

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Wydział Fizyki

Praca Magisterska

„Splątanie w procesie generacji drugiej
harmonicznej przy obecności nieliniowości Kerra”

Wojciech Kotłowski

Promotor pracy:

dr hab. Krzysztof Grygiel

Zakład Optyki Nieliniowej, Wydział Fizyki UAM

Poznań 2006

Streszczenie

W pracy przedstawiono tworzenie stanów splątanych i mierzenie splątania w nieliniowych procesach optycznych — generacji drugiej harmonicznej oraz efekcie Kerra. Skupiono się przede wszystkim nad splątaniem dla zmiennych ciągłych, w przybliżeniu gaussowskim. Procesy nieliniowe zostały zanalizowane na dwa sposoby: poprzez formalizm wejścia-wyjścia za pomocą równań Langevina, oraz w obrazie Schrödingera, poprzez równania *master*, równania Fokkera-Plancka i równania ewolucji korelacji kwantowych. Przedstawiono i porównano wyniki dla obu przypadków.

Abstract

In the thesis, creation of entangled states and measures of entanglement were considered in the nonlinear optical processes — second harmonic generation and Kerr effect. We focused mainly on the entanglement measures for continuous variable systems, using the Gaussian approximation. The nonlinear processes were analysed from two points of view: using the input-output formalism and Langevin equation, and in the Schrödinger picture, using the master equation, Fokker-Planck equations and equations for evolution of quantum correlations. The results for both approaches were presented and compared.

Spis treści

Wstęp	11
1 Elementy optyki kwantowej	15
1.1 Kwantowanie pola	15
1.2 Stany kwantowe pola	17
1.2.1 Stany Focka	17
1.2.2 Stany koherentne	17
1.2.3 Stany ściśnione	19
1.3 Funkcje kwaziprawdopodobieństwa	20
1.3.1 Funkcja Glaubera-Sudarshana	20
1.3.2 Funkcja Husimiego	21
1.3.3 Funkcja Wignera	22
1.4 Stany gaussowskie	23
1.5 Równania ruchu	24
1.5.1 Równanie <i>master</i>	25
1.5.2 Równanie Fokkera-Plancka	26
1.5.3 Równanie Langevina	27
2 Wybrane zjawiska nieliniowe w optyce kwantowej	29
2.1 Nieliniowe sprzężenie fal elektromagnetycznych	29
2.2 Generacja drugiej harmonicznej	31
2.2.1 Opis klasyczny	32
2.2.2 Opis kwantowy	33
2.3 Optyczny efekt Kerra	35
2.3.1 Opis klasyczny	35
2.3.2 Opis kwantowy	36
3 Miary splątania	39
3.1 Definicja splątania	39
3.2 Postulaty miar splątania	40
3.3 Splątanie w przestrzeni Hilberta o skończonym wymiarze	41
3.4 Splątanie dla zmiennych ciągłych	44
3.4.1 Wybrane miary	44
3.4.2 Kryterium nieseparowalności	45
3.4.3 Kryterium EPR	48

4	Splątanie w procesie generacji drugiej harmonicznej	49
4.1	Opis układu i równania ruchu	49
4.2	Analiza równań na klasyczne amplitudy koherentne	52
4.3	Macierze korelacji i miary splątania	55
4.4	Analiza wyników	59
5	Splątanie przy obecności nieliniowości Kerra	67
5.1	Równania ruchu	67
5.2	Analiza równań klasycznych	68
5.3	Macierze korelacji	71
5.4	Analiza wyników	72
6	Analiza splątania przy generacji drugiej harmonicznej w obrazie Schrödingera (równania Fokkera-Plancka)	79
6.1	Równania ruchu na kumulanty	80
6.2	Dwuczaskowe funkcje korelacji i macierz spektralna	84
6.3	Porównanie wyników	86
	Podsumowanie	91
	Bibliografia	93

