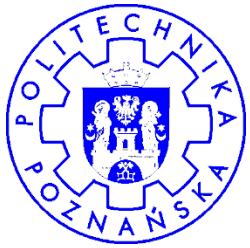


Teoretyczne podstawy algorytmów grafowych

Tomasz Głowacki
tglowacki@cs.put.poznan.pl

Zajęcia finansowane z projektu "Rozwój i doskonalenie kształcenia na Politechnice Poznańskiej w zakresie technologii informatycznych i ich zastosowań w przemyśle" POKL.04.01.02-00-189/10

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Grafy - definicje

- Parę G = (V,A), gdzie $A \subseteq VxV$, nazywamy **grafem skierowanym**, gdzie V jest zbiorem wierzchołków a A zbiorem łuków
- Parę G = (V,E), gdzie $E \subseteq \{\{v_i,v_j\} : v_i \in V \wedge v_i \in V\}$ nazywamy **grafem nieskierowanym**, przy czym V to zbiór wierzchołków oraz E to zbiór krawędzi

Grafy - pojęcia

- **Łańcuchem x-y w grafie G jest sekwencja:**

  $x=v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,e_n,v_n=y$

  - **Długość łańcucha *n* to liczba zawartych w nim krawędzi**
  - **Jeśli x=y oraz n>1 to łańcuch nazywany jest zamkniętym w przeciwnym wypadku jest to łańcuch otwarty**
- **Jeśli żadna krawędź nie powtarza się w łańcuchu więcej niż 1 raz to taki łańcuch nazywany jest drogą z x do y**
- **Zamknięty łańcuch będący drogą nazywany jest obwodem**
- **Łańcuch otwarty, w którym nie powtarza się żaden wierzchołek więcej niż raz nazywany jest ścieżką**
- **Zamknięta ścieżka nazywana jest cyklem**

Grafy rozpinające

- **Podgraf $G_2(V_2,E_2)$ jest grafem rozpinającym nieskierowanego grafu $G_1(V_1,E_1)$ jeśli G_2 zawiera wszystkie wierzchołki grafu G1 i podzbiór jego krawędzi:**
  - $V_2=V_1$
  - $E_2 \subseteq E_1$

Grafy indukowane

- Podgraf $G_2(V_2,E_2)$ jest grafem indukowanym nieskierowanego grafu $G_1(V_1,E_1)$, jeśli G_2 zawiera podzbiór wierzchołków grafu G_1 oraz wszystkie krawędzie grafu G_1 będące w incydencji z wierzchołkami ze zbioru V_2
  - $V_2 \subseteq V_1$
  - $E_2 \subseteq E_1$

Zadanie 1 - grafy

Dany jest graf G(V,E)

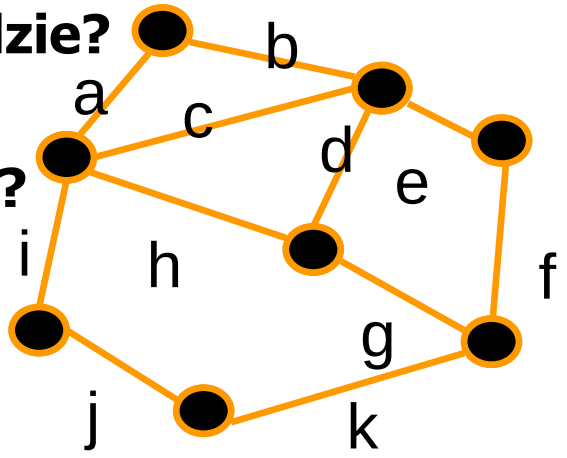
1) Ile jest grafów rozpinających grafu G?

2) Ile jest grafów indukowanych grafu G?

3) Ile jest grafów indukowanych grafu G, które są grafami rozpinającymi grafu G?

4) Ile jest grafów rozpinająców grafu G, które są lasami i mają nie więcej niż 3 krawędzie?

5) Ile jest grafów rozpinających grafu G, które są lasami i posiadają 4 krawędzie ?



Ścieżka Hamiltona

- **Ścieżka Hamiltona w grafie nieskierowanym G = (V,E) to ścieżka przechodząca przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz**

Droga Eulera

- **Droga Eulera w grafie nieskierowanym G = (V,E) jest to otwarta droga między dwoma wierzchołkami grafu, która przechodzi przez każdą krawędź grafu G dokładnie raz**
- **Obwód Eulera (nazywany również cyklem Eulera) to obwód, który przechodzi przez każdą krawędź dokładnie raz**

Obwód Eulera- warunek istnienia obwodu

- **Warunkiem istnienia obwoduEulera w grafie G jest:**
  - **Spójność grafu**
  - **Dla grafu nieskierowanego: stopień każdego wierzchołka jest parzysty**
  - **Dla grafu skierowanego dla każdego wierzchołka liczba łuków wchodzących do tego wierzchołka jest równa liczbie łuków wychodzących z tego wierzchołka**

Cykl Eulera – algorytm (pseudokod)

```
procedure EulerCycle(v: Integer);
 {znajduje cykl Eulera poczawszy od wierzch. v; nie przechodzi przebytych krawedzi}
 begin
  w:=v;
  Put_On_Stack(w);
  repeat    {znajdowanie dowolnego cyklu}
   w:=Get_Next_Succ(w)
   Put_On_Stack(w);
  until w=v;   {znaleziono cykl}
  Get_From_Stack(w);
  repeat  {przeglądanie znalezionego cyklu}
   if No_Next_Succ(w) then
     Put_On_List(w)
   else
     EulerCycle(w);
   Get_From_Stack(w);
  until w=v;
  Put_On_List(v);
 end;
```

