmetyka przedziałowa i jej realizacja w języku Delphi Pascal
- ★podstawowe pojęcia analizy numerycznej
- ★realizacja obliczeń na wielomianach i funkcjach wymiernych
- ★interpolacja
- ★układy równań liniowych
- ★równania i układy równań nieliniowych

ANALIZA NUMERYCZNA

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ +

- obliczanie wyznacznika i odwracanie macierzy
- aproksymacja
- różniczkowanie numeryczne
- całkowanie numeryczne
- równania różniczkowe zwyczajne
- równania różniczkowe cząstkowe

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

Organizacja przedmiotu:

- wykład 24 godziny (12 × 2 godziny)
- ćwiczenia 24 godziny (12 × 2 godziny)

Zaliczenie przedmiotu:

- ćwiczenia – program (aplikacja) + sprawdzian
- wykład – egzamin

ELEMENTY ANALIZY NUMERYCZNEJ

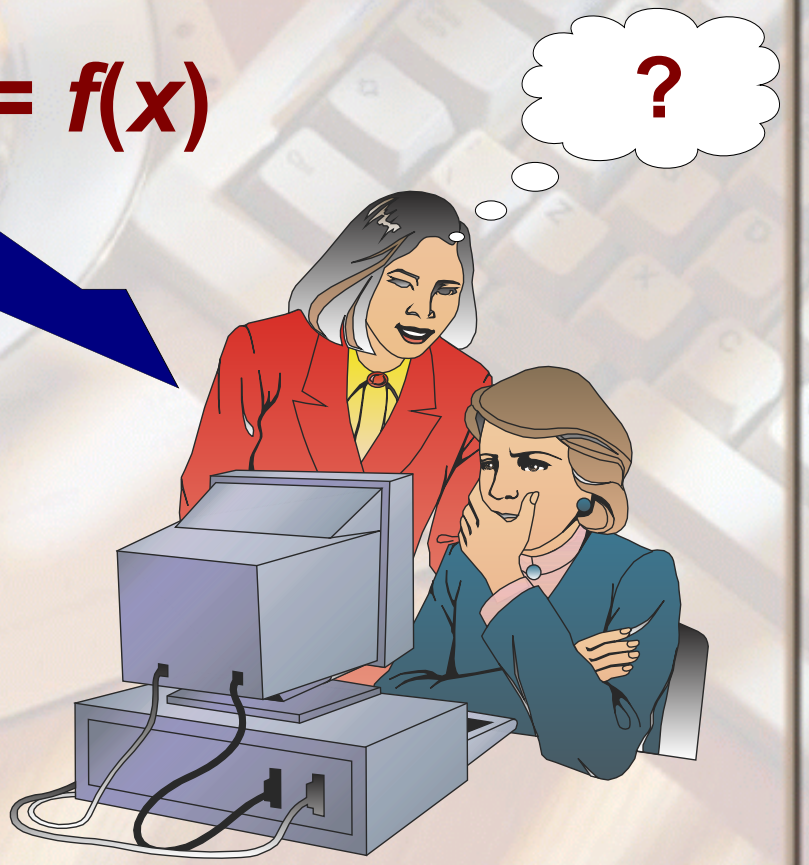
Literatura:

- J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, Cz.1*, WNT
- J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN
- Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT
- A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN
- A. Marciniak, D. Gregulec, J. Kaczmarek, *Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal*, NAKOM
- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT

Na tym wykładzie ...

- przykłady obliczeń w arytmetyce zmiennopozycyjnej
- zmiennopozycyjne reprezentacje liczb
- podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej
- realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej
  - rodzaje zaokrągleń
  - operacje zmiennopozycyjne na przedziałach
  - przedziałowe reprezentacje liczb

Zadanie $y = f(x)$



„Otrzymałem wynik y(?)”

„Za pomocą metody M otrzymałem wynik $y \pm \Delta y$. Metodę M wybrałem, bo a, b, c ... .”

Przykłady obliczeń

Przykład 1

$$\mathbf{A} = \left[\frac{1}{j + k - 1} \right]_{j,\, k = 1(1)40}$$

Teoretycznie: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$

Obliczenia w typie ***Extended***:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}99999999922874849 & 0{,}00000101141631603 & \dots & 1{,}75000000000000000 & -0{,}12500000000000000 \\ 0{,}00000000154250301 & 1{,}00000053085386753 & \dots & 3{,}75000000000000000 & 0{,}25000000000000000 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0{,}00000000064028427 & 0{,}00000014435499907 & \dots & 3{,}25000000000000000 & 0{,}12500000000000000 \\ 0{,}00000000080763130 & 0{,}00000011082738638 & \dots & 1{,}75000000000000000 & 0{,}81250000000000000 \end{bmatrix}$$

Dlaczego taki wynik?

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A:

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \approx 2{,}717 \cdot 10^{11}$$

Przykłady obliczeń

Przykład 2

Dane są dwa wektory:

$$\mathbf{x} = \left[10^{20}, 1223, 10^{18}, 10^{15}, 3, -10^{12}\right]^{\mathbf{T}},$$

$$\mathbf{y} = \left[10^{20}, 2, -10^{22}, 10^{13}, 2111, 10^{16}\right]^{\mathbf{T}}.$$

Ich iloczyn skalarny (dokładny) jest równy:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 10^{40} + 2446 - 10^{40} + 10^{28} + 6333 - 10^{28} = 8779.$$

W arytmetyce zmiennopozycyjnej na każdym komputerze otrzymamy wartość 0 (zero)!

Dlaczego?

Przykłady obliczeń

Przykład 3

Rozważmy system zmiennopozycyjny o podstawie 10 i mantysie o długości 5. cyfr (dla uproszczenia) i obliczmy w nim różnicę dwu liczb

$$x = 0{,}10005 \cdot 10^5 \quad \text{i} \quad y = 0{,}99973 \cdot 10^4.$$

Operandy są podobnego rzędu i wykonując obliczenia na komputerze otrzymujemy całkiem poprawny wynik:

$$x - y = 0{,}77000 \cdot 10^1.$$

Przypuśćmy teraz, że liczby x i y są wynikiem dwóch uprzednio wykonanych mnożeń, których niezaokrąglone wartości są równe

$$x = x_1 \cdot x_2 = 0{,}1000548241 \cdot 10^5 \quad \text{i} \quad y = y_1 \cdot y_2 = 0{,}9997342213 \cdot 10^4.$$

Jeśli odejmiemy te dwie liczby, znormalizujemy wynik i zaokrąglimy go do 5. miejsc dziesiętnych, to otrzymamy $0{,}81402 \cdot 10^1$.

Standardowa arytmetyka zmiennopozycyjna z zaokrąglaniem po każdym działaniu prowadzi do błędnych wyników!

Przykłady obliczeń

Przykład 4

Teoretycznie: $(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c)$

Wykonując obliczenia w arytmetyce zmiennopozycyjnej może okazać się, że

$\mathrm{fl}((a + b) + c) \neq \mathrm{fl}(a + (b + c)) \neq \mathrm{fl}(b + (a + c))$.

W jakiej kolejności należy dodać trzy liczby, aby zminimalizować błędy zaokrągleń?

Przykład 5

Teoretycznie: $a^2 - b^2 = a \cdot a - b \cdot b = (a + b)(a - b)$

W arytmetyce zmiennopozycyjnej może być

$\mathrm{fl}(a \cdot a - b \cdot b) \neq \mathrm{fl}((a + b)(a - b))$.

Który sposób obliczania różnicy kwadratów jest lepszy?