Wstęp

Wynalezienie lasera zapoczątkowało rozwój nowej dziedziny optyki, zajmującej się nieliniowym oddziaływaniem światła z materią. Generacja drugiej harmonicznej za pomocą rubinowego lasera w kryształach kwarcu była pierwszym zjawiskiem tego typu [38]. Wkrótce odkryto inne efekty optyki nieliniowej, takie jak mieszanie wielu fal czy optyczny efekt Kerra. Wszystkie te zjawiska zostały już dziesiątki lat temu dokładnie zbadane, poznane i opisane. Wkrótce jednak potem powróciły w tematyce nowych badań, gdy zaczęto je analizować uwzględniając kwantową naturę światła. Ujawniły one swoje nowe oblicze, przy okazji przyczyniając się do rozwoju optyki kwantowej jako całości. Ich opis zawierał nowe elementy, takie jak kwantowe korelacje światła, ścięśnione stany pola, statystyki fotonów (*bunching* i *antibunching*), dystrybucje kwaziprawdopodobieństwa, itd [4, 28, 31, 42]. Okazuje się, że wraz z rozwojem nowej dziedziny nauki — informatyki kwantowej — zjawiska te powracają po raz kolejny, i po raz kolejny w innym kontekście.

W roku 1982 amerykański fizyk Richard Feynman jako pierwszy poruszył temat symulacji układów kwantowych na klasycznych komputerach. Niepokoilo go, że zasoby klasycznej maszyny, potrzebne do symulacji układu kwantowego, rosną wykładniczo wraz z rozmiarem układu. Zasugerował rozwiązanie problemu, widząc w komputerach opartych na prawach mechaniki kwantowej, większe możliwości obliczeniowe, w tym możliwość efektywnej symulacji każdego układu kwantowego. Ziarno zostało zasiane i, początkowo nieśmiało, z czasem coraz szybciej zaczęła się wyłaniać nowa nauka, traktująca o możliwościach obliczeniowych ukrytych w prawach mechaniki kwantowej. Już w roku 1985 David Deutsch [10] zaproponował model uniwersalnego komputera kwantowego i podał pierwszy problem, który może na takim komputerze zostać rozwiązany znacznie szybciej, niż na jakimkolwiek komputerze klasycznym. Wydaje się jednak, że zainteresowanie obliczeniami kwantowymi wybuchło na dobre dopiero w roku 1994, kiedy to matematyk Peter Shor przedstawił wielomianowy algorytm faktoryzacji liczb na komputerze kwantowym. Efektywny algorytm rozkładu na czynniki pierwsze, z uwagi na niezwykle ważne zastosowania i brak jakiegokolwiek efektywnego algorytmu klasycznego, wzbudził ogromne zainteresowanie i przyspieszył rozwój dziedziny. Pojawiły się nowe algorytmy i zaczęto rozpoznawać więcej problemów o praktycznym zastosowaniu (jak np. przeszukiwanie baz danych), które mogą zostać rozwiązane efektywniej.

Równocześnie rozwijała się kwantowa teoria informacji [32], która na podobieństwo jej klasycznej wersji, postawiła sobie za cel próbę opisu przekazywania i przetwarzania kwantowej informacji oraz spojrzenie na mechanikę kwantową z tego punktu widzenia. Udało się otrzymać kwantowe odpowiedniki klasycznych twierdzeń Shannona, rozwinąć teorię kodowania, wprowadzić kwantowe

kody poprawiające błędy, metody kwantowej kryptografii. Przy okazji tych badań coraz bardziej zdawano sobie sprawę z wyjątkowej roli jaką odgrywa znane już niemalże od początków istnienia mechaniki kwantowej zjawisko, jakim jest *splątanie* [16].

Splątanie, początkowo opisywane wyłącznie w sposób jakościowy, jako niezwykła cecha mechaniki kwantowej, odróżniająca ją od mechaniki klasycznej, z czasem zaczęło być opisywane w sposób coraz bardziej ścisły, ilościowy [35]. Pierwsze z prac, pokazujące nierówności, jakie musiałyby spełniać wszystkie zmienne klasyczne, zarazem łamane przez prawa mechaniki kwantowej, zostały przedstawione przez Johna Bella [1]. Opisywały korelacje, jakim podlegają zmienne opisujące stany kwantowe i wskazywały na ich niezwykle cechy, których nie posiadają ich klasyczne odpowiedniki. Z czasem zaczęto wprowadzać ilościowy sposób pomiaru splątania poprzez współczynniki, które otrzymały nazwę miar splątania. Jedną z nich okazała się znana z kwantowej teorii informacji entropia von Neumanna [32, 35], co podkreśla istotne związki z tą dziedziną. Mimo, że udało się znaleźć miarę dla układów złożonych z dwóch podukładów opisanych wektorami w przestrzeni Hilberta (tzw. stany czyste), w ogólnym przypadku do dziś piętrzy się sporo trudności. Stan układu jest wtedy opisywany za pomocą macierzy gęstości, istnieją stany nie będące stanami czystymi — mieszane. W tym przypadku okazała się, że nie ma jedyne właściwego sposobu mierzenia splątania. Pojawiło się wiele miar, wszystkie spełniające własności, jakich od miar splątania oczekiwano. Jeszcze gorzej sytuacja wygląda w przypadku układów kwantowych składających się więcej niż z dwóch podukładów, teoria w tym wypadku nie jest jeszcze wystarczająco dobrze rozwinięta.

