

POCHODNE FUNKCJI

zadania

(źródło: W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa)

Obliczyć pochodne podanych funkcji.

1. $y = 5x^{15} - x^2 + \frac{x}{3} - 2$
2. $y = 3x^{7/3} - 4x^{13/4} + \frac{4}{7}x^{-1/2} + 7^{3/2}$
3. $y = \sqrt{x} - \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3} - 2\sqrt{x^3}$
4. $y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$
5. $y = \frac{8x^3}{x^3 + x - 1}$
6. $y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$
7. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$
8. $y = (4x^2 - 5x + 13)^5$
9. $y = \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}$
10. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$
11. $y = \frac{3\sqrt{x}}{x^2+1}$
12. $y = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-7x+12}$
13. $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$
14. $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$
15. $y = 2x + \sin 2x$
16. $y = 4 \cos^5 \frac{x}{4}$
17. $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$
18. $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
19. $y = x^2 e^{2x} \sin x$
20. $y = 2 \sin^3 \sqrt{\frac{3}{x}}$
21. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{x+2}\sqrt{x}}$
22. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$
23. $y = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x$
24. $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$
25. $y = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$
26. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
27. $y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$
28. $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$
29. $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)\right] - x$
30. $y = 3e^{2 \sin^3 x}$
31. $y = (10x^2 - 1)e^{3x}$
32. $y = \left(x + k\sqrt{1-x^2}\right)e^{k \arcsin x}$
33. $y = 7 \cdot 5^{10x}$
34. $y = \ln \frac{30}{x+3}$
35. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
36. $y = 2 \ln \frac{3}{x + \sqrt{x^2-4}}$
37. $y = \ln|\ln|x||$
38. $y = \log_x \ln x$
39. $y = x^{5x}$
40. $y = 10x^{-3x}$
41. $y = 3x^{\cos x}$

$$42. y = x^{\frac{1}{\ln x}}, \quad x > 0$$

$$43. y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$44. y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$45. y = x^{e^x}, \quad x > 0$$

Obliczyć pochodne rzędu drugiego dla poniższych funkcji.

$$46. y = (\arcsin x)^2$$

$$47. y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$$

$$48. y = xe^{\sin x}$$

Znaleźć pochodne rzędu trzeciego podanych funkcji.

$$49. y = \sqrt[5]{x^3}$$

$$50. y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$51. y = \sin(1-3x)$$

Obliczyć pochodne dy/dx funkcji określonych podanymi równaniami parametrycznymi.

$$52. x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}$$

$$53. x = \frac{1}{t+1}, \quad y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$$

$$54. x = t^2 + 2t, \quad y = \ln(t+1)$$

$$55. x = \cos 2t, \quad y = \sin^2 t$$

$$56. x = \cos t \sqrt{\cos 2t}, \quad y = \sin t \sqrt{\cos 2t}$$

$$57. x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \quad y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$$58. x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \sin t,$$

$$y = \sin t + \cos t$$

$$59. x = e^{at}, \quad y = e^{-at}$$

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$60. y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Obliczyć pochodne rzędu drugiego d^2y/dx^2 funkcji określonych poniższymi równaniami parametrycznymi.

$$61. x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t$$

$$62. x = e^{-3t}, \quad y = e^{3t}$$

$$63. x = a \ln t, \quad y = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right), \quad a > 0$$

$$64. x = \ln t, \quad y = \frac{1}{1-t}$$

$$65. x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln(1+t^2)$$

66. Wykazać, że krzywa

$$y(x^2 + a^2) = a^2(a - x)$$

ma trzy punkty przegięcia leżące na jednej prostej.

67. Dobrać α tak, aby krzywa

$$y = x^3 + \alpha x^2 + 1$$

miała punkt przegięcia przy $x = 1$.

68. Zbadać, przy jakiej wartości α krzywa

$$y = x^4 + \alpha x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

będzie wklęsła.