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Reprezentacja maszynowa liczby rzeczywistej x może być różna od tej liczby, tj.

$$x \neq \mathrm{rd}(x) = x(1+\varepsilon), \text{ gdzie } |\varepsilon| \leq eps = 2^{-t}.$$

Liczbę *eps* nazywa się dokładnością maszynową, przy czym t oznacza liczbę bitów przeznaczoną do zapisu mantysy (tutaj: w systemie dwójkowym).

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

W języku Delphi Pascal w postaci zmiennopozycyjnej zapisywane są wartości pięciu typów rzeczywistych:

- ***Real48*** (na 6. bajtach, mantysa ze znakiem zajmuje 40 bitów),
- ***Single*** (na 4. bajtach, mantysa ze znakiem zajmuje 25 bitów),
- ***Real*** (w 32-bitowej implementacji języka) = ***Double*** (na 8. bajtach, mantysa ze znakiem zajmuje 53 bity),
- ***Extended*** (na 10. bajtach, mantysa ze znakiem zajmuje 65 bitów).

Typy rzeczywiste *Comp* i *Currency* są typami stałopozycyjnymi.

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

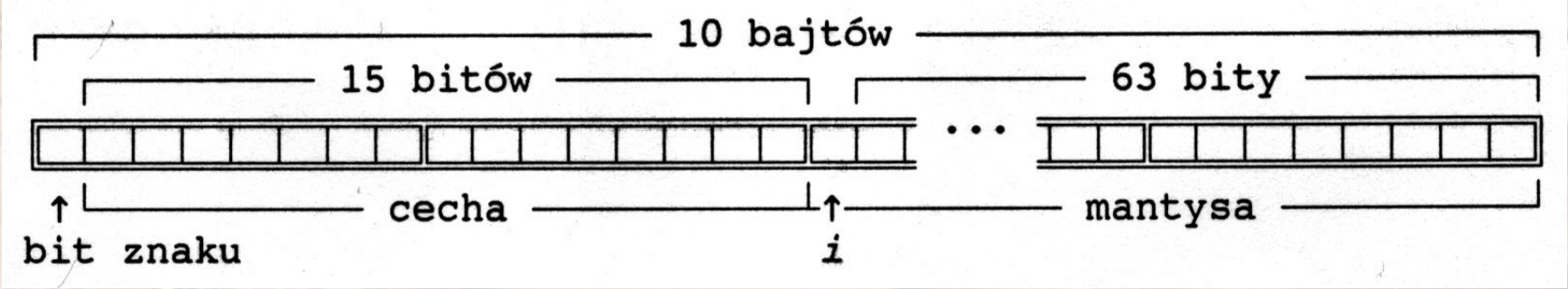
Ze standardem IEEE (skr. ang. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*) są zgodne typy ***Single*** (typ rzeczywisty o pojedynczej precyzji) i ***Double*** (typ rzeczywisty o podwójnej precyzji).

Typ ***Extended*** można nazwać typem rzeczywistym o poszerzonej precyzji (z uwagi na liczbę bitów przeznaczoną do zapisu mantysy). Typ ten ma też większy zakres niż typ ***Double*** (z uwagi na większą liczbę bitów przeznaczoną do zapisu cechy).

W programach numerycznych pisanych w języku Delphi Pascal należy stosować typ *Extended*.

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Zapis wartości typu ***Extended***:



Wartość *w* liczby jest określona następująco:

$$w = \begin{cases} (-1)^z 2^{(c-16383)} (i.m), & 0 \le c < 32767, \\ (-1)^z Inf, & c = 32767, \quad m = 0, \\ NaN, & c = 32767, \quad m \neq 0, \end{cases}$$

gdzie *i* oznacza cyfrę przed kropką w mantysie (0 lub 1).

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Przykład

Liczba 0,1 po wczytaniu (np. przez procedurę ***Readln***) i przypisaniu do zmiennej typu ***Extended***. Wartość tej zmiennej wypisywana przez procedurę ***Write*** (***Writeln***):

```
1.0000000000000000E-0001
```

Reprezentacja wewnętrzna:

```
1100110111001100110011001100110011001100110011001100110011001100111111011001111 1
```

Interpretacja reprezentacji wewnętrznej (odwrócenie bajtów):

```
0011111111111011110011001100110011001100110011001100110011001100110011001100110011001
    cecha                                  mantysa
└ bit znaku    └ cyfra przed kropką dziesiętną w mantysie
```

Znając sposób zapisu liczb typu ***Extended*** możemy „odszyfrować” ten zapis ...

cd.

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Przykład (cd.)

Wewnętrzna (znormalizowana) wartość dwójkowa cechy:

`011111111111011`

$$= 0\cdot2^{14} + 1\cdot2^{13} + 1\cdot2^{12} + 1\cdot2^{11} + 1\cdot2^{10} + 1\cdot2^{9} + 1\cdot2^{8} + 1\cdot2^{7} + 1\cdot2^{6} + 1\cdot2^{5} + 1\cdot2^{4} + 1\cdot2^{3} + 1\cdot2^{1} + 1\cdot2^{1} + 1\cdot2^{0}$$

Wewnętrzna (znormalizowana) wartość dziesiętna cechy: **16379**

Wartość dziesiętna cechy po zdenormalizowaniu: **−4**

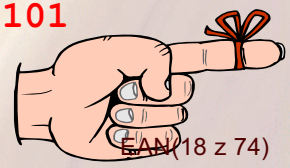
Mantysa w zapisie dwójkowym:

`1,10011001100110011001100110011001100110011001100110011001101`

Liczba w zapisie dwójkowym (po pomnożeniu przez 2^{-4} i uwzględnieniu znaku +, bo bit znaku jest równy 0):

`0,00011001100110011001100110011001100110011001100110011001101`

=



Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Przykład (cd.)

$$
\begin{aligned}
&= 0\cdot 2^{0} + 0\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 0\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-4} + 1\cdot 2^{-5} + 0\cdot 2^{-6} + 0\cdot 2^{-7} + 1\cdot 2^{-8} + 1\cdot 2^{-9} \\
&+ 0\cdot 2^{-10} + 0\cdot 2^{-11} + 1\cdot 2^{-12} + 1\cdot 2^{-13} + 0\cdot 2^{-14} + 0\cdot 2^{-15}\ 1\cdot 2^{-16} + 1\cdot 2^{-17} + 0\cdot 2^{-18} + 0\cdot 2^{-19} \\
&+ 0\cdot 2^{-20} + 0\cdot 2^{-21} + 1\cdot 2^{-22} + 1\cdot 2^{-23} + 0\cdot 2^{-24} + 0\cdot 2^{-25}\ 1\cdot 2^{-26} + 1\cdot 2^{-27} + 0\cdot 2^{-28} + 0\cdot 2^{-29} \\
&+ 0\cdot 2^{-30} + 0\cdot 2^{-31} + 1\cdot 2^{-32} + 1\cdot 2^{-33} + 0\cdot 2^{-34} + 0\cdot 2^{-35}\ 1\cdot 2^{-36} + 1\cdot 2^{-37} + 0\cdot 2^{-38} + 0\cdot 2^{-39} \\
&+ 0\cdot 2^{-40} + 0\cdot 2^{-41} + 1\cdot 2^{-42} + 1\cdot 2^{-43} + 0\cdot 2^{-44} + 0\cdot 2^{-45}\ 1\cdot 2^{-46} + 1\cdot 2^{-47} + 0\cdot 2^{-48} + 0\cdot 2^{-49} \\
&+ 0\cdot 2^{-50} + 0\cdot 2^{-51} + 1\cdot 2^{-52} + 1\cdot 2^{-53} + 0\cdot 2^{-54} + 0\cdot 2^{-55}\ 1\cdot 2^{-56} + 1\cdot 2^{-57} + 0\cdot 2^{-58} + 0\cdot 2^{-59} \\
&+ 0\cdot 2^{-60} + 0\cdot 2^{-61} + 1\cdot 2^{-62} + 1\cdot 2^{-63} + 0\cdot 2^{-64} + 0\cdot 2^{-65}\ 1\cdot 2^{-66} + 1\cdot 2^{-67}
\end{aligned}
$$

Dokładna wartość dziesiętna wewnętrznej reprezentacji liczby:

0,100000000000000000013552527156068805425093160010874271392822265625

Poprzednia liczba rzeczywista reprezentowana dokładnie:

0,099999999999999999994578989137572477829962735995650291442871093750 0

Następna liczba rzeczywista reprezentowana dokładnie:

0,100000000000000000008131516293641283255055896006524562835693359375 0

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Przykład (cd.)

