

# Zadanie 1

## Udowodnij, że CAUS $\subset$ PRAM

- Załóżmy przetwarzanie przyczynowo spójne.
- Dla każdego obrazu historii  $hv_i$  zachodzi zatem:

$$\forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} o1 \rightarrow o2 \Rightarrow o1 \mapsto_i o2$$



$$\forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} \left( \begin{array}{l} \exists_{p_j} o1 \rightarrow_j o2 \vee \\ \exists_{x \in X} (o1 = w(x)v \wedge o2 = r(x)v) \vee \\ \exists_{o \in O} (o1 \rightarrow o \rightarrow o2) \end{array} \right) \Rightarrow o1 \mapsto_i o2$$

- Zatem zachowana jest własność spójności PRAM:

$$\forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} \left( \begin{array}{c} \exists \\ p_j \end{array} o1 \rightarrow_j o2 \Rightarrow o1 \mapsto_i o2 \right)$$



## Zadanie 2

**Udowodnij, że spójność sekwencyjna jest bardziej restrykcyjna niż przyczynowa (SEQ  $\subset$  CAUS)**

Podpowiedź:

- Dowód niewprost
- Zastosować prawo zaprzeczenia implikacji

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

do definicji spójności przyczynowej

- Dla  $o_1$  i  $o_2$  żądanych przez różne procesy rozważyć możliwe kombinacje operacji odczytu i zapisu

# Rozwiązanie:

Dowód niewprost:

- Załóżmy, że kolekcja obrazów poszczególnych procesów spełnia własności spójności sekwencyjnej i nie spełnia własności spójności przyczynowej.
- Zatem dla pewnego  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$\begin{aligned} & \forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} (o1 \rightarrow o2 \wedge o1 \not\mapsto_i o2) \Leftrightarrow \\ & \forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} \left( \left( \begin{aligned} & \left( \exists_j o1 \rightarrow_j o2 \vee \exists_{x \in X} (o1 = w(x)v \wedge o2 = r(x)v) \vee \right. \right. \\ & \left. \left. \exists_{o \in O} (o1 \rightarrow o \rightarrow o2) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \wedge o1 \not\mapsto_i o2 \right) \right) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

# Rozwiązanie cd:

Rozważmy trzy przypadki:

1.

$$\forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} \left( \exists_j o1 \rightarrow_j o2 \wedge o1 \not\mapsto_i o2 \right)$$

Sprzeczność z definicją spójności sekwencyjnej.

2.

$$\forall_{o1, o2 \in O_i \cup OW} \left( \exists_{x \in X} (o1 = w(x)v \wedge o2 = r(x)v) \wedge o1 \not\mapsto_i o2 \right)$$

Sprzeczność z własnością uszeregowania legalnego.

# Rozwiązanie cd:

3. Załóżmy, że  $o1$  i  $o2$  są operacjami wywoływanymi przez różne procesy. Rozpatrzmy następujące przypadki:

**A.**  $o1 = w(x)v$  i  $o2 = w(y)u$

- Zależność pomiędzy dwiema operacjami zapisu przyczynowo zależnymi:

$$w(x)v \rightarrow r_j(x)v \rightarrow w_j(y)u.$$

- Ze sprzeczności wykazanej w pkt. 1 i 2 wynika implikacja:

$$w(x)v \mapsto_j r_j(x)v \mapsto_j w_j(y)u \Rightarrow w(x)v \mapsto_j w_j(y)u.$$

# Rozwiązanie cd:

- Z drugiego warunku definicji spójności sekwencyjnej ( $\forall w1, w2 \in OW: \forall_{i=1..n} w1 \mapsto_j w2 \vee \forall_{i=1..n} w2 \mapsto_j w1$ ), to  $w(x)v \mapsto_j w_j(y)u$  zachodzi dla każdego  $j = 1..n$ .
- Stąd, z indukcji:

$$\forall_{w1, w2 \in OW} \left( \exists_{w \in OW} w1 \rightarrow w \rightarrow w2 \Rightarrow \forall_{j=1..n} w1 \mapsto_j w2 \right)$$

Sprzeczność z założeniem.

# Rozwiązanie cd:

$$B. \quad o1 = w(x)v \text{ i } o2 = r_i(y)u$$

Możliwe przypadki przyczynowej zależności pomiędzy  $o1$  i  $o2$  są następujące:

$$w(x)v \rightarrow r_i(y)u \Leftrightarrow (w(x)v \rightarrow w(y)u) \vee$$

$$r_i(x)v \rightarrow_i r_i(y)u \vee$$

$$\exists o \in O: w(x)v \rightarrow o \rightarrow r_i(y)u).$$

Każdy z nich w następujący sposób prowadzi do sprzeczności:



# Rozwiązanie cd:

*i.*  $w(x)v \rightarrow w(y)u \Rightarrow w(x)v \mapsto_i w(y)u$  (z pkt. 3a) i

$w(y)u \rightarrow r_i(y)u \Rightarrow w(y)u \mapsto_i r_i(y)u$  (z pkt. 2)

*ii.*  $w(x)v \rightarrow r_i(x)v \Rightarrow w(x)v \mapsto_i r_i(x)v$  (z pkt. 2) i

$r_i(x)v \rightarrow_i r_i(y)u \Rightarrow r_i(x)v \mapsto_i r_i(y)u$  (z pkt. 1)

*iii.* Jeżeli przypadek  $\exists o \in O: w(x)v \rightarrow o \rightarrow r_i(y)u$  nie jest i ani ii, to można go zredukować do:

$w(x)v \rightarrow w(z)q \rightarrow r_i(z)q \rightarrow_i r_i(y)u.$

Stosując odpowiednio konkluzje z punktów 3a, 2 i 1, dostajemy sprzeczność.

# Rozwiązanie cd:

$$C. \quad o1 = r_i(x)v \text{ i } o2 = w(y)u$$

$$r_i(x)v \rightarrow w(y)u \Leftrightarrow r_i(x)v \rightarrow_i w_i \rightarrow w(y)u$$

- sprzeczność na podstawie punktów 1 i 3a.

