Testy Z i T

Wojciech Kotłowski

Statystyka i analiza danych 2019/2020

21.04.2020

Testy Z i T

- **Założenia**: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- **Układ hipotez**:

$H_0:$	$\mu = \mu_0$	$(\mu \geq \mu_0)$	$(\mu \leq \mu_0)$
$H_1:$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu > \mu_0$
	(dwustronny)	(lewostronny)	(prawostronny)

- **Statystyka testowa**: $Z = Z(X_1, \ldots, X_n)$
- **Obszar (zbiór) krytyczny**:

test	dwustronny	lewostronny	prawostronny
C_{kr}	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}}) \cup (z_{\mathrm{kr}}, \infty)$	$(-\infty, -z_{\mathrm{kr}})$	$(z_{\mathrm{kr}}, \infty)$

- **Decyzja**:

Jeśli $Z \in C_{\mathrm{kr}}$, odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
Jeśli $Z \notin C_{\mathrm{kr}}$, brak podstaw do odrzucenia H_0.

Test Z – znana wariancja

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \ \sim \ N(0,1).$$

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)$

Test Z – duża próba ($n \geq 30$)

Wariancja σ^2 nieznana, więc estymujemy:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{(również oznaczane } \hat{\sigma}^2\text{)}$$

Statystyka testowa:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n} \ \sim \ N(0,1).$$

(przybliżenie, ale bardzo dokładne dla $n \geq 30$)

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- Test dwustronny: $z_{\mathrm{kr}} = \Phi^{-1}\big(1 - \frac{\alpha}{2}\big)$

Test T – mała próba ($n < 30$)

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s}\sqrt{n} \ \sim \ t(n-1), \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

gdzie $t(n-1)$ – rozkład **t-Studenta z** $n-1$ **stopniami swobody**.

Wartość krytyczna:

- Test jednostronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}(1-\alpha;\ n-1)$
- Test dwustronny: $t_{\mathrm{kr}} = t^{-1}\big(1-\frac{\alpha}{2};\ n-1\big)$

Uzasadnienie

Definicja: zmienna Y ma rozkład $\chi^2(k)$ jeśli $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$, gdzie $X_1, \ldots, X_k \sim N(0,1)$ i.i.d.

Definicja: zmienna T ma rozkład $t(n-1)$, gdy

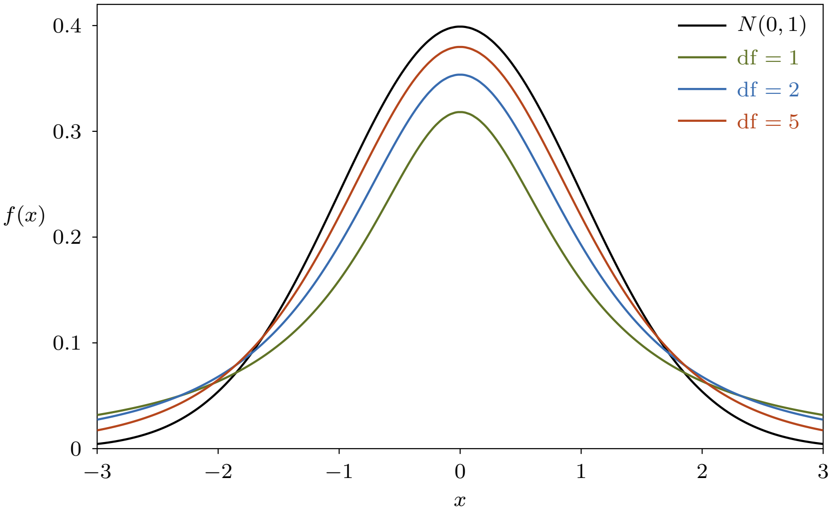
$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}},$$

gdzie $Z \sim N(0,1)$ i $V \sim \chi^2(n-1)$ niezależne.

Twierdzenie (Fishera): Jeśli $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d., to:

- $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \;\sim\; N(0,1)$
- $\dfrac{s^2}{\sigma^2}(n-1) \;\sim\; \chi^2(n-1)$ i jest niezależne od $\overline{X}$