Następne liczby rzeczywiste reprezentowane dokładnie:

0,10000000000000000008131516293641283255055896006524562835693359375 0

Write (liczba:27) : 1.0000000000000000E-0001

0,10000000000000000001490777987167568596760247601196169853210449218750

Write (liczba:27) : 1.0000000000000000E-0001

• • •

0,10000000000000000049602249391211827855840965639799833297729492187500

Write (liczba:27) : 1.0000000000000000E-0001

0,10000000000000000050279875749015268127095623640343546867370605468750

Write (liczba:27) : 1.0000000000000000E-0001

• • •

0,10000000000000000054345633895835909754623571643605828528521728515625

Write (liczba:27) : 1.0000000000000000E-0001

7 liczb błędnie zaokrąglanych ?

Zmiennopozycyjne (maszynowe) reprezentacje liczb

Przykład (cd.)

Poprzednie liczby rzeczywiste reprezentowane dokładnie:

0,09999999999999999994578989137572477829962735995650291442871093750 0

Write (liczba:27) : `1.0000000000000000E-0001`

0,09999999999999999998780272555953807511741615599021315574645996093 75

Write (liczba:27) : `1.0000000000000000E-0001`

• • •

0,09999999999999999995392140766936606155468325596302747726440429687 50

Write (liczba:27) : `1.0000000000000000E-0001`

0,09999999999999999947145144091331658842136675957590341567993164062 5

Write (liczba:27) : `1.0000000000000000E-0001`

1 liczba błędnie zaokrąglona

Liczb typu ***Extended*** przedstawianych jako
`1.0000000000000000E-0001` jest 88!

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Przedziałem rzeczywistym nazywamy domknięty i ograniczony zbiór liczb rzeczywistych **R**

$$[x] = \left[\underline{x}, \overline{x}\right] = \left\{x \in \mathbf{R}: \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\right\}.$$

Średnica (*szerokość*), *promień* i *punkt środkowy* przedziału $[x]$ są zdefiniowane następująco:

$$d([x]) = \overline{x} - \underline{x},$$

$$r([x]) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2},$$

$$m([x]) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}.$$

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Odległość $q([x], [y])$ pomiędzy przedziałami $[x]$ i $[y]$ jest zdefiniowana wzorem

$$q([x],[y]) = \max\left\{\left|\underline{x} - \underline{y}\right|, \left|\overline{x} - \overline{y}\right|\right\}.$$

Odległość jest nieujemna, a równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $[x] = [y]$. Nie zależy ona od kolejności argumentów i spełnia nierówność trójkąta. Oznacza to, że jest ona metryką, a zbiór **IR** (zbiór przedziałów rzeczywistych) z tą metryką jest przestrzenią metryczną. Można udowodnić, że jest to przestrzeń metryczna zupełna.

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Elementarne operacje arytmetyczne $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ na liczbach rzeczywistych rozszerza się na argumenty przedziałowe $[x]$ i $[y]$ przez zdefiniowanie wyniku takiej operacji jako zbioru liczb rzeczywistych powstałego przez wykonanie operacji $\circ$ na dowolnych dwu liczbach zawartych w przedziałach $[x]$ i $[y]$, tj.

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y : x \in [x], y \in [y]\},$$

czyli

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

czyli

$$[x] + [y] = \left[\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}\right],$$

$$[x] - [y] = \left[\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}\right],$$

$$[x] \cdot [y] = \left[\min\left\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\right\}, \max\left\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}\right\}\right],$$

$$[x] / [y] = [x] \cdot \left[1/\overline{y}, 1/\underline{y}\right], \quad 0 \notin [y].$$

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Elementarne operacje arytmetyczne na przedziałach są *izotoniczne ze względu na zawieranie*, tzn.

$$[x] \subseteq [x'] \wedge [y] \subseteq [y'] \Rightarrow [x] \circ [y] \subseteq [x'] \circ [y'],$$
$$\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$$

Przynależność liczby x do przedziału $[x]$, $x \in [x]$, można przedstawić zależnością

$$\left| x - m([x]) \right| \leq r([x]).$$

Promień przedziału $[x]$ jest zatem ograniczeniem górnym błędu bezwzględnego punktu środkowego $m([x])$ rozważanego jako przybliżenie nieznanej liczby $x \in [x]$.

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Dla przedziałów wprowadza się pojęcie najmniejszej i największej wartości bezwzględnej:

$$\langle [x] \rangle = \min\{|x|: x \in [x]\},$$

$$|[x]| = \max\{|x|: x \in [x]\} = \max\{|\underline{x}|, |\overline{x}|\}.$$

Zauważmy, że jeśli $0 \in [x]$, to $\langle [x] \rangle = 0$.

Najmniejsza i największa wartość bezwzględna przedziału są liczbami. Wartość bezwzględna przedziału jest jednak przedziałem i jest oznaczana abs([x]) (abs oznacza tu elementarną funkcję przedziałową).

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

Niech $\varphi: D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oznacza elementarną funkcję rzeczywistą ciągłą na każdym domkniętym przedziale zawartym w D. Funkcję φ rozszerzamy na argumenty przedziałowe $[x] \in D$ (definicja funkcji przedziałowej):

$$\varphi([x]) = \left\{\varphi(x): x \in [x]\right\}.$$

Dla monotonicznych funkcji elementarnych można podać ich odpowiedniki przedziałowe:

$$\mathbf{abs}([x]) = \left[\langle [x] \rangle, \left| [x] \right|\right],$$

$$\varphi([x]) = \left[\varphi(\underline{x}), \varphi(\overline{x})\right], \quad \varphi \in \{\mathbf{arctg}, \mathbf{arcsinh}, \mathbf{ln}, \mathbf{sinh}\},$$

$$\varphi([x]) = \left[\varphi(\overline{x}), \varphi(\underline{x})\right], \quad \varphi \in \{\mathbf{arcctg}, \mathbf{arctgh}\},$$

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

$$[x]^2 = \left[\langle [x] \rangle^2, \left| [x] \right|^2\right],$$

$$\sqrt{[x]} = \left[\sqrt{\underline{x}}, \sqrt{\overline{x}}\right],$$

$$\mathbf{e}^{[x]} = \left[\mathbf{e}^{\underline{x}}, \mathbf{e}^{\overline{x}}\right].$$

Zauważmy, że $[-1, 2]^2 = [0, 4] \neq [-1, 2]\cdot[-1, 2] = [-2, 4]$.
Jeśli $0 \in [x]$, to mamy $[x]^2 \subset [x]\cdot[x]$.

Podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej

W celu otrzymania otoczenia funkcji $f([x])$ podstawiamy przedział $[x]$ w miejsce argumentu x, po czym obliczamy f stosując arytmetykę przedziałową. Taki sposób wyznaczania funkcji przedziałowej nazywamy rozszerzeniem przedziałowym funkcji f i oznaczamy $f_{[\,]}([x])$. Na podstawie definicji funkcji przedziałowej mamy

$$f([x]) \subseteq f_{[\,]}([x]),$$

przy czym równość zachodzi raczej rzadko.