Zadanie 2 – cykl Eulera

- **Liczba wierzchołków: 7**
- **Krawędzie:**
  - **(1,2)**
  - **(1,3)**
  - **(2,4)**
  - **(3,4)**
  - **(4,7)**
  - **(6,7)**
  - **(4,6)**
  - **(3,6)**
  - **(3,5)**
  - **(5,6)**

Zadanie 3 – reprezentacja grafu

- **Obliczyć złożoność algorytmu szukania cyklu Eulera w grafie skierowanym, przy założeniu że graf jest reprezentowany jako:**
  - **Lista następników**
  - **Macierz sąsiedztwa**

Najkrótsza ścieżka w grafie – algorytm Dijkstry

```
Procedure Dijkstra(G,w,s)
begin
 foreach(v)
 begin
      d[v] := nieskończoność;
      poprzednik[v] := niezdefiniowane;
 end;
 d[s] := 0;
 Q := V;
 While (Q_is_not_empty)
      begin
      u := Get_min(Q)
      foreach (w – sąsiad u)
      begin
            if d[v] > d[u] + w(u, v) then d[v] := d[u] + w(u, v);
            poprzednik[v] := u;
      end;
end;
```

Zadanie 3 – reprezentacja kolejki

- Obliczyć złożoność algorytmu szukania cyklu Eulera w grafie skierowanym, przy założeniu reprezentacji grafu jako:
  - Macierzy sąsiedztwa
  - Listy następników
- Obliczyć złożoność algorytmu szukania cyklu Eulera w grafie skierowanym, przy założeniu wykorzystania do implementacji:
  - Zwykłej tablicy
  - kopca

Zadanie 4 – szukanie najkrótszej ścieżki w grafie

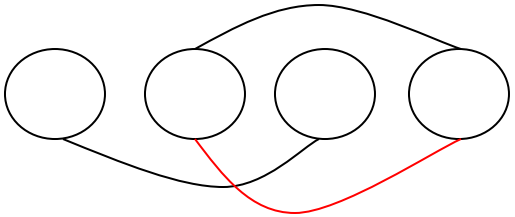
- Liczba wierzchołków: 5
- Łuki:
  - (1,2) waga 1
  - (2,4) waga 7
  - (2,3) waga 3
  - (1,3) waga 4
  - (3,4) waga 2
  - (4,5) waga 3
  - (3,5) waga 7
  - (1,5) waga 11

Kolorowanie grafu

- Wierzchołkowe kolorowanie grafu G=(V,E) polega na przydzieleniu każdemu wierzchołkowi grafu G koloru w taki sposób, że jeśli $\{v_1,v_2\}\in E$, to v_1 oraz v_2 mają różne kolory
- Problem pokolorowania grafu najmniejszą możliwą liczbą kolorów jest silnie NP-trudny

Zadanie 5 – kolorowanie grafów

- Kolorowa Wyspa jest jednym z najważniejszych kurortów Grafolandii. Wyspa jest bardzo długa i bardzo wąska. Narzuca to specyficzną urbanistykę Wyspy – miasta budowane są w ciągu, jedno za drugim.
- Niektóre miasta mają zostać połączone autostradami. Autostrada łącząca dwa miasta może zostać poprowadzona łukiem nad lub pod tymi miastami.
- Sprawdzić, czy dla danej Urbanistyki – listy miast i listy planowanych połączeń – istnieje możliwość takiego wybudowania autostrad, aby autostrady nie krzyżowały się.



Zadanie 5 – kolorowanie grafu

- **Liczba miast: 11**
- **Lista połączeń:**
  - **(1,5)**
  - **(2,4)**
  - **(3,7)**
  - **(4,6)**
  - **(6,8)**
  - **(6,9)**
  - **(7,8)**
  - **(7,10)**
  - **(8,11)**
  - **(9,10)**
  - **(9,11)**

Adjointy (1)

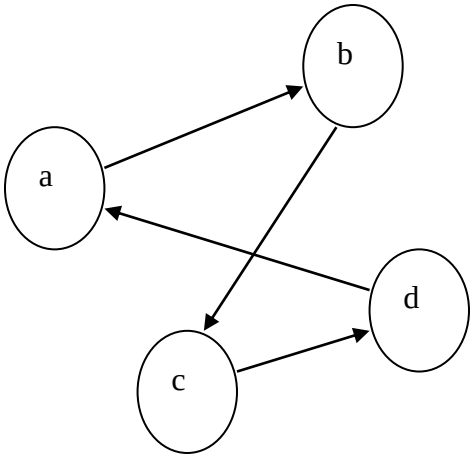
- **Definicja 1: Skierowany graf jest skierowanym p-grafem jeśli dla każdej pary wierzchołków (v_i,v_j) jest nie więcej niż p łuków z v_i do v_j**
- **Definicja 2: Adjoint H = (A,U) skierowanego grafu G = (V,A) jest skierowanym 1-grafem ze zbiorem wierzchołków A. Istnieje łuk między a_1 i a_2 w grafie H wtedy i tylko wtedy gdy końcowy wierzchołek łuku a_1 w grafie G jest początkowym wierzchołkiem łuku a_2 w G.**
- **Definicja 3: Graf jest skierowanym grafem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy jest adjointem pewnego grafu**