W końcu, są układy, dla których pojęcie splątania pojawiło się w literaturze już w słynnej pracy Einsteina, Rosena i Podolskiego [16], mianowicie układy ciągłe, czyli opisywane w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. W tym przypadku sytuacja jest o tyle trudna, że istnieje mnogość stanów, w jakich mogą występować tego typu układy i jak na razie nie ma teorii opisującej splątanie w przestrzeni wszystkich możliwych stanów ciągłych. Przestrzeń takich stanów jest praktycznie tak duża, jak przestrzeń Hilberta funkcji. Udało się natomiast rozwinąć teorię przy ograniczeniu do pewnej dosyć uniwersalnej i naturalnej klasy stanów — stanów opisywanych w tzw. reprezentacji Wignera funkcjami gaussowskimi, zwanych w skrócie *stanami gaussowskimi* [8]. Stany te bardzo często występują w mechanice kwantowej (jak np. stan podstawowy oscylatora harmonicznego), a również wiele stanów można nimi przybliżyć z dobrą dokładnością. Wydaje się, że stany gaussowskie spełniają w mechanice kwantowej podobnie ważną rolę, jak rozkłady normalne w rachunku prawdopodobieństwa.

Kwantyzacja światła w optyce kwantowej polega na przypisaniu każdemu modowi pola kwantowego oscylatora harmonicznego. Opis pola elektromagnetycznego jest więc opisem za pomocą zmiennych ciągłych. Stąd splątanie w reżimie takich zmiennych odgrywa szczególnie istotną rolę w tej dziedzinie. Z uwagi na ograniczenie się wyłącznie do stanów gaussowskich, wyjątkowo ważna pod względem mierzenia splątania staje się macierz kowariancji takich stanów, zwana także macierzą korelacji. To w niej ukryte są pełne informacje o stanie, a jednocześnie, z uwagi na jej skończony wymiar, stanowi ona pomost między teorią splątania dla zmiennych ciągłych i teorią w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta.

Co ciekawe, macierze korelacji dla stanów w optyce kwantowej już od dawna

były obiektem zainteresowania badań w tej dziedzinie, przy okazji wyznaczania statystyk fotonów czy analizy stanów ścięśnionych [14]. Narzędzia potrzebne do analizy splątania są więc w optyce kwantowej już od dawna gotowe. Jak wspomniano, w ostatnim czasie powstaje też dobra teoria splątania w przypadku zmiennych ciągłych, otwiera się więc pole do badań nad zjawiskami optycznymi, umożliwiającymi generowanie i operacje na stanach splątanych.

Okazuje się, że do tej roli świetnie nadają się dobrze znane zjawiska nieliniowe. Właśnie dlatego pojawiły się one ponownie jako przedmiot badań, tym razem analizowane pod względem ich własności związanych z tworzeniem stanów splątanych światła. Stawka jest duża, gdyż układy o takich własnościach mogą stanowić istotną rolę w tworzeniu najpotężniejszej znanej maszyny obliczeniowej — komputera kwantowego, dla którego nie znaleziono jeszcze dobrej technologii na fizyczną realizację.

Niniejsza praca zajmuje się właśnie pomiarami splątania w przypadku układów wykazujących dwa rodzaje nieliniowości — generację drugiej harmonicznej oraz efekt Kerra.

Pierwszy z rozdziałów wprowadza czytelnika w narzędzia optyki kwantowej — kwantyzację pola elektromagnetycznego, opis stanów pola, funkcje kwaziprawdopodobieństwa oraz równania ruchu dla układu przy obecności otaczającego go tzw. rezerwuaru. Wszystkie te narzędzia zostaną wykorzystane w dalszej części pracy.

Rozdział drugi opisuje wykorzystywane nieliniowe zjawiska optyczne — generację drugiej harmonicznej i efekt Kerra. Został zamieszczony zarówno opis klasyczny (a właściwie półklasyczny — kiedy światło jest opisywane klasycznymi równaniami Maxwella, a ośrodki jest traktowane kwantowo-mechanicznie), jak i kwantowy.