Uwaga: Rozszerzenia przedziałowe dwóch równoważnych matematycznie zapisów funkcji zmiennej rzeczywistej mogą być różne.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Rodzaje zaokrągleń

Rodzaje zaokrągleń:

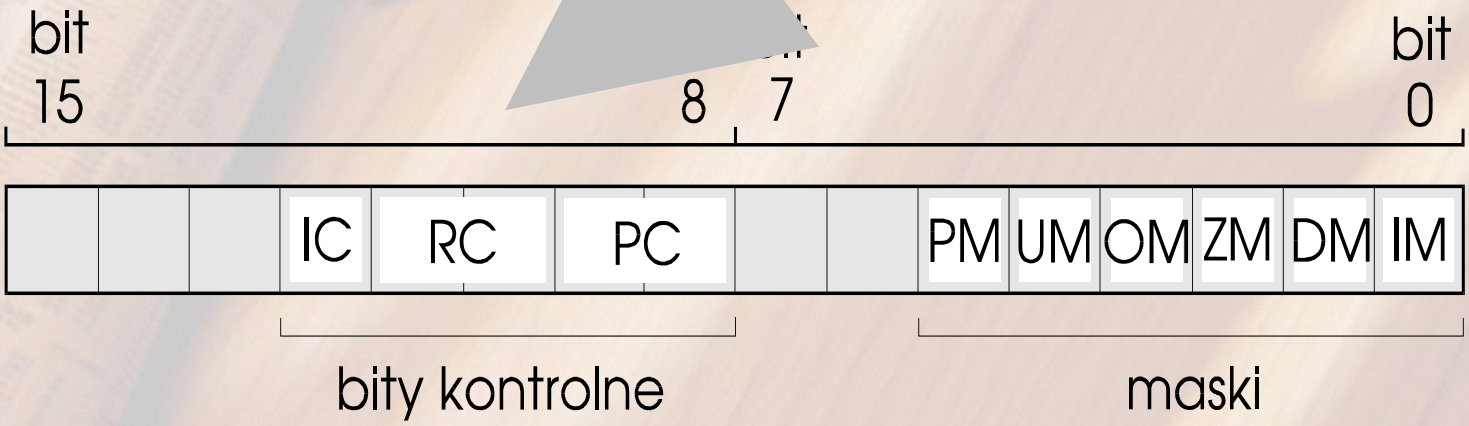
- do najbliższej liczby maszynowej, a w przypadku równych odległości do liczby parzystej (jest to zaokrąglenie standardowe, przyjmowane domyślnie),
- w dół, tj. w kierunku $-\infty$,
- w górę, tj. w kierunku $+\infty$,
- ucięcie w kierunku zera, tzn. liczby dodatnie są zaokrąglane w dół, a liczby ujemne – w górę.

Czy może być jeszcze inny sposób zaokrąglania?

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Rodzaje zaokrągleń

W jednostce arytmetyki zmiennopozycyjnej (FPU) procesora Intel aktualnie realizowany sposób zaokrąglania określa zawartość dwubitowego pola RC, które jest 10. i 11. bitem jej słowa sterującego.



Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Rodzaje zaokrągleń

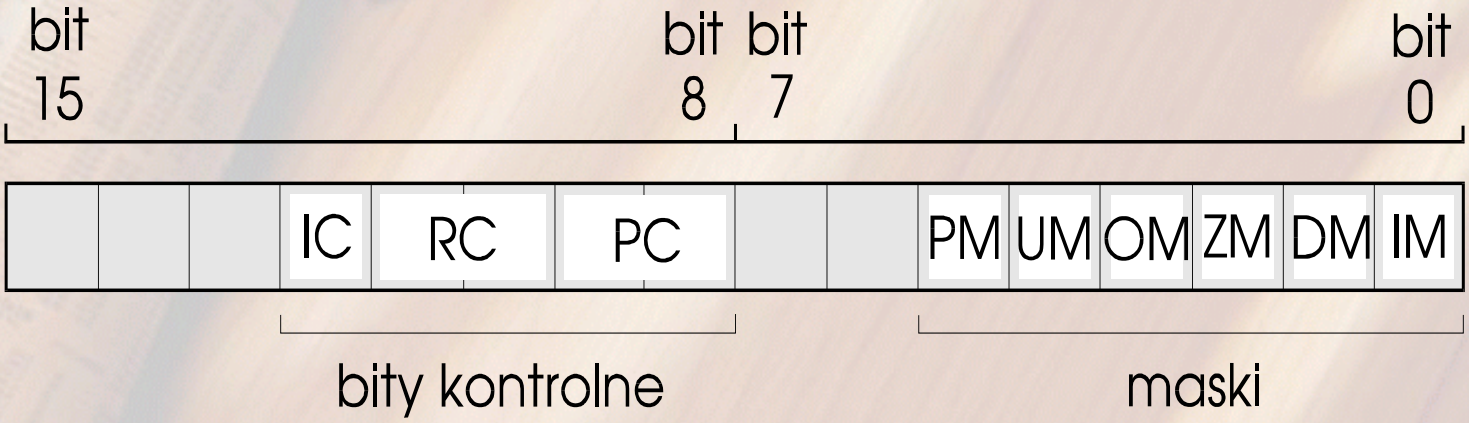
Zawartość pola **RC** – zaokrąglenie:

00 – standardowe,

01 – w dół,

10 – w górę,

11 – ucięcie w kierunku zera.

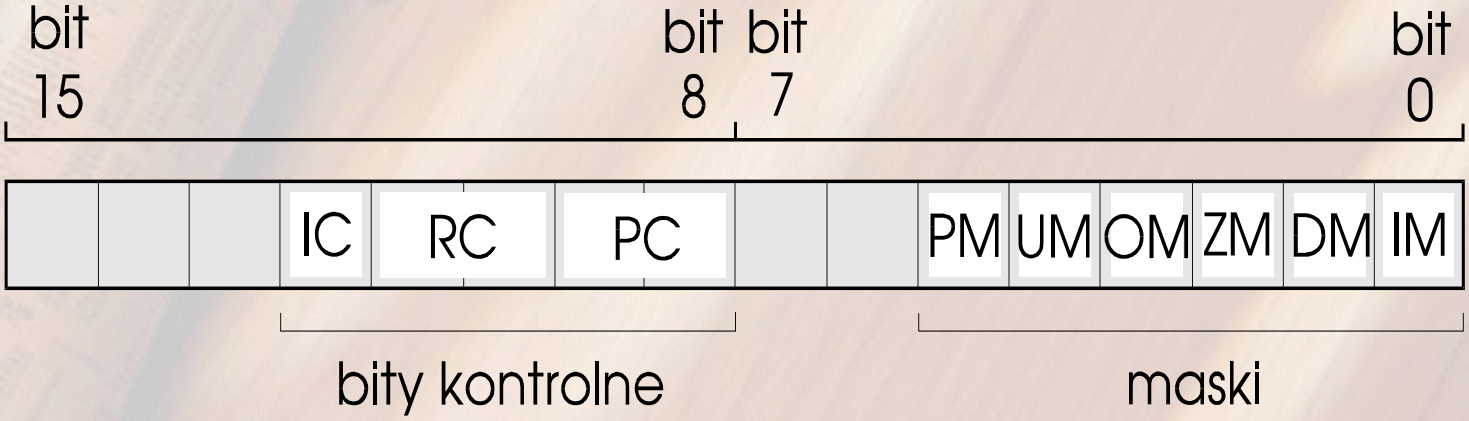


Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Rodzaje zaokrągleń

IC – bit sterowania nieskończonością, który określa typ stosowanej arytmetyki nieskończoności:
0 – rzutowa (nierozróżnianie znaku nieskończoności),
1 – afiniczna ($-\infty$ i $+\infty$),

PC – pole sterowania precyzją, które określa jedną z trzech możliwych precyzji:
00 – krótka rzeczywista (wynik 24 bitowy),
10 – długa rzeczywista (wynik 53-bitowy),
11 – tymczasowa rzeczywista (wynik 64-bitowy).