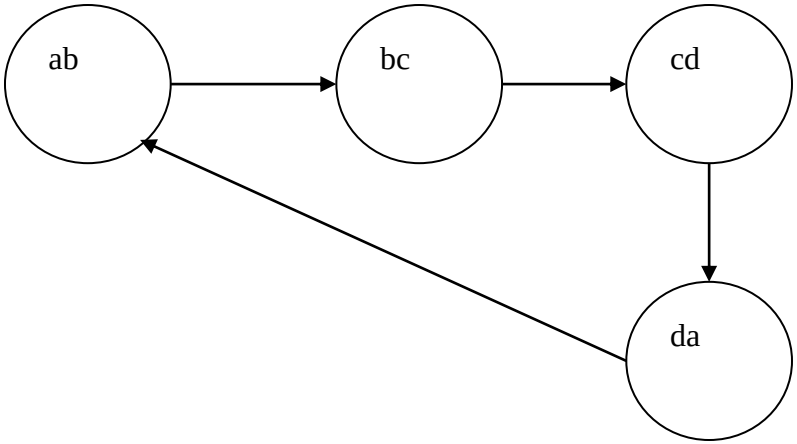
Adjointy (2)

- **1-graf H= (A,U) jest adjointem wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi zależność:**

  $N^+(a_i) \cap N^+(a_j) \neq \emptyset \rightarrow N^+(a_i) = N^+(a_j)$

- **Definicja 4: Jeśli H jest adjointem skierowanego grafu G to istnieje cykl Eulera w G wtedy i tylko wtedy gdy istnieje cykl Hamiltona w H**

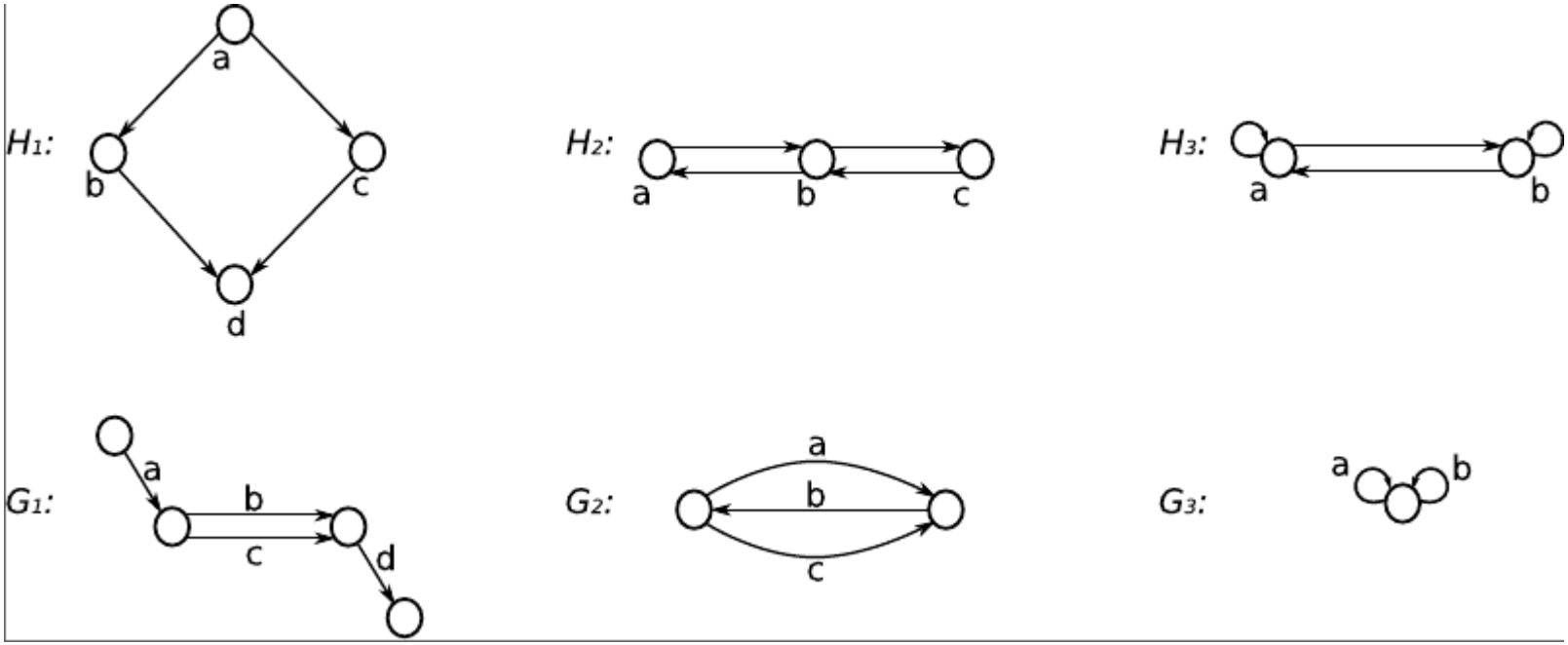




Zadanie 6 – adjoint grafu

- **Liczba wierzchołków: 8**
- **Łuki:**
  - **(1,2)**
  - **(1,3)**
  - **(1,7)**
  - **(2,3)**
  - **(3,4)**
  - **(3,5)**
  - **(4,6)**
  - **(5,7)**
  - **(6,7)**