W rozdziale trzecim definiujemy splątanie i opisujemy, w jaki sposób można je mierzyć. Mniej uwagi poświęcamy układom skończonym, którymi nie będziemy się tutaj zajmować, natomiast bardziej skupiamy się na przypadku zmiennych ciągłych.

Czwarty z rozdziałów opiera się w dużej mierze na pracy [21] i opisuje konkretny układ z nieliniowym ośrodkiem generującym drugą harmoniczną z punktu widzenia dwóch miar splątania. W rozdziale tym używane są narzędzia, opisane w poprzednich trzech rozdziałach wstępnych.

W rozdziale piątym nadal skupiamy się nad tym samym układem, wprowadzamy jednak dodatkową nieliniowość — optyczny efekt Kerra. Badane są zmiany w strukturze splątania w zależności od siły tego efektu i porównuje się wyniki z rozdziałem wcześniejszym.

Szósty z rozdziałów to powrót do układu z rozdziału czwartego, jednak za pomocą zupełnie różnych narzędzi. Celem jest tutaj przede wszystkim porównanie wyników przy zastosowaniu innego formalizmu.

Kończymy podsumowaniem, w którym przedstawiamy zbiorcze rezultaty oraz nakreślamy plany przyszłych badań, które mogłyby stanowić kontynuację tej pracy.

Rozdział 1

Elementy optyki kwantowej

1.1 Kwantowanie pola

Rozpocznijmy od wprowadzenia formalizmu pozwalającego na skwantowanie swobodnego pola elektromagnetycznego. Pole klasyczne w próżni opisane jest czterema równaniami Maxwella [20, 23]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

przy czym \mathbf{E} jest wektorem natężenia pola magnetycznego, \mathbf{B} — wektorem indukcji magnetycznej, zaś c — prędkością światła w próżni.

Oba pola można wyrazić poprzez odpowiednie potencjały — skalarny V dla pola elektrycznego oraz wektorowy \mathbf{A} dla pola magnetycznego. Przy ustalaniu potencjałów istnieje swoboda w ich pełnym określeniu, nazywana *cechowaniem*. Sprowadza się ona do doboru dywergencji, odpowiedniej w danym problemie fizycznym. Przyjęcie cechowania kulombowskiego:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.5)$$

sprowadza równania Maxwella do postaci równania falowego na potencjał wektorowy [20, 23]:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.6)$$

Aby rozwiązać równanie (1.6) potrzebne są jeszcze warunki brzegowe. Przyjmując ich periodyczną postać na obszarze (sześciacie) o boku L , równanie falowe spełnione jest przez dowolną falę płaską z odpowiednią wartością wektora falowego \mathbf{k} :

$$\frac{k_x}{n_x} = \frac{k_y}{n_y} = \frac{k_z}{n_z} = \frac{2\pi}{L} \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z} \quad (1.7)$$

oraz częstością $\omega_k = ck$, gdzie $k = |\mathbf{k}|$.

Ze względu na liniowość równania falowego, dowolna superpozycja fal płaskich również spełnia (1.6), a ze względu na zupełność zbioru tych funkcji, dowolne rozwiązanie równania (1.6) jest superpozycją fal płaskich:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \{ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \} \quad (1.8)$$

W celu dokonania kwantyzacji pola, należy jeszcze sprowadzić funkcję Hamiltona pola wielomodowego do postaci kanonicznej oscylatora harmonicznego, poprzez wprowadzenie zmiennych kanonicznych q_k oraz p_k [28, 42], zdefiniowanych poprzez relacje:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k q_k + i p_k) \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k q_k - i p_k) \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^* \quad (1.10)$$

Funkcja Hamiltona (energia) pola wyrażona w tych zmiennych będzie miała następującą postać:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\omega_k^2 q_k^2 + p_k^2) \quad (1.11)$$

Mając oscylator harmoniczny, można dokonać jego kanonicznej kwantyzacji. Najbardziej użyteczne dla dalszych rozważań będzie dokonanie tego poprzez wprowadzenie dla każdego modu pola operatorów kreacji i anihilacji, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ oraz $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ [27, 28, 31, 42], spełniających bozonowe reguły komutacji:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (1.12)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad (1.13)$$