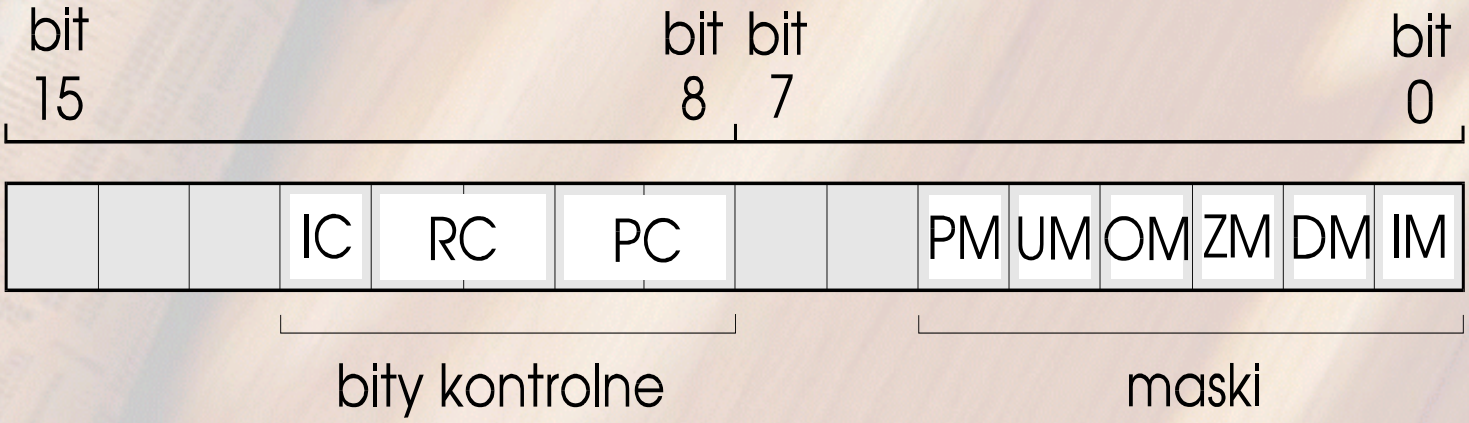


Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Rodzaje zaokrągleń

Maski:
PM – precyzji,
UM – niedomiaru,
OM – nadmiaru,
ZM – dzielenia przez zero,
DM – zdenormalizowanego operandu,
IM – niedozwolonej operacji.

Jeżeli bit jakiejś maski jest równy 1, oznacza to, że po wystąpieniu warunku określonego daną maską zostaną podjęte standardowe działania korygujące.
W przypadku, gdy bit maski jest równy 0, po wystąpieniu warunku zostanie wygenerowany sygnał przerwania.



Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Niech $[x]$ i $[y]$ oznaczają przedziały maszynowe, tj. przedziały, których końce są liczbami maszynowymi.
Elementarne operacje zmiennopozycyjne na przedziałach maszynowych są określone następująco:

$$[x]+[y]=\left[\nabla\left(\underline{x}+\underline{y}\right),\Delta\left(\overline{x}+\overline{y}\right)\right],$$

$$[x]-[y]=\left[\nabla\left(\underline{x}-\overline{y}\right),\Delta\left(\overline{x}-\underline{y}\right)\right],$$

$$[x]\cdot[y]=\left[\min\left\{\nabla\left(\underline{x}\underline{y}\right),\nabla\left(\underline{x}\overline{y}\right),\nabla\left(\overline{x}\underline{y}\right),\nabla\left(\overline{x}\overline{y}\right)\right\},\max\left\{\Delta\left(\underline{x}\underline{y}\right),\Delta\left(\underline{x}\overline{y}\right),\Delta\left(\overline{x}\underline{y}\right),\Delta\left(\overline{x}\overline{y}\right)\right\}\right],$$

$$[x]/[y]=[x]\cdot\left[\nabla\left(1/\overline{y}\right),\Delta\left(1/\underline{y}\right)\right],\quad 0\notin[y],$$

gdzie ∇ oznacza zaokrąglenie w dół, a Δ – w górę.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Z podanych wzorów wynika, że wykonanie operacji na przedziałach wymaga włączania odpowiednich sposobów zaokrąglania, a więc sterowania słowem sterującym jednostki arytmetyki zmiennopozycyjnej (FPU).

Do tego celu służą:

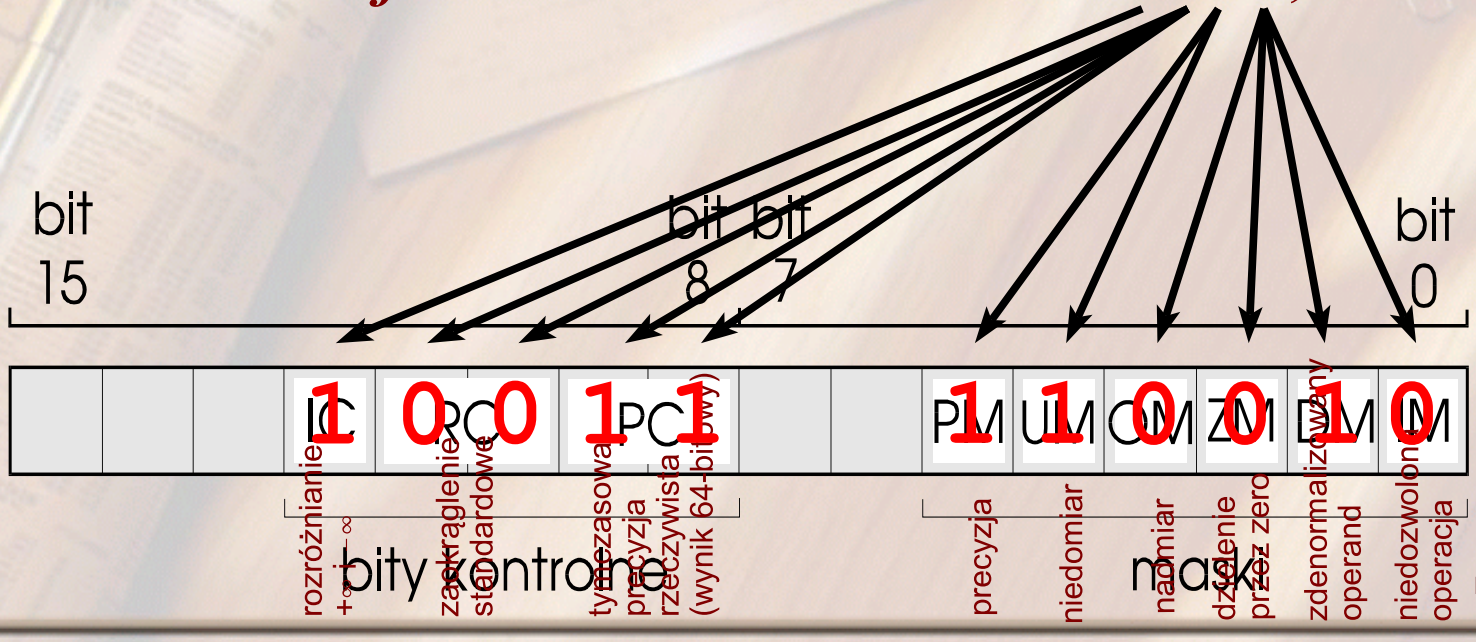
- ★instrukcje asemblera FSTCW i FLDCW,
- ★predefiniowana (w module ***System***) zmienna ***Default8087CW***,
- ★procedura ***Set8087CW*** (jest ona zdefiniowana w module ***System***),
- ★funkcje ***SetRoundMode*** i ***GetRoundMode*** (zdefiniowane w module ***Math***).

