Korelacja i regresja

Wojciech Kotłowski

Statystyka i analiza danych 2019/2020

5.05.2020

Miary populacyjne

- **Kowariancja**:

$$C(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

  Mierzy **zależność liniową** dwóch zmiennych losowych.
  Szczególny przypadek: wariancja $D^2[X] = C(X,X)$.

- **Korelacja** – unormowana kowariancja:

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{D[X]D[Y]}, \qquad \rho(X,Y) \in [-1,1]$$

  Jeśli X, Y – niezależne, to $\rho(X,Y) = 0$ (ale nie odwrotnie!)

Miary próbkowe

Dla zbioru n par $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$:

- **Kowariancja**:

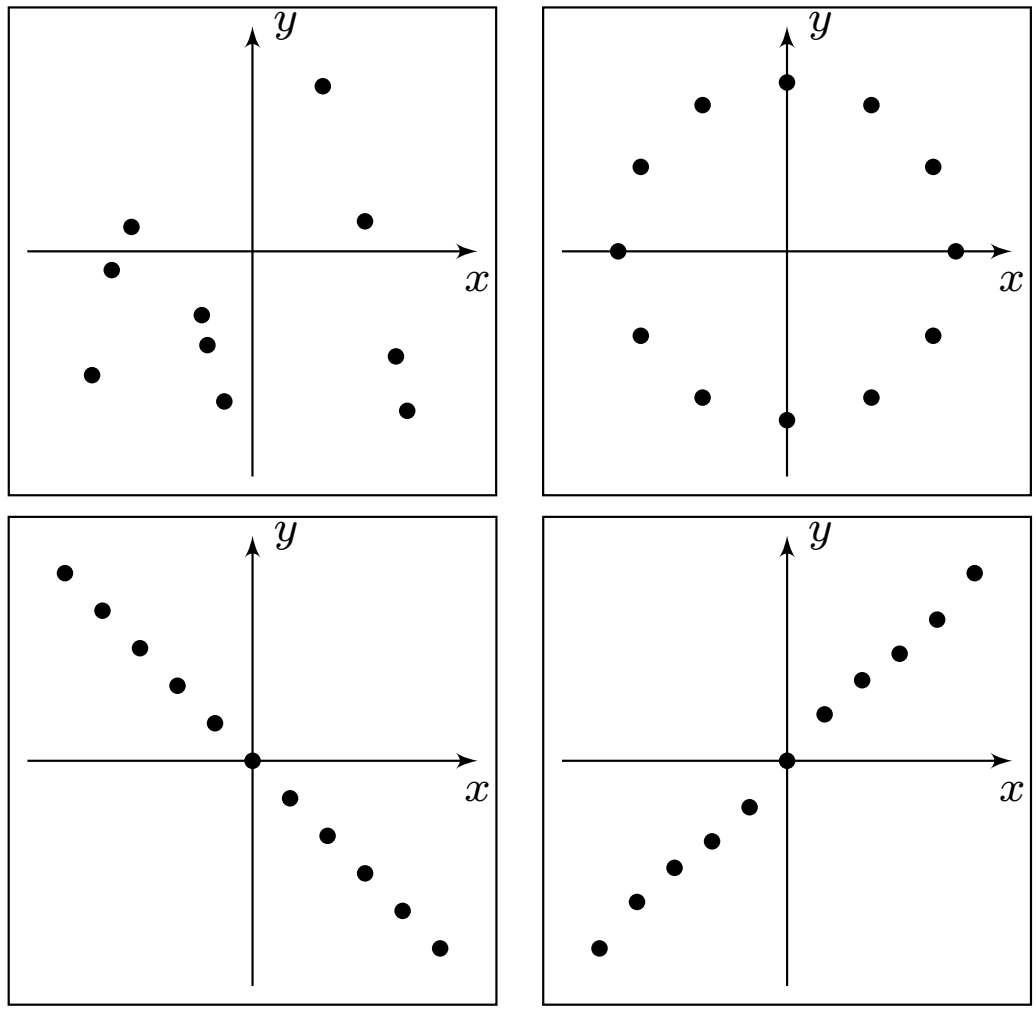
$$s_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}).$$

- **Korelacja**:

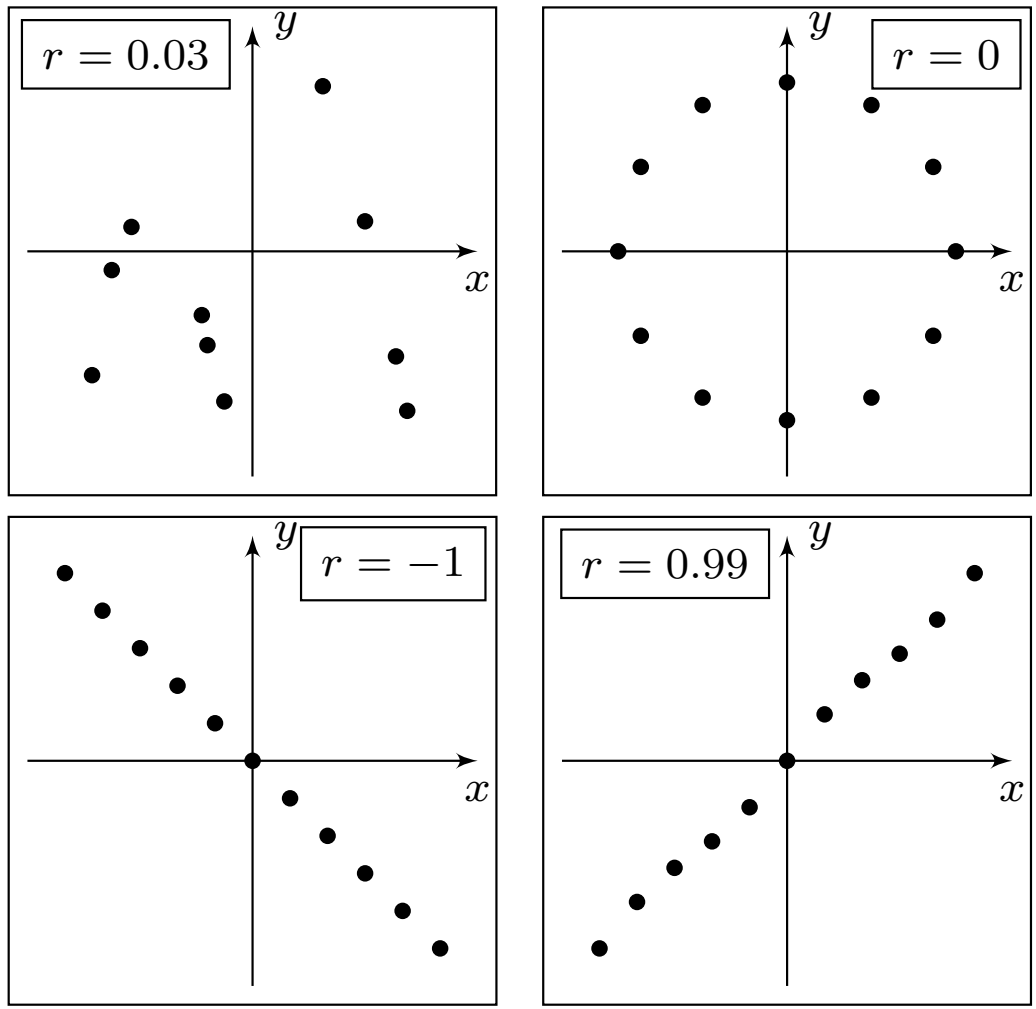
$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2\right)}}$$

Zachodzi $r \in [-1, 1]$, wartości skrajne $\{-1, 1\}$ przyjmowane są **wtedy i tylko wtedy** gdy Y_i są funkcją liniową X_i (lub odwrotnie)

Przykłady korelacji



Przykłady korelacji



Test na istotność korelacji

- **Układ hipotez**:

najczęściej

$H_0:$	$\rho = 0$	$(\rho \geq 0)$	$(\rho \leq 0)$
$H_1:$	$\rho \neq 0$	$\rho < 0$	$\rho > 0$

- **Statystyka testowa**:

$$T = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} \ \sim \ t(n-2)$$

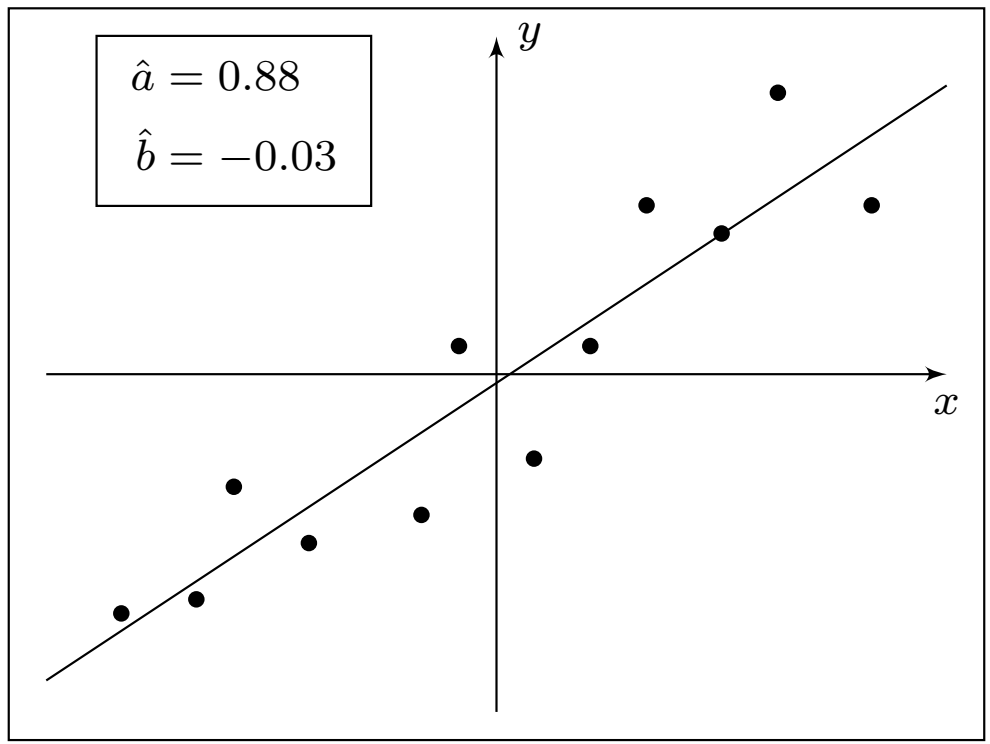
Wartość krytyczną (lub p-wartość) otrzymujemy z rozkładu t-Studenta z $n-2$ stopniami swobody.