Potencjał wektorowy, który odtąd staje się operatorem, można wyrazić poprzez:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \quad (1.14)$$

gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną, a $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$ wektorem polaryzacji. Ostatecznie otrzymujemy więc następującą postać potencjału wektorowego:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad (1.15)$$

oraz operatorów pola:

$$\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad (1.16)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}} = i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \left\{ \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad (1.17)$$

Hamiltonian wyrażony za pomocą operatorów kreacji i anihilacji będzie miał następującą postać:

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.18)$$

1.2 Stany kwantowe pola

Stany kwantowe swobodnego pola elektromagnetycznego można wyrazić za pomocą różnych reprezentacji. Poniżej przedstawione zostaną zarówno stany własne hamiltonianu, jak również stany koherentne i ścięśnione, wraz z relacjami zachodzącymi między nimi.

1.2.1 Stany Focka

Podstawową bazą stanów w optyce kwantowej są stany własne hamiltonianu, tzw. stany Focka $\{|n_{\mathbf{k}}\rangle\}$:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) |n_{\mathbf{k}}\rangle \quad (1.19)$$

będące równocześnie stanami własnymi operatora liczby obsadzeń $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{n}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle \quad (1.20)$$

Z tej właśnie przyczyny są one często nazywane stanami n -fotonowymi. Działanie operatorów kreacji i anihilacji na te stany przedstawia się w następujący sposób:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}} + 1}|n_{\mathbf{k}} + 1\rangle \quad (1.21)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}}|n_{\mathbf{k}} - 1\rangle \quad (1.22)$$

Rekursywnie używając równania (1.21) pokazuje się, że każdy stan Focka można otrzymać ze stanu próżni poprzez $n_{\mathbf{k}}$ -krotne zadziałanie operatorem kreacji, wraz z odpowiednim unormowaniem:

$$|n_{\mathbf{k}}\rangle = \frac{(\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}}!}}|0\rangle \quad (1.23)$$

Zauważmy na koniec, że na skutek separowalności hamiltonianu, stan pola wielomodowego faktoryzuje się, tzn. może zostać przedstawiony w postaci iloczynu tensorowego stanów pola dla poszczególnych modów:

$$|n\rangle = |n_{k_1}\rangle \otimes |n_{k_2}\rangle \otimes \dots = |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle \quad (1.24)$$

1.2.2 Stany koherentne

Stany koherentne najprościej wprowadza się jako stany własne operatora anihilacji:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (1.25)$$

Można jednak wyprowadzić ten warunek, żądając aby stany koherentne „przypominały” klasyczne stany pola w tym sensie, że energia pola liczona klasycznie ($\mathcal{H}_{class} = \hbar\omega_k \langle \hat{a}^\dagger \rangle \langle \hat{a} \rangle$) była równa średniej energii liczonej kwantowo ($\mathcal{H}_{quant} = \hbar\omega_k \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$) [28], lub, co równoważne, żądając spójności pola we wszystkich rzędach.

Poprzez zadziałanie operatorem \hat{a} w iloczynie $\langle n | \hat{a} | \alpha \rangle$ raz w lewą, raz w prawą stronę, otrzymujemy poprzez rozwinięcie rekurencji następujący wynik [42]:

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle \quad (1.26)$$

Używając tego wyniku w rozwinięciu względem bazy stanów fokowskich, otrzymujemy:

$$|\alpha\rangle = \langle 0 | \alpha \rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.27)$$

a z warunku normalizacji $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$:

$$\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \quad (1.28)$$

Stany koherentne nie są jednak ortonormalne, gdyż z (1.27) wynika:

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2} \quad (1.29)$$

Tym niemniej, są one układem zupełnym, a z faktu, że jest ich więcej niż stanów fokowskich, nazywa się je *układem przepelnionym*.

Wgląd w naturę stanów koherentnych uzyskuje się poprzez wprowadzenie operatora przesunięcia [28, 34, 42]:

$$D(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad (1.30)$$

Powyższą formułę wyprowadza się, uzyskując, poprzez wstawienie do (1.27) równań (1.28) i (1.23), następujące wyrażenie:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (1.31)$$

Dodatkowo, ponieważ $\hat{a}|0\rangle = 0$, zachodzi $\hat{1}|0\rangle = e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle$, tym samym:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle \quad (1.32)$$

lub korzystając z twierdzenia Bakera-Hausdorffa [42, 28]:

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle = D(\alpha) |0\rangle \quad (1.33)$$

Korzystając z definicji operatora, można dowieść następujących równości:

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^* \quad (1.34)$$

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (1.35)$$

co pokazuje, że stany koherentne są niczym innym jak przesuniętym (w sensie amplitudy) stanem próżni fotonowej.