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Zmienna ***Default8087CW*** określa standardową zawartość słowa sterującego FPU. Jej deklaracja ma postać

var *Default8087CW* : *Word* = $1332;



Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Procedura ***Set8087CW*** służy do zmiany zawartości słowa sterującego FPU. Jej wywołanie ma postać

Set8087CW (*wyrażenie*)

gdzie wyrażenie (typu Word) określa jego nową zawartość.

Uwagi:

- Nieodpowiednia zmiana zawartości słowa sterującego FPU (przez zmianę wartości zmiennej ***Default8087CW*** lub wywołanie procedury ***Set8087CW***) może doprowadzić do konsekwencji trudnych do przewidzenia.
- Zmiana zawartości słowa sterującego FPU za pomocą procedury ***Set8087CW*** powoduje zmianę wartości zmiennej ***Default8087CW***.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Przykład

Jeśli zamierzamy zmienić standardową zawartość słowa sterującego FPU, to należy zdefiniować jakąś zmienną typu ***Word***, np.

```
var stan : Word;
```

przypisać jej pierwotną (standardową) wartość zmiennej ***Default8087CW***:

```
stan:=Default8087CW;
```

i dopiero po wykonaniu tej operacji wywołać procedurę ***Set8087CW***, np.

```
Set8087CW ($133F);
```

(wywołanie to wyłącza wszystkie maski FPU). Po wykonaniu określonych operacji przy niestandardowej zawartości słowa sterującego FPU, należy ustalić jego standardową zawartość za pomocą instrukcji

```
Set8087CW (stan);
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Jeśli podejrzewamy, że bieżąca zawartość słowa sterującego FPU nie jest standardowa, a więc jest różna od pierwotnej wartości zmiennej ***Default8087CW***, to do jego odczytania można posłużyć się instrukcją asemblera FSTCW.

Odpowiednia procedura w języku Delphi Pascal może mieć postać:

```
procedure ustalenie_stanu_pierwotnego (var stan : Word);
var odczyt : Word;
begin
  asm
    FSTCW odczyt
  end;
  stan:=odczyt
end {ustalenie_stanu_pierwotnego};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Jeśli okaże się, że w wyniku wywołania tej procedury:

ustalenie_stanu_pierwotnego (stan);

gdzie stan oznacza zmienną typu ***Word***, wartość zmiennej podanej w wywołaniu jest różna od $1332, to w celu przywrócenia standardowej wartości słowa sterującego koprocesora należy zastosować instrukcję

Set8087CW ($1332);

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

W celu włączenia zaokrąglenia w dół wywołanie procedury ***Set8087CW*** powinno mieć postać

Set8087CW ((stan **or** $0400) **and not** $0800);

a w celu włączenia zaokrąglenia w górę – następującą postać:

Set8087CW ((stan **and not** $0400) **or** $0800);

Zauważmy, że w powyższych wywołaniach zmienna *stan* wcale nie musi być równa standardowej zawartości słowa sterującego FPU (wywołania te powodują wyłącznie zmianę zawartości pola RC, które steruje zaokrągleniami).

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Do włączenia zaokrągleń w dół i w górę można też użyć instrukcji asemblera FLDCW, a odpowiednie procedury paskalowe mogą mieć postacie:

```
procedure zaokraglenia_w_dol (const stan : Word);
var nowy_stan : Word;
begin
  nowy_stan:=stan or $0400;                    // włączenie bitu 10
  nowy_stan:=nowy_stan and not $0800; // wyłączenie bitu 11
  asm
    FLDCW nowy_stan                            // ustalenie nowego stanu
  end                                          // słowa sterującego FPU
end {zaokraglenia_w_dol};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Do włączenia zaokrągleń w dół i w górę można też użyć instrukcji asemblera FLDCW, a odpowiednie procedury paskalowe mogą mieć postacie:

```
procedure zaokraglenia_w_gore (const stan : Word);
var nowy_stan : Word;
begin
  nowy_stan:=stan and not $0400;          // wyłączenie bitu 10
  nowy_stan:=nowy_stan or $0800;          // włączenie bitu 11
  asm
    FLDCW nowy_stan                       // ustalenie nowego stanu
  end                                     // słowa sterującego FPU
end {zaokraglenia_w_gore};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Od wersji 7 języka Delphi Pascal w module *Math* (w module System.Math w pakiecie Delphi XE) są dostępne standardowe funkcje służące do ustalenia i określenia aktualnego rodzaju zaokrąglenia.

GetRoundMode – uzyskanie informacji o bieżącym rodzaju zaokrąglania realizowanym przez FPU; wartość funkcji jest typu ***TFPURoundingMode***:

type *TFPURoundingMode* =(*rmNearest*, *rmDown*, *rmUp*, *rmTruncate*);

rmNearest	–	zaokrąglenie standardowe, tj. do najbliższej liczby, a w przypadku równych odległości do liczby parzystej
rmDown	–	zakrąglenie w dół
rmUp	–	zaokrąglenie w górę
rmTruncate	–	obcięcie w kierunku zera

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

SetRoundMode (*zaokrąglenie*) – określenie rodzaju zaokrąglenia realizowanego przez FPU (wartością funkcji jest poprzedni rodzaj zaokrąglenia); parametr *zaokrąglenie* i wartość funkcji są typu ***TFPURoundingMode***

W realizacji zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej stosujemy następujące wywołania:

- ***SetRoundMode***(***rmDown***) – włączenie zaokrąglenia w dół,
- ***SetRoundMode***(***rmUp***) – włączenie zaokrąglenia w górę,
- ***SetRoundMode***(***rmNearest***) – powrót do standardowego zaokrąglania.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Realizację czterech podstawowych działań arytmetycznych, tj. dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, w arytmetyce przedziałowej zapewniają w języku Delphi Pascal następujące funkcje:

```
function iadd (const x, y : interval) : interval;
begin
  SetRoundMode (rmDown);
  Result.a:=x.a+y.a;
  SetRoundMode (rmUp);
  Result.b:=x.b+y.b;
  SetRoundMode (rmNearest)
end {iadd};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
function isub (const x, y : interval) : interval;
begin
   SetRoundMode (rmDown);
   Result.a:=x.a–y.b;
   SetRoundMode (rmUp);
   Result.b:=x.b–y.a;
   SetRoundMode (rmNearest)
end {isub};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
function imul (const x, y : interval) : interval;
var x1y1, x1y2, x2y1 : Extended;
begin
  SetRoundMode (rmDown);
  x1y1:=x.a*y.a;   x1y2:=x.a*y.b;   x2y1:=x.b*y.a;
  with Result do
    begin
      a:=x.b*y.b;
      if x2y1<a then a:=x2y1;
      if x1y2<a then a:=x1y2;
      if x1y1<a then a:=x1y1
    end;
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
SetRoundMode (rmUp);
x1y1:=x.a*y.a;   x1y2:=x.a*y.b;   x2y1:=x.b*y.a;
with Result do
  begin
    b:=x.b*y.b;
    if x2y1>b then b:=x2y1;
    if x1y2>b then b:=x1y2;
    if x1y1>b then b:=x1y1
  end;
SetRoundMode (rmNearest);
end {imul};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
function idiv (const x, y : interval) : interval;
var x1y1, x1y2, x2y1 : Extended;
begin
  if (y.a<=0) and (y.b>=0)
    then raise EZeroDivide.Create ('Dzielenie przez '
                                   +'przedział zawierający 0.')
    else begin
           SetRoundMode (rmDown);
           x1y1:=x.a/y.a;  x1y2:=x.a/y.b;  x2y1:=x.b/y.a;
           with Result do
             begin
               a:=x.b/y.b;
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
        if x2y1<a then a:=x2y1;
        if x1y2<a then a:=x1y2;
        if x1y1<a then a:=x1y1
      end;
SetRoundMode (rmUp);
x1y1:=x.a/y.a;   x1y2:=x.a/y.b;   x2y1:=x.b/y.a;
with Result do
  begin
    b:=x.b/y.b;
    if x2y1>b then b:=x2y1;
    if x1y2>b then b:=x1y2;
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
            if x1y1>b then b:=x1y1
        end
    end;
  SetRoundMode (rmNearest)
end {idiv};
```