Rozkład t



p-wartość

z

α

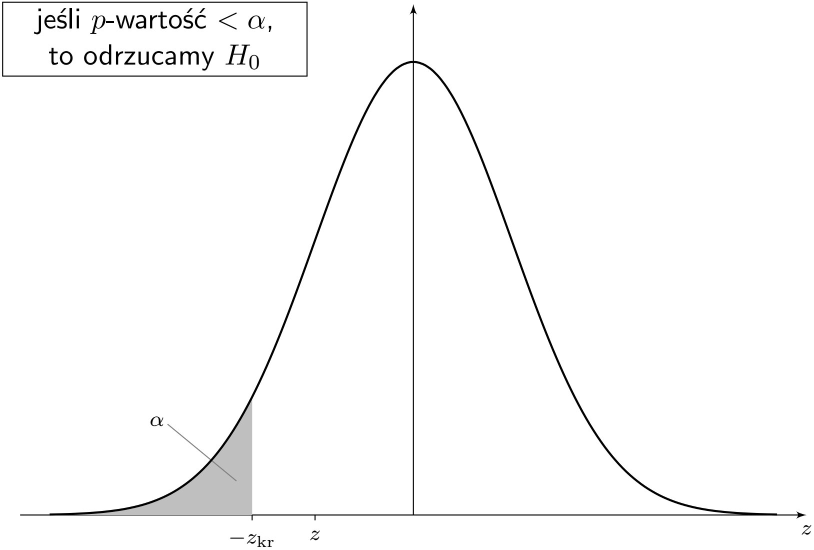
p-wartość

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{z} & \lessgtr & \boxed{z_{\mathrm{kr}}} \\
 & & \boxed{\alpha} \arrow[u, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

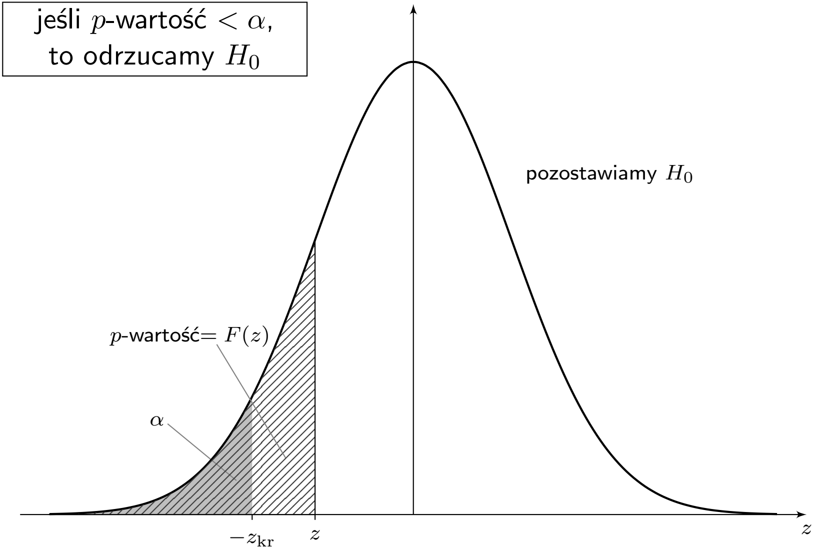
p-wartość

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
z \arrow[d, "F"] \arrow[r, phantom, "\lesseqgtr"] & z_{\mathrm{kr}} \\
p\text{-wartość} \arrow[r, phantom, "<"] & \alpha \arrow[u, "F^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

p-wartość



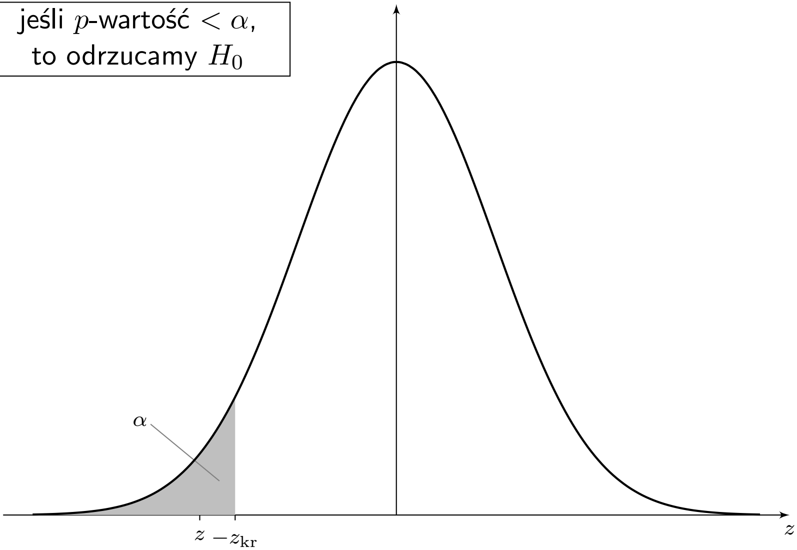
p-wartość



jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0
pozostawiamy H_0
p-wartość$= F(z)$
α
$-z_{\mathrm{kr}}$
z
z