Na koniec zauważmy, że nie można stworzyć podobnej bazy dla stanów własnych operatora kreacji. Można pokazać [34], że żaden taki stan nie byłby normalizowalny.

1.2.3 Stany ścieśnione

Pomimo, że operatory kreacji i anihilacji nie są hermitowskie, można utworzyć dwie ich hermitowskie kombinacje [28, 41, 42]:

$$\hat{X}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad (1.36)$$

$$\hat{X}_2 = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (1.37)$$

Z reguł komutacji (1.12) i (1.13) wynika następująca reguła komutacji dla \hat{X}_1 i \hat{X}_2 :

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2i \quad (1.38)$$

Łatwo też pokazać, że w stanie koherentnym nieoznaczoności obu operatorów są równe jedności. Równocześnie wykorzystując wynikającą z reguł komutacji zasadę nieoznaczoności Heisenberga:

$$\Delta\hat{X}_1\Delta\hat{X}_2 \geq 1 \quad (1.39)$$

wniosujemy, że zmniejszenie nieoznaczoności jednego z operatorów poniżej jedności implikuje zwiększenie nieoznaczoności drugiego z operatorów. Stany, dla których $\Delta\hat{X}_i \leq 1$ dla i równego 1 lub 2, nazywamy *stanami ścieśnionymi*

Generowanie stanów ścieśnionych może być opisane za pomocą *operatora ściskania* $S(\xi)$ wraz z operatorem przesunięcia $D(\alpha)$:

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \quad (1.40)$$

gdzie operator ściskania zdefiniowany jest jako:

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2})} \quad (1.41)$$

W ogólności, ξ jest wielkością zespoloną, $\xi = r e^{i\theta}$, przy czym moduł r określa stopień ściskania, zaś faza θ kierunku ściskania, tzn. określa operatory:

$$\hat{X}_1 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \hat{a} e^{-i\frac{\theta}{2}} + \hat{a}^\dagger e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (1.42)$$

$$\hat{X}_2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = i(\hat{a}^\dagger e^{i\frac{\theta}{2}} - \hat{a} e^{-i\frac{\theta}{2}}) \quad (1.43)$$

wzdłuż których ściskanie prowadzi do minimum oznaczoności (są to osie główne elipsy nieoznaczoności).

Korzystając z definicji, możemy obliczyć wartości średnie i wariancje operatorów kreacji i anihilacji w stanach ścieśnionych:

$$\langle \alpha, \xi | \hat{a} | \alpha, \xi \rangle = \alpha \quad (1.44)$$

$$\langle \alpha, \xi | \hat{a}^\dagger | \alpha, \xi \rangle = \alpha^* \quad (1.45)$$

$$\langle \alpha, \xi | \hat{a} \hat{a} | \alpha, \xi \rangle = \alpha^2 - e^{i\theta} \cosh r \sinh r \quad (1.46)$$

$$\langle \alpha, \xi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha, \xi \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (1.47)$$

Stąd łatwo otrzymujemy już wariancje operatorów \hat{X}_1 i \hat{X}_2 w stanie ścieśnionym:

$$(\Delta \hat{X}_1)^2 = e^{-2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{2r} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.48)$$

$$(\Delta \hat{X}_2)^2 = e^{2r} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{-2r} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.49)$$

co uzasadnia nazwanie $S(\xi)$ operatorem ściskania.

1.3 Funkcje kwaziprawdopodobieństwa

Baza stanów koherentnych umożliwia, dzięki przepelnieniu, reprezentację stanów kwantowych w postaci diagonalnej. Pozwala to na wprowadzenie funkcji o argumentach zespolonych, opisujących stan układu, na podobieństwo zespolów statystycznych w przestrzeni fazowej. Należy jednak podkreślić, że nie jest to podobieństwo daleko idące, ze względu na fakt, że kwantowe funkcje rozkładu mogą przyjmować wartości ujemne i osobliwe. Co więcej, ze względu na nieprzemienność mnożenia w mechanice kwantowej, przy każdym porządku operatorów (normalnym, antynormalnym, symetrycznym), średnie i momenty wyższego rzędu należy liczyć przy użyciu innej funkcji rozkładu. Większość tego podrozdziału oparta jest na [41, 42].