Znajdowanie oryginalnego grafu dla grafu sprzężonego



Zadanie 7 – szukanie cyklu Hamiltona (adjointy)

- **Liczba wierzchołków: 6**
- **Łuki:**
  - **(1,4)**
  - **(2,4)**
  - **(4,5)**
  - **(5,6)**
  - **(6,3)**
  - **(3,6)**
  - **(5,1)**
  - **(3,1)**

Zastosowanie grafów - bankowość

- Instytucje finansowe (banki, fundusze) są zobligowane do raportowania do Generalnego Inspektora Informacji Finansowej transakcji:
  - Powiązanych
  - Podejrzanych
  - Ponadprogowych
- Jako transakcję uznaje się:
  - Wpłatę gotówki na konto instytucji finansowej
  - Wypłatę gotówki z konta
  - Przelew na konto, którego właścicielem jest osoba druga
- Transakcje analizuje się w kontekście właściciela danego konta jak i osoby wykonującej tą transakcję

Transakcje PPP

- Transakcje **ponadprogowe** to transakcje, które przekraczają pewną sumę pieniędzy (np. transakcje powyżej 15 tys. E)
- Transakcje **podejrzane** to transakcje, które odbiegają od standardowych transakcji (np. kilka dużych w różnych miastach w ograniczonym okresie czasowym)
- Transakcje **powiązane** to transakcje tego samego rodzaju (wpłata/ wypłata), lub przelewy, których adresatem jest ta sama osoba; transakcje są powiązane jeśli zostaną wykonane w ograniczonym okresie czasowym

Transakcje – PPP

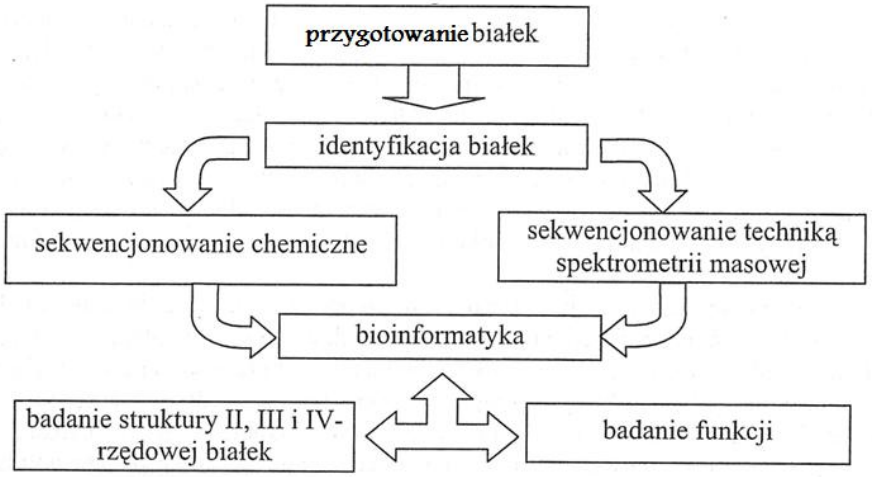
- **Modelowanie transakcji podejrzanej: 4 wypłaty o wartości co najmniej 1000 zł każda, w miejscach odległych od siebie o 50 km, w zadanym okresie czasowym (2 dni)**
  - **Wierzchołki: transakcje**
  - **2 wierzchołki są incydentne, jeśli odległość między bankomatami, w ktorych dokonano wpłaty/ wypłaty wynosi co najmniej 50 km**
  - **Wagą łuku jest odległość czasowa między dwoma transakcjami**
  - **Jeśli istnieje w grafie ścieżka nieprzekraczająca zadanej długości (2 dni), zawierająca co najmniej zadaną liczbę wierzchołków, to transakcje są raportowane**

Transakcje – PPP

- **Modelowanie transakcji powiązanej: wpłaty, których suma przekracza 15 tys. E i zostały wykonane w czasie nie dłuższym niż 3 miesiące**
  - **Wierzchołki: transakcje; każdy wierzchołek posiada swoją wagę – wartość transakcji**
  - **Graf pełen**
  - **Wagą łuku jest odległość czasowa między dwoma transakcjami**
  - **Jeśli istnieje w grafie ścieżka nieprzekraczająca zadanej długości (90 dni), zawierająca wierzchołki, których waga przekracza szukaną wartość (15 tys. E), to transakcje są raportowane**