Regresja liniowa

Korelacja mierzy **siłę zależności liniowej**.

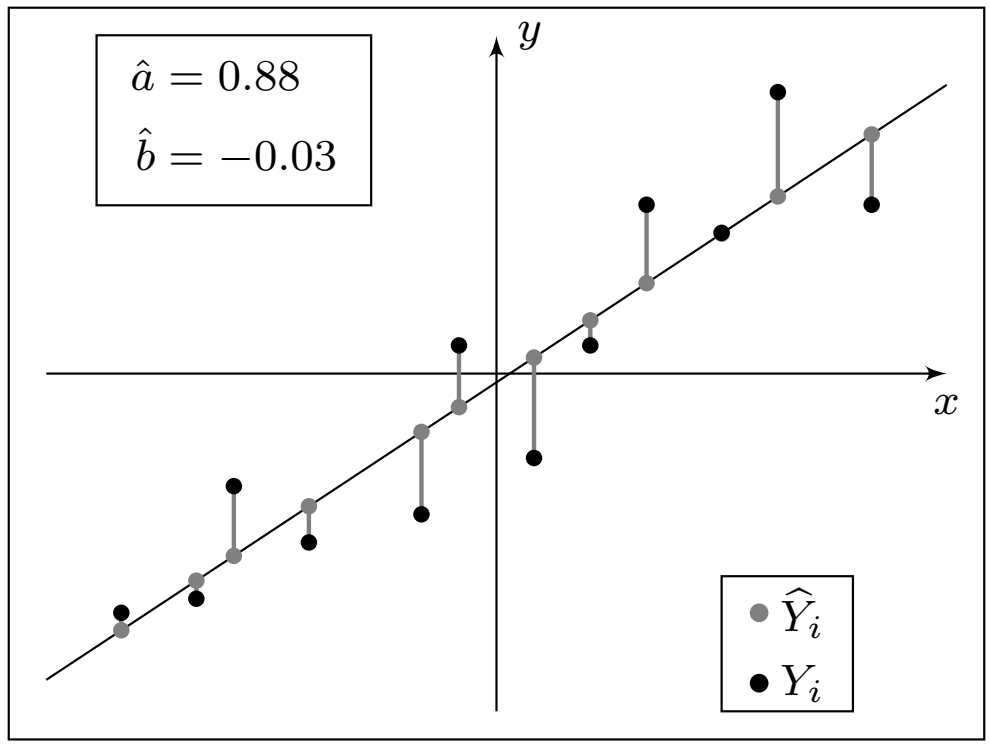
Regresja to wyznaczanie **współczynników zależności liniowej**:

Mając zbiór n punktów $(X_1, Y_1), \ldots (X_n, Y_n)$ wyznacz współczynniki $\hat{a}, \hat{b}$ zależności liniowej $Y = \hat{a}X + \hat{b}$.



Metoda najmniejszych kwadratów

Dla każdego X_i błąd modelu liniowego to różnica między wartością odczytaną z prostej $\widehat{Y}_i = \hat{a}X_i + \hat{b}$ a prawdziwą wartością Y_i:



Minimalizujemy **sumę kwadratów błędów**:

$$\hat{a}, \hat{b} \longleftarrow \min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - aX_i - b)^2$$

Wyprowadzenie

$$L(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - aX_i - b)^2$$

Przyrównujemy pochodne cząstkowe do zera:

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \iff -\sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - aX_i - b) = 0 \iff b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad &\iff \quad -\sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - aX_i - b)X_i = 0 \\
&\iff \quad \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})X_i = a\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})X_i \\
&\iff \quad \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X}) = a\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X}) \\
&\iff \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}.
\end{aligned}$$

Współczynniki regresji

$$\hat{a} = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = r\frac{s_Y}{s_X}$$
$$\hat{b} = \overline{Y} - \hat{a}\overline{X}$$

- Linia regresji przechodzi przez punkt $(\overline{X}, \overline{Y})$
- Współczynnik kierunkowy $\hat{a}$ ma **ten sam znak** co współczynnik korelacji r.