Typ *interval* należy zdefiniować następująco:

```
type interval = record
                    a, b : Extended
                end;
```

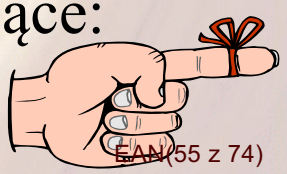
Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

Typ *interval* można zdefiniować wraz z deklaracjami operatorów przeciążonych, co ułatwia programowanie obliczeń na przedziałach:

```
type interval = record
                  a, b : Extended;
                  class operator Implicit (x : Extended) : interval;
                  class operator Add (x, y : interval) : interval;
                  class operator Subtract (x, y : interval) : interval;
                  class operator Multiply (x, y : interval) : interval;
                  class operator Divide (x, y : interval) : interval;
                end;
```

przy czym definicje operatorów przeciążonych są następujące:



Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
class operator interval.Add (x, y : interval) : interval;
begin
  Result:=iadd(x,y)
end {Add};

class operator interval.Subtract (x, y : interval) : interval;
begin
  Result:=isub(x,y)
end {Subtract};

class operator interval.Multiply (x, y : interval) : interval;
begin
  Result:=imul(x,y)
end {Multiply};
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Operacje zmiennopozycyjne na przedziałach

```
class operator interval.Divide (x, y : interval) : interval;
begin
  Result:=idiv(x,y)
end {Divide};
```

```
class operator interval.Implicit (x : Extended) : interval;
var s : string;
begin
  Str (x:26, s);
  Result.a:=left_read(s);
  Result.b:=right_read(s)
end {Implicit};
```

Operator ***Implicit*** jest operatorem niejawnej zmiany typu. Funkcje *left_read* i *right_read* wyznaczają odpowiednio największą liczbę maszynową mniejszą lub równą liczbie reprezentowanej przez łańcuch *s* oraz najmniejszą liczbę maszynową większą lub równą tej liczbie.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Jeśli liczba rzeczywista nie jest liczbą maszynową, to może być reprezentowana w postaci przedziału o końcach będących dwiema sąsiednimi liczbami maszynowymi.

Proponowany sposób otrzymywania takiego przedziału opiera się na wykorzystaniu informacji o reprezentacji maszynowej danej (wprowadzonej liczby).

Ograniczamy się do liczb typu ***Extended*** (typu rzeczywistego języka Delphi Pascal o największej precyzji i największym zakresie).

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Oznaczmy:

- a – liczba wprowadzona do programu,
- x – zmienna, w której jest zapamiętana reprezentacja maszynowa (typu Extended) liczby a,
- sa – zmienna typu łańcucha długiego (***AnsiString***), w której jest przechowywany ciąg wprowadzonych znaków liczby a,
- sx – zmienna typu łańcucha długiego, w której zapamiętujemy stałoprzecinkową, dziesiętną wartość reprezentacji maszynowej liczby a, czyli wartość zmiennej x odczytaną z jej wewnętrznej postaci.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Jeśli liczbę wprowadzono w zapisie zmiennopozycyjnym, to w łańcuchu *sa* dokonujemy konwersji do zapisu stałopozycyjnego. Z uwagi na zakres liczb typu ***Extended*** łańcuch ten będzie zawierał mniej niż 5000 znaków, co wobec dozwolonych rozmiarów łańcuchów długich, ograniczonych praktycznie tylko dostępną pamięcią, nie jest dużo.

Przypadek 1: $sa = sx$

Liczba a jest reprezentowana dokładnie w komputerze, a więc przedział jej maszynowej reprezentacji ma szerokość 0 (przedziałem tym jest $[x, x]$).

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Przypadek 2: $sa \neq sx$

Analiza wewnętrznej reprezentacji liczb typu ***Extended*** prowadzi do wniosku, że przy równych cechach mantysy dwóch sąsiednich liczb maszynowych w tym typie różnią się o 2^{-63}.

Zatem dodając jedynkę dwójkową na ostatnim bicie wewnętrznej reprezentacji mantysy zmiennej x oraz wykonując wynikające stąd ewentualne modyfikacje cechy otrzymamy następną liczbę maszynową w stosunku do wartości zmiennej x.

Z kolei, gdy odejmiemy jedynkę dwójkową na ostatnim bicie, to otrzymamy poprzednią liczbę maszynową.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Zamiast tych operacji możemy do zmiennej *x* dodać i odjąć zmienną *eps*, której wartość wyznacza wewnętrzna (znormalizowana) postać mantysy równa 1 i cecha mniejsza o 63 od wartości cechy w wewnętrznej reprezentacji wartości zmiennej *x*.

Wyznaczenie takiej wartości zmiennej *eps* jest możliwe dla każdej zmiennej *x* typu ***Extended***, której bezwzględna wartość jest o 2^{63} (około $5 \cdot 10^{20}$) większa od minimalnej dodatniej liczby w tym typie. Wobec dolnego ograniczenia zakresu liczb typu ***Extended*** do około $3{,}6 \cdot 10^{-4951}$ wystarczy przyjąć za dolną granicę zakresu rozważanych wielkości wartość 10^{-4930}.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Otrzymane wartości przypisujemy zmiennym:

nx – w przypadku liczby maszynowej następnej,

px – w przypadku liczby maszynowej poprzedniej,

snx – łańcuch zawierający odpowiednik dziesiętny (w postaci stałopozycyjnej) wartości zmiennej *nx*,

spx – łańcuch zawierający odpowiednik dziesiętny (w postaci stałopozycyjnej) wartości zmiennej *px*.

Po wykonaniu tych operacji dysponujemy czterema łańcuchami długimi: *sa*, *sx*, *spx* oraz *snx*.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Jeśli wprowadziliśmy liczbę dodatnią, to wystarczy teraz sprawdzić, która z następujących par relacji łańcuchowych jest prawdziwa:

$$spx < sa < sx \quad \text{czy też} \quad sx < sa < snx.$$

Jeśli prawdziwa jest pierwsza para nierówności, to przedziałem zmiennopozycyjnym reprezentującym liczbę rzeczywistą (niemaszynową) a jest przedział $[px, x]$, a w drugim przypadku – przedział $[x, nx]$.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Zauważmy, że dla liczby dodatniej nierówności

$$spx < sa \quad \text{i} \quad sa < snx$$

są zawsze spełnione (jeśli wprowadzona liczba jest reprezentowana dokładnie w komputerze, to $sa = sx$, a ponadto $spx < sx < snx$). Dlatego w praktyce wystarczy wyznaczyć tylko łańuchy sa i sx oraz ograniczyć się do sprawdzenia poprawności jednej z relacji

$$sa < sx \quad \text{lub} \quad sx < sa.$$

W przypadku liczby ujemnej, gdy prawdziwa jest pierwsza nierówność, to poszukiwanym przedziałem jest $[x, nx]$, a gdy druga – przedział $[px, x]$.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przedziałowe reprezentacje liczb

Realizacja przedstawionego algorytmu w programie wcale nie jest łatwa. Główna trudność polega na konstrukcji łańcuchów długich z dziesiętną, stałopozycyjną postacią wewnętrznych reprezentacji liczb.