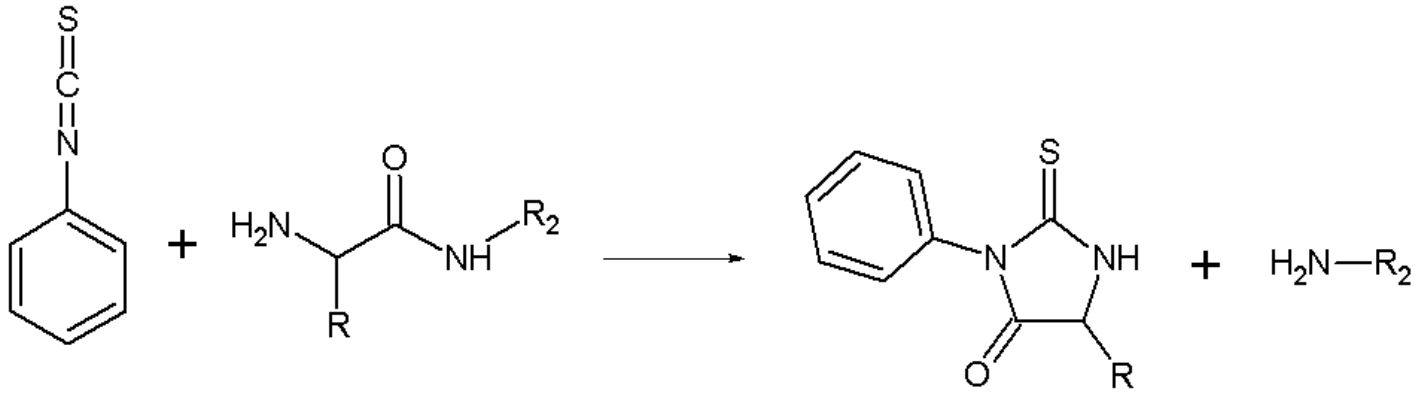
Zastosowanie grafów - biochemia

- Peptydy to związki chemiczne składające się z 20 typów aminokwasów połączonych w długie łańcuchy za pomocą wiązań peptydowych
- Sekwencjonowanie peptydów to ustalenie kolejności aminokwasów w łańcuchu białkowym, jest pierwszym krokiem w identyfikacji białek i w badaniu ich funkcji



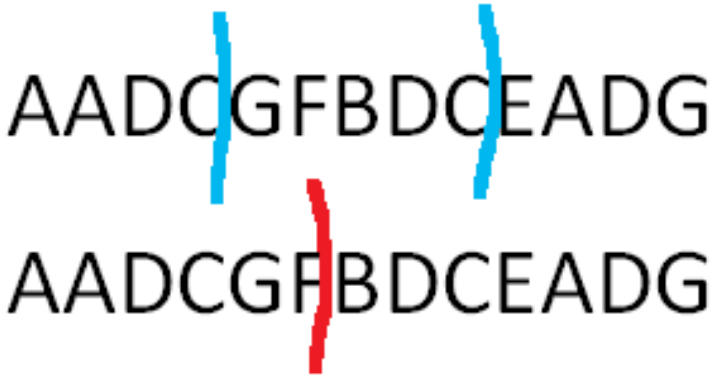
Sekwencjonowanie chemiczne

- Degradacja Edmana pozwala na oderwanie od peptydu N-końcowego aminokwasu
- Pochodna aminokwasu może zostać rozpoznana przy pomocy elektroforezy
- Degradacja Edmana może być powtarzana iteracyjnie
- Poważne ograniczenie – do 50 aminokwasów



Asemblacja – sformułowanie problemu chemicznego

- Podział białka do dwóch naczyń
- Wykorzystanie dwóch endopeptydaz

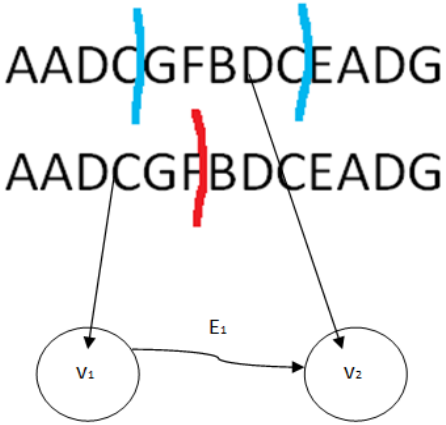


Asemblacja – reprezentacja grafowa

- Każdemu krótkiemu peptydowi odpowiada wierzchołek w G
- Wierzchołki są etykietowane odpowiadającymi im sekwencjami
- Wagi łuków w grafie G spełniają następujące równanie:

$w: A \to N,\ \ w(v_i, v_j) = p$ **gdzie p spełnia warunek:**

$$\forall_{q \in \{1,2,\ldots,p\}}\ s_i(k-1+q) = s_j(q) \wedge s_i(k-1) = C \quad dla\ \ pewnego\ \ k \in \{1,2,\ldots,|S_i|\}$$



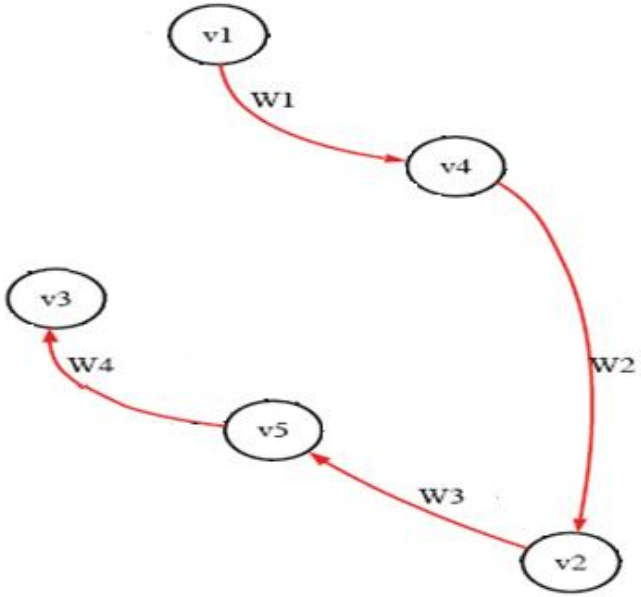
Asemblacja – sformułowanie problemu obliczeniowego

- Rozwiązanie: ścieżka Hamiltona w grafie G
- Graf G jest adjointem pewnego grafu H
- Problem znalezienia ścieżki Hamiltona w grafie G może zostać rozwiązany poprzez znalezienie drogi Eulera w oryginalnym grafie H