1.3.1 Funkcja Glaubera-Sudarshana

Funkcję Glaubera-Sudarshana, zwaną też funkcją $P(\alpha)$ definiuje się jako reprezentację macierzy gęstości w bazie stanów koherentnych, tj:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (1.50)$$

wraz z warunkiem normalizacji

$$\int P(\alpha) d^2\alpha = 1 \quad (1.51)$$

Jest to reprezentacja diagonalna i nie jest oczywistym fakt istnienia takiej reprezentacji dla stanu opisanego daną macierzą gęstości. Można pokazać, że jeśli istnieje funkcja:

$$\chi^{(n)}(\xi, \xi^*) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi^* \hat{a}^\dagger} e^{i\xi \hat{a}} \right\} \quad (1.52)$$

to jest ona transformatą Fouriera funkcji $P(\alpha)$, tzn. odwrotna transformata Fouriera daje:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi^* \hat{a}^\dagger} e^{i\xi \hat{a}} \right\} e^{-i\xi^* \alpha^*} e^{-i\xi \alpha} d^2\xi \quad (1.53)$$

Funkcja $P(\alpha)$ pozwala w prosty sposób wyznaczyć średnie wartości normalnie uporządkowanych operatorów kreacji i anihilacji:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\} = \int P(\alpha) \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m | \alpha \rangle d^2\alpha = \int P(\alpha) (\alpha^*)^n \alpha^m d^2\alpha \quad (1.54)$$

Jeszcze prościej można powyższe średnie wyznaczyć dzięki znajomości funkcji charakterystycznej:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial (i\xi^*)^n \partial (i\xi)^m} \chi^n(\xi, \xi^*) \Big|_{\xi=\xi^*=0} \quad (1.55)$$

Ponieważ macierz gęstości stanu koherentnego $|\beta\rangle$ równa jest $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$, funkcja $P(\alpha)$ jest wtedy osobliwa i równa

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \beta) \quad (1.56)$$

Jeszcze większą osobliwość $P(\alpha)$ przejawia w stanach n -fotonowych. Można pokazać, że dla stanu $|n\rangle$ funkcja ta jest pochodną delty Diraka:

$$P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{(m!)^2} \frac{n!}{(n-m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial \alpha^m \partial \alpha^{*m}} \delta^{(2)}(\alpha) \quad (1.57)$$

Na koniec warto zauważyć, że funkcja Glaubera-Sudarshana przyjmuje dla pewnych stanów wartości dodatnie i spełnia warunki klasycznej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa. Stany takie mają odpowiedniki klasyczne, dzięki czemu funkcja $P(\alpha)$ może służyć jako kryterium „nieklasyczności” (nieseparowalności) stanów kwantowych.

1.3.2 Funkcja Husimiego

Aby liczyć średnie z antynormalnego uporządkowania iloczynów operatorów kreacji i anihilacji, można wprowadzić antynormalną funkcję charakterystyczną:

$$\chi^{(a)}(\xi, \xi^*) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi \hat{a}} e^{i\xi^* \hat{a}^\dagger} \right\} \quad (1.58)$$

Pozwala ona na wyznaczanie następujących średnich:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{a}^m \hat{a}^\dagger)^n\} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial (i\xi)^m \partial (i\xi^*)^n} \chi^{(a)}(\xi, \xi^*) \Big|_{\xi=\xi^*=0} \quad (1.59)$$

Podobnie, jak w przypadku funkcji normalnej, można wyznaczyć odwrotną transformatę Fouriera antynormalnej funkcji charakterystycznej:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi \hat{a}} e^{i\xi^* \hat{a}^\dagger} \right\} e^{-i\xi^* \alpha^*} e^{-i\xi \alpha} d^2\alpha \quad (1.60)$$

Jest to właśnie *funkcja Husimiego*. Oczywiście, możemy powrócić do funkcji charakterystycznej poprzez transformatę Fouriera funkcji $Q(\alpha)$:

$$\chi^{(a)}(\xi, \xi^*) = \int Q(\alpha) e^{i\xi^* \alpha^*} e^{i\xi \alpha} d^2\alpha \quad (1.61)$$

co po podstawieniu do (1.59) daje natychmiast:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{a}^m(\hat{a}^\dagger)^n\} = \int Q(\alpha)\alpha^m(\alpha^*)^n d^2\alpha \quad (1.62)$$

co oznacza, że funkcję $Q(\alpha)$ stosuje się w analogiczny sposób do $P(\alpha)$, ale przy antynormalnym porządku operatorów.