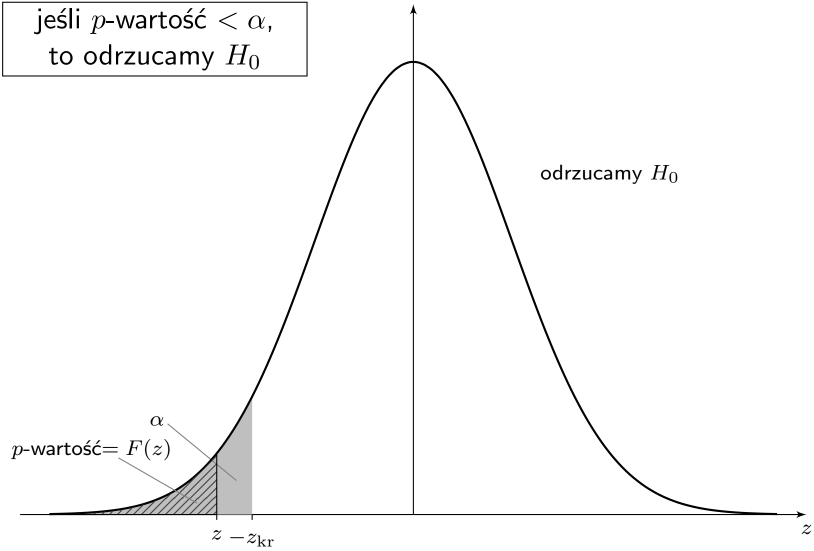
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



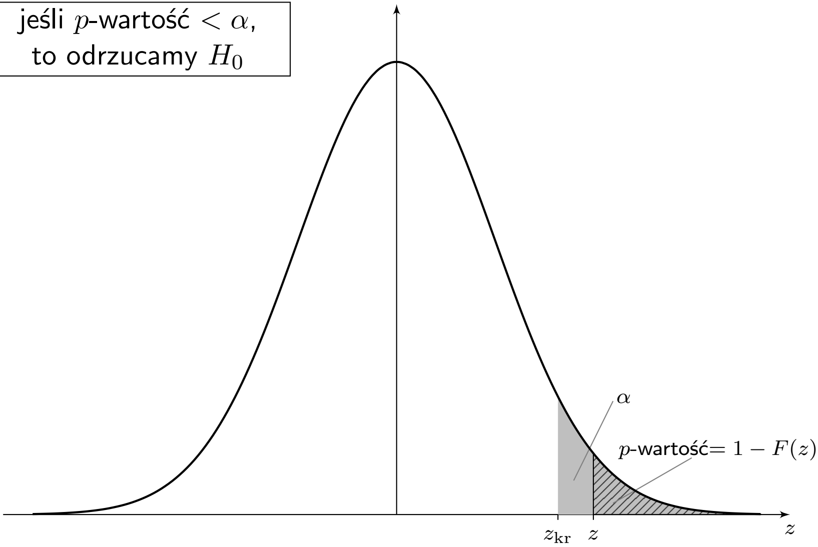
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



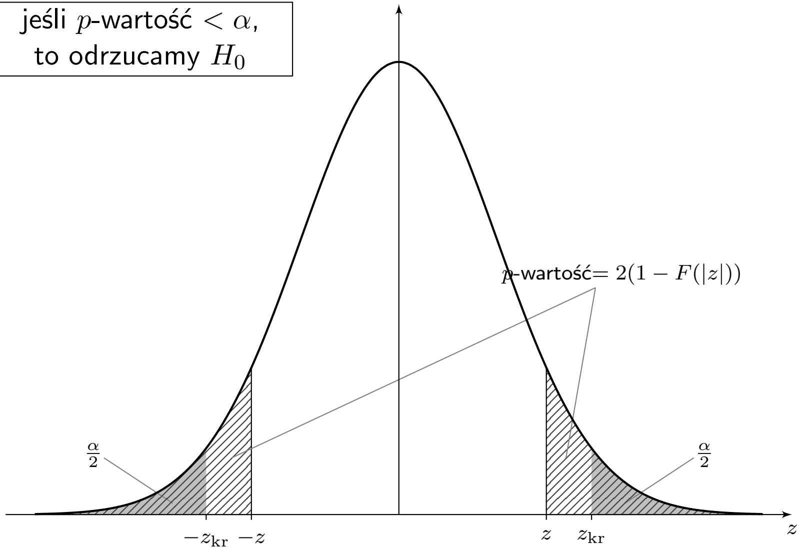
p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

jeśli p-wartość $< \alpha$,
to odrzucamy H_0



p-wartość

Definicja:

- W teście **lewostronnym**: p-wartość $= F(z)$
- W teście **prawostronnym**: p-wartość $= 1 - F(z)$
- W teście **dwustronnym**: p-wartość $= 2(1 - F(|z|))$

$$\boxed{\text{Jeśli } p\text{-wartość} < \alpha\text{, odrzucamy } H_0}$$