Reprezentacja eksperymentu w postaci grafu

```
v1  ABBC
v2  BABDBBBC
v3  AB
```

```
v4  ABBCBABD
v5  BBBCAB
```



Sekwencja.

```
ABBC
ABBCBABD
     BABDBBBC
          BBBCAB
               AB
```

Wagi.

```
W1 = [1, 2, 1, 0]
W2 = [1, 2, 0, 1]
W3 = [0, 3, 1, 0]
W4 = [1, 1, 0, 0]
```

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 8 – asemblacja peptydów

- W wyniku wykorzystania w procesie trawienia peptydu dwóch endopeptydaz: trypsyny i chymotrypsyny, otrzymano następujące łancuchy peptydowe:
  - Cys-Try-Ala-Val-Liz-Cys-Val-Phe-Ala (trypsyna)
  - Cys-Try (chymotrypsyna)
  - Ala-Val-Liz-Cys-Val-Phe (chymotrypsyna)
  - Cys-Val-Phe-Ala (chymotrypsyna)
  - Cys-Try-Ala-Val-Liz (trypsyna)
- Należy przedstawić model grafowy dla powyższego problemu oraz znaleźć wzór tego peptydu

Zastosowanie grafów - lingwistyka

- **Problem rozpoznawania bytów nazwanych (NER) polega na przyporządkowaniu tokenom (obserwacjom, wyrazom) jednej z predefinionych klas.**

Zbyszek siedzi na krześle.

Warunkowe pola losowe - wprowadzenie

- **Definiuje prawdopodobieństwo warunkowe $p(Y \mid X)$ nad zbiorem obserwacji X oraz stanów Y**
- **Funkcje tranzycji:**

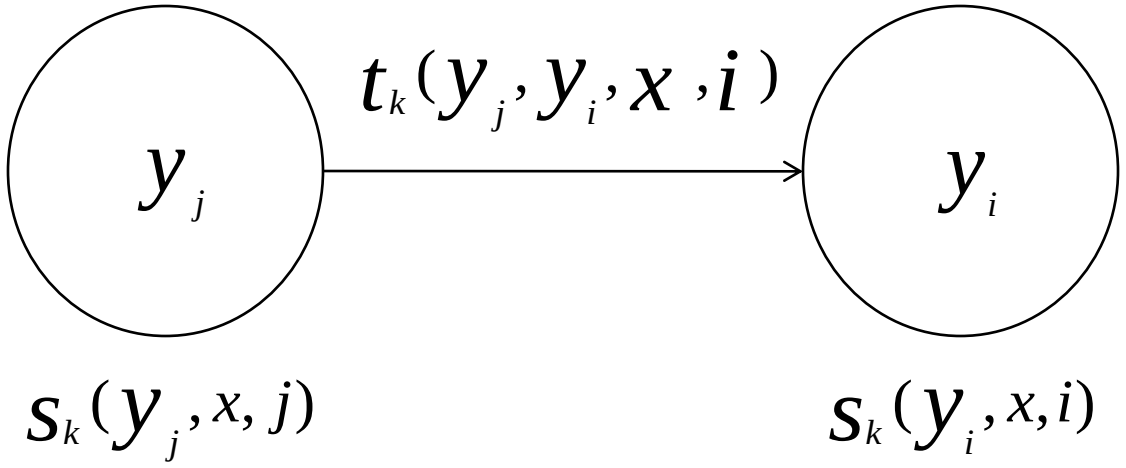
$$t_k(y_j, y_i, x, j) = \begin{cases} 1 & \text{- jeśli } y_j\text{=osoba oraz } y_i\text{=przedmiot} \\ 0 & \text{- w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

- **Funkcje stanów:**

$$s_k(y_i, x, i) = \begin{cases} 1 & \text{- jeśli i-ta obseracja rozpoczyna się z się z wielkiej litery} \\ 0 & \text{- w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Warunkowe pola losowe – reprezentacja grafowa

- **Warunkowe pola losowe mogą być przedstawione jako graf skierowany, w ktorym:**
  - **Wierzchołki odpowiadają stanom kolejnych obserwacji (odnoszą się do nich funkcje stanów)**
  - **Łuki odpowiadają zależnościom pomiędzy stanami dwóch obserwacji (odnoszą się do nich funkcje tranzycji)**



Warunkowe pola losowe – obliczenie

- **Funkcje stanów s_j oraz funkcje tranzycji t_j mogą zostać uogólnione do funkcji**

$$f_k(y_j, y_i, x, i) = s_k(y_j, y_i, x, i) = s_k(y_i, x, i)$$

$$f_k(y_j, y_i, x, i) = t_k(y_j, y_i, x, i)$$

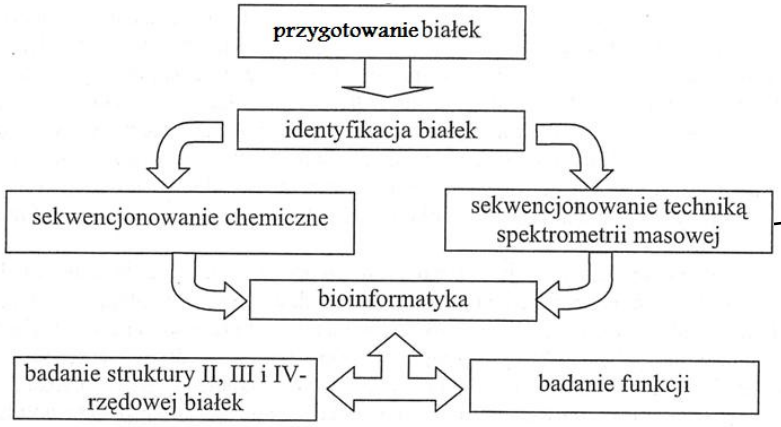
$$F_k(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_j(y_j, y_i, x, i)$$

