

PRZEBIEG ZMIENNOŚCI FUNKCJI

zadania

(źródło: W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. I, PWN, Warszawa)

Zbadać przebieg zmienności funkcji.

1. $y = ax^2 + bx + c$

2. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

3. $y = x^3(x-1)(x-2)^2$

4. $y = \frac{1}{1+x^2}$

5. $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

6. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$

7. $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 10x + 3}$

8. $y = x - \frac{4}{x^2}$

9. $y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$

10. $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

11. $y = \sin^2 x + \cos x$

12. $y = x + \cos x$

13. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

14. $y = 2|x| - x^2$

15. $y = \frac{x^2 + 2x + 25}{(x+1)^2}$

16. $y = \frac{15x^2 - 13x - 20}{8x^2 + 10x - 7}$

17. $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

18. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$

19. $y = x^{2/3} + (x-2)^{2/3}$

20. $y = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

21. $y = x\sqrt{4x - x^2}$

22. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

23. $y = x^2\sqrt{36 - x^2}$

24. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

25. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

26. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

27. $y = x\sqrt{-x^2 + 8x + 14}$

28. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

29. $y = \cos^2 x + 2\sin^2 x$

30. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$

$$31. \quad y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$32. \quad y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$33. \quad y = \sin 2x + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$35. \quad y = \sin^2 x \cos x$$

$$36. \quad y = \sqrt{\sin x^2}$$

$$37. \quad y = \sqrt{1 - \cos x}$$

$$38. \quad y = x - 2 \arctg x$$

39. Zbadać przebieg zmienności pola prostokąta o stałym obwodzie $2p$ w zależności od boku prostokąta.

40. Zbadać przebieg zmienności objętości stożka obrotowego wpisanego w kulę o promieniu R .

41. Jakie wymiary powinno mieć naczynie kształtu otwartego walca obrotowego o danej pojemności V , gdy przy danej grubości ścianek a chcemy zużyć jak najmniej materiału?

42. Statek płynący na południe z prędkością 10 węzłów przecina w punkcie A kurs drugiego statku, który płynie z prędkością 15 węzłów. Gdy pierwszy statek był w punkcie A , drugi znajdował się w odległości 30 mil morskich przed tym punktem. W jakiej chwili (w jakim czasie) odległość między statkami jest najmniejsza?

43. Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny a % tlenu i $(100 - a)$ % azotu w temperaturze 1600°C i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$x = \sqrt{Ka(100 - a)} - 25K,$$

gdzie K oznacza stałą równowagi reak-

cji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Obliczyć, przy jakiej procentowej zawartości tlenu a % w mieszaninie wydajność tlenku azotu NO będzie maksymalna.

44. Puszka do konserw w postaci walca o pojemności 54π ma być tak wykonana, by została zużyta minimalna ilość blachy (minimum powierzchni). Wyznaczyć promień r i wysokość h puszki.

45. W kulę o promieniu R jest wpisany walec obrotowy. Obliczyć, przy jakiej wartości promienia r podstawy walca pole jego powierzchni bocznej S osiąga maksimum.

46. W kulę o promieniu R jest wpisany prostopadłościan, którego podstawa ma pole S . Obliczyć wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

47. Natężenie prądu I w obwodzie zawierającym oporność czynną R , indukcyjność L i pojemność C połączone w szereg wyraża się wzorem

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

gdzie U oznacza napięcie prądu zmiennego przyłożonego do obwodu. Obliczyć, dla jakiej wartości pulsacji ω natężenie prądu I w danym obwodzie osiąga maksimum.

48. Prądnicą o napięciu 110 V przesyła energię elektryczną linią o oporze 22Ω . Przy natężeniu prądu I moc dostarczona odbiornikowi (w watach) wynosi

$$P = 110I - 22I^2.$$

Wyznaczyć maksymalną moc, jaka może być przesyłana tą linią.

49. W daną kulę o promieniu r wpisano stożek, którego wierzchołek leży w środku kuli, a podstawa jest równoległa do podstawy półkuli. Zbadać przebieg zmienności objętości V tego stożka.