Uwaga: Jeśli dana jest przedziałem rzeczywistym (w sensie matematycznym), to za lewy koniec przedziału maszynowego przyjmujemy największą liczbę maszynową $\leq$ lewemu końcowi przedziału rzeczywistego, a za prawy koniec – najmniejszą liczbę maszynową $\geq$ prawemu końcowi tego przedziału.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład

Rozważmy układ równań liniowych Boothroyda-Dekkera $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *gdzie* $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ *oznacza macierz kwadratową stopnia n, której współczynniki są określone wzorem*

$$a_{ij} = \binom{n+i-1}{i-1} \cdot \binom{n-1}{n-j} \cdot \frac{n}{i+j-1}; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

a wielkości $b_i = i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Rozwiązanie dokładne tego układu ma postać*

$$x_i = (-1)^i (i-1), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

Do rozwiązania tego układu zastosowano metodę eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementu podstawowego. Przy zaokrągleniach standardowym, w górę i w dół otrzymano następujące wyniki:

```
   Rozwiązanie "normalne"
x[ 1] = -0.00000000004743192
x[ 2] =  1.00000000045157710
x[ 3] = -2.00000000238984643
x[ 4] =  3.00000000926638707
x[ 5] = -4.00000002935040749
x[ 6] =  5.00000008041954110
x[ 7] = -6.00000019736256904
x[ 8] =  7.00000044395588679
x[ 9] = -8.00000093031922800
x[10] =  9.00000183787835168
```

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

	Rozwiązanie przy zaokrągleniach w górę	w dół	Szerokości "przedziałów"
x[1] =	0.00000000004669545	-0.00000000001606113	0.00000000006275657
x[2] =	0.99999999952417554	1.00000000017043271	0.00000000064625717
x[3] =	-1.99999999734731506	-2.00000000097625318	0.00000000362893812
x[4] =	2.99999998928228114	3.00000000402198646	0.00000001473970533
x[5] =	-3.99999996489990830	-4.00000001336713452	0.00000004846722622
x[6] =	4.99999990113041707	5.00000003808894987	0.00000013695853281
x[7] =	-5.99999975164410683	-6.00000009656985761	0.00000034492575078
x[8] =	6.99999943012533486	7.00000022328708134	0.00000079316174648
x[9] =	-7.99999878513889253	-8.00000047905955295	0.00000169392066042
x[10] =	8.99999756377489755	9.00000096592257091	0.00000340214767336

	Środek "przedziału"	Różnica w stosunku do rozw. "normalnego"
x[1] =	0.00000000001531716	0.00000000006274908
x[2] =	0.99999999984730412	-0.00000000060427298
x[3] =	-1.99999999916178412	0.00000000322806232
x[4] =	2.99999999665213380	-0.00000001261425327
x[5] =	-3.99999998913352141	0.00000004021688608
x[6] =	4.99999996960968347	-0.00000011080985763
x[7] =	-5.99999992410698222	0.00000027325558682
x[8] =	6.99999982670620810	-0.00000061724967869
x[9] =	-7.99999963209922274	0.00000129822000526
x[10] =	8.99999926484873423	-0.00000257302961745

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

Analiza przedstawionych wyników prowadzi do wniosku, że przy każdym rodzaju zaokrąglania FPU otrzymane rozwiązania są obarczone dość dużym błędem, przy czym rozwiązanie uzyskane przy standardowym zaokrąglaniu wcale nie musi być dokładniejsze (porównaj wartości x[1]*).*

Ponadto rozwiązanie „normalne" niekoniecznie musi leżeć wewnątrz przedziału wyznaczonego przez dwa pozostałe rozwiązania (zobacz, na przykład, wartości x[6]*). Przedziału tego nie należy też uważać za rozwiązanie przedziałowe w sensie arytmetyki przedziałowej.*

Przy okazji zwróćmy także uwagę na zaokrąglenia wykonywane przez procedurę Writeln – wyświetlone różnice wartości nie są równe różnicy wyświetlonych wartości.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

Zastosowanie zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej:

	Rozwiązanie przedziałowe	Szerokości przedziałów
x[1]	[-0.00000000000000000,-0.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[2]	[1.00000000000000000, 1.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[3]	[-2.00000000000000000,-2.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[4]	[3.00000000000000000, 3.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[5]	[-4.00000000000000000,-4.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[6]	[5.00000000000000000, 5.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[7]	[-6.00000000000000000,-6.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[8]	[7.00000000000000000, 7.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[9]	[-8.00000000000000000,-8.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000
x[10]	[9.00000000000000000, 9.00000000000000000]	0.00000000000000E+0000

Przez zastosowanie arytmetyki przedziałowej w języku Delphi Pascal otrzymaliśmy zatem rozwiązanie dokładne!

Oczywiście w ogólności, tj. dla dowolnego układu równań liniowych, tak nie musi być.

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

Dla układu równań postaci

$$
\begin{aligned}
1{,}0x_1 + 4{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 2{,}1x_4 + 2{,}52x_5 &= 2{,}1;\\
5{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 9{,}9x_3 + 1{,}848x_4 + 2{,}31x_5 &= 1{,}98;\\
2{,}2x_1 + 1{,}485x_2 + 4{,}752x_3 + 9{,}24x_4 + 1{,}188x_5 &= 1{,}0395;\\
7{,}15x_1 + 5{,}148x_2 + 1{,}716x_3 + 3{,}432x_4 + 4{,}5045x_5 &= 4{,}004;\\
2{,}002x_1 + 1{,}5015x_2 + 5{,}148x_3 + 1{,}05105x_4 + 1{,}4014x_5 &= 1{,}26126;
\end{aligned}
$$

otrzymuje się następujące rozwiązanie przedziałowe:

	Rozwiązanie przedziałowe	Szerokości przedziałów
x[1]=	[-0.00771054612831261,-0.00771054612831209]	5.16238205747763E-0016
x[2]=	[-0.10075588680675287,-0.10075588680675171]	1.16191236319840E-0015
x[3]=	[0.00081505200045489, 0.00081505200045508]	1.94743038969131E-0016
x[4]=	[-0.00057063465615305,-0.00057063465615292]	1.37354068633369E-0016
x[5]=	[1.01640170918098016, 1.01640170918098248]	2.32008422890173E-0015

Realizacja zmiennopozycyjnej arytmetyki przedziałowej

Przykład (cd.)

Na podstawie otrzymanego rozwiązania przedziałowego można jednak określić rozwiązanie danego układu z dokładnością do 14. miejsca po przecinku:

$$x_1 = -0{,}00771054612831, \quad x_2 = -0{,}10075588680675,$$
$$x_3 = \ \ 0{,}00081505200045, \quad x_4 = -0{,}00057063465615,$$
$$x_5 = \ \ 1{,}01640170918098.$$

Czy moglibyśmy podać rozwiązanie podanego układu z taką samą dokładnością przy zastosowaniu zwykłej arytmetyki zmiennopozycyjnej?


Koniec
wykładu!
EAN(74 z 74)