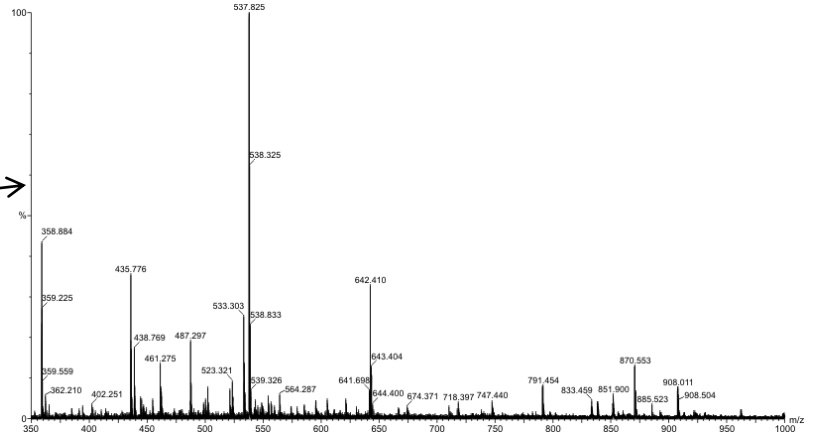
- **Znormalizowane łączne prawdopodobieństwo dla warunkowych pól losowych ma postać:**

$$p(y \mid x, \lambda) = \frac{1}{Z(x)} \exp\left(\sum_j \lambda_j F_j(y, x)\right)$$

Zastosowanie grafów – sekwencjonowanie (chemia)

- **Spektroskopia to uniwersalna metoda analityczna do badania związków budowy chemicznych:**
  - **Następuje podział i jonizacja fragmentów peptydu**
  - **Powstaje widmo masowe poprzez rozdzielenie strumienia jonów wg stosunku ich masy i ładunku**





KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

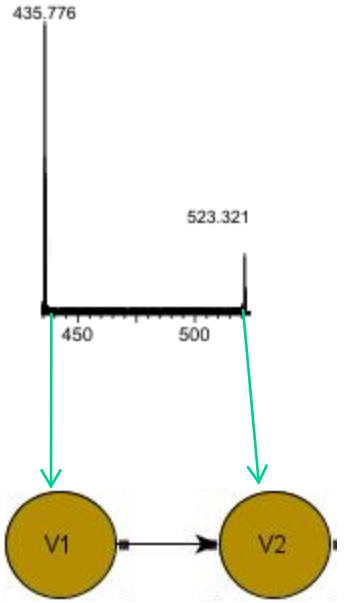
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Koncepcja rozwiązania problemu

- **Każdemu pikowi odpowiada wierzchołek w grafie G**
- **M(v_i) – względna masa jonu związanego z wierzołkiem v_i**
- **Istnieje łuk** (v_i, v_j)**, gdy** $M(v_j) - M(v_i) = C_n$
  gdzie $C_n = C_{n-1} + R_i$

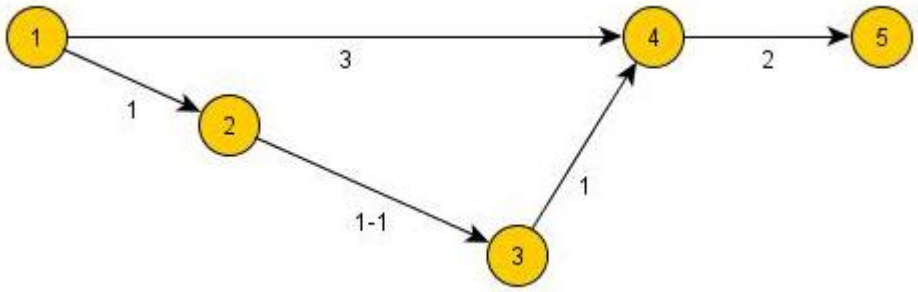
  $$C_1 = R_i$$

  gdzie R jest zbiorem mas reszt aminokwasowych a R_i masą i-tej reszty aminokwsowej.



Koncepcja rozwiązania problemu

- **Rozwiązaniem problemu jest najkrótsza ścieżka w grafie G przechodząca przez możliwie wiele wierzchołków (algorytm Dikstry)**
- **Waga łuków wchodzących do wierzchołków reprezentujących te piki, dla których poprawność została dodatkowo zweryfikowana, zostaje obniżona o 1**



Zadanie 9 – algorytm oparty na teorii grafów

- Dana jest mapa Grafolandii, przedstawiająca położenie wszystkich miast w kraju oraz możliwych między nimi połączeń
- Nie zawsze istnieje bezpośrednie połączenie między dwoma miastami, jednak jeśli takie połączenie istnieje to takie miasta nazywamy miastami sąsiednimi
- W Grafolandii mają się odbyć wybory parlamentarne. Aby czuwać nad prawidłowym przebiegiem wyborów do każdego z miast zostanie wysłany jeden przedstawiciel – członek jednej z kilku partii ubiegających się o miejsce w parlamencie
- Partie darzą się ograniczonym zaufaniem – działacze partyjni chcieliby uniknąć sytuacji aby w miastach sąsiednich znajdowali się przedstawiciele tej samej partii
- Należy zaproponować algorytm, który zminimalizuję liczbę partii, które będą czuwać nad prawidłowym przebiegiem głosowania
- Należy zaproponować:
  - Matematyczne sformułowanie problemu
  - Reprezentację problemu w teorii grafów
  - Algorytm dokładny do rozwiązania powyższego problemu
  - Algorytm ewolucyjny do rozwiązania powyższego problemu

Drzewa

- Graf G = (V,E) jest grafem nieskierowanym bez pętli własnych. Graf G jest nazywany jest drzewem jeśli jest grafem spójnym i nie zawiera cykli
- Jeśli graf składa się z kilku składowych i każda z nich jest drzewem to taki graf nazywamy lasem
- Graf G = (V,A) jest nazywany drzewem skierowanym jeśli graf nieskierowany skojarzony z G jest drzewem
- Skierowane drzewo nazywamy drzewem ukorzenionym jeśli istnieje dokładnie jeden wierzchołek $r \in V$, nazywany korzeniem taki że $in(r)=0$ oraz dla każdego innego wierzchołka $v \in V$, $in(v)=1$

Zadanie 10

- Dany jest nieskierowany acykliczny i ważony spójny graf G(V,A)
- Dane jest m par wierzchołków (v_i,v_j)
- Obliczyć sumę odległości pomiędzy m parami wierzchołków w tym grafie

Rozwiązanie nr 1

- **Obliczenie odległości pomiędzy dwoma dowolnymi wierzchołkami grafu – przeglądanie grafu wszerz O(n)**
- **Złożoność obliczeniowa algorytmu wynosi O(mn)**

Rozwiązanie nr 2

- Wybór dowolnego wierzchołka, który staje się korzeniem drzewa (ukorzenienie drzewa)
- Dla każdej pary wierzchołków znajduje się ich najniższego wspólnego przodka p – złożoność O(h) – gdzie h to wysokość drzewa
- Odległość d pomiędzy dwoma wierzchołkami jest wyrażona wzorem:

$$odl = poziom(v_1) + poziom(v_2) - 2poziom(p)$$

- Złożoność obliczeniowa algorytmu wynosi O(mh)

Rozwiązanie nr 3

- Wybór dowolnego wierzchołka, który staje się korzeniem drzewa (ukorzenienie drzewa)
- Ponumerowanie wierzchołków metodą BFS - O(n)
- Każda krawędź w grafie jest transformowany do odpowiadającej jej pary łuków; w tak zmodyfikowanym grafie znajduje się obwód Eulera O(n)
- Najniższy wspólny przodek to wierzchołek znajdujący się w cyklu Eulera pomiędzy v_1 oraz v_2 i posiadający najmniejszy numer

Rozwiązanie nr 3 - preprocesing

- Listę wierzchołków w cyklu Eulera A dzieli się na rozłączne ciągi S_j zawierające I=log(n)/2 elementów
- Dla każdego ciągu S_j tworzy się tablicę B[j] zawierającą n/I elementów; k-ty element B[j] zawiera wskaźnik na najmniejszy element w A spośród 2^k kolejnych przedziałów – obliczanie wartości kolejnych elementów B[j] za pomocą funkcji rekurencyjnej - O(N/I*log(N/I)) czyli O(n)
- Tworzy się tabelę A' w następujący sposób:

  A'[i] = poziom(A[i]) – poziom(A[i-1])

  elementy A' przyjmują wartości ze zbioru {-1,1}
- Utworzenie macierzy D: dla każdej możliwej sekwencji I kolejnych elementów A' określa się indeksy minimalnych elementów pomiędzy dowolną parą elementów w tej sekwencji – $O(2^I I^2)$ czyli O(n)

Rozwiązanie nr 3 – szukanie najmniejszego wspólnego przodka

- Tworzy się listę pom określającą dowolną pozycję dla każdego wierzchołka w cyklu Eulera: np. pom[5]=7 oznacza, że wierzchołek o numerze 5 występuje na 7 pozycji w cyklu Eulera
- Znalezienie pozycji v_1 oraz v_2 w cyklu Eulera – O(1)
- Znalezienie najmniejszego elementu pomiędzy pozycją v_1 oraz v_2 – O(1):
  - Jeśli v_1 i v_2 znajdują się w tym samym zbiorze S_j, to sprawdza się w D indeks wierzchołka o minimalnej wartości w tym zbiorze pomiędzy pozycją wierzchołka v_1 a v_2
  - Jeśli v_1 i v_2 znajdują się w tym różnych zbiorach (odpowiednio S_1 oraz S_2) to wybiera się najmniejszy element spośród:
    - wierzchołek o minimalnej wartości pomiędzy pozycją wierzchołka v_1 oraz końcem przedziału S_1
    - wierzchołek o minimalnej wartości pomiędzy pozycją początkiem S2 a pozycją wierzchołka v_2
    - Wierzchołek o inimalnej wartości z co najwyżej 2 przedziałów B[j] w pełni pokrywających elementy pomiędzy zbiorem S_1 i S_2

- Złożoność obliczeniowa algorytmu wynosi O(n+m)