Można również pokazać, że funkcja $Q(\alpha)$ wyraża się prostym wzorem:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \quad (1.63)$$

a ze względu na dodatnią określoność macierzy gęstości, funkcja Husimiego jest również dodatnio określona. Z powyższego wzoru można natychmiast policzyć wartości tej funkcji dla stanu koherentnego $|\beta\rangle$:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \beta \rangle \langle \beta | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha - \beta|^2} \quad (1.64)$$

oraz dla stanu n -fotonowego:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (1.65)$$

Powód, dla którego funkcja $Q(\alpha)$ zachowuje się w tak „porządny” sposób staje się widoczny po znalezieniu relacji między nią a funkcją $P(\alpha)$:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \left(\int P(\beta) |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta \right) | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \int e^{-|\alpha - \beta|^2} d^2\beta \quad (1.66)$$

Funkcja $Q(\alpha)$ jest więc splotem $P(\alpha)$ z funkcją gaussowską, co powoduje jej „rozmazanie”.

1.3.3 Funkcja Wignera

Rozważone zostały zarówno normalne, jak i antynormalne uporządkowania operatorów. Pozostaje jeszcze jedno uporządkowanie, zwane symetrycznym, dla którego funkcję charakterystyczną definiujemy w następujący sposób:

$$\chi^{(s)}(\xi, \xi^*) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi\hat{a} + i\xi^*\hat{a}^\dagger} \right\} \quad (1.67)$$

Podobnie, jak w poprzednich przypadkach, wprowadzamy odwrotną transformację Fouriera:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi\hat{a} + i\xi^*\hat{a}^\dagger} \right\} e^{-i\xi^*\alpha^*} e^{-i\xi\alpha} d^2\alpha \quad (1.68)$$

definiując w ten sposób *funkcję Wignera*.

Związki między funkcjami charakterystycznymi otrzymać można korzystając z twierdzenia Bakera-Hausdorffa:

$$\text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi^*\hat{a}^\dagger + i\xi\hat{a}} \right\} = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi^*\hat{a}^\dagger} e^{i\xi\hat{a}} \right\} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} e^{i\xi\hat{a}} e^{i\xi^*\hat{a}^\dagger} \right\} e^{\frac{|\xi|^2}{2}} \quad (1.69)$$

a stąd:

$$\chi^{(s)}(\xi, \xi^*) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \chi^{(n)}(\xi, \xi^*) \quad (1.70)$$

$$\chi^{(s)}(\xi, \xi^*) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \chi^{(a)}(\xi, \xi^*) \quad (1.71)$$

Korzystając z tych wzorów oraz z (1.68) otrzymujemy związek między $W(\alpha)$ i $P(\alpha)$:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int e^{-2|\alpha-\beta|^2} P(\beta) d^2\beta \quad (1.72)$$

Na podstawie tego wzoru można wyznaczyć wartość funkcji Wignera dla stanu koherentnego:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha-\beta|^2} \quad (1.73)$$

oraz, po dużo bardziej skomplikowanych obliczeniach, dla stanu n -fotonowego:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2) \quad (1.74)$$

gdzie $L_n(x)$ jest n -tym wielomianem Laguerra.

Pozostaje pytanie, jakiego typu średnie można wyznaczać za pomocą funkcji Wignera. Okazuje się, że można liczyć momenty rozkładu symetrycznie uporządkowanych operatorów, tzn. porządku $\{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\}_s$ składającego się ze wszystkich $\binom{n+m}{n}$ możliwych porządków iloczynu n operatorów kreacji i m operatorów anihilacji:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\}_s\} = \int W(\alpha) (\alpha^*)^n \alpha^m d^2\alpha \quad (1.75)$$

lub poprzez funkcję charakterystyczną:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}\{(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m\}_s\} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial(i\xi)^m \partial(i\xi^*)^n} \chi^s(\xi, \xi^*) \Big|_{\xi=\xi^*=0} \quad (1.76)$$

1.4 Stany gaussowskie

Stany gaussowskie na potrzeby tej pracy będą zdefiniowane jako stany kwantowe opisane za pomocą wielomodowej funkcji Wignera postaci:

$$W(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu})} \quad (1.77)$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest wektorem zmiennych dla poszczególnych modów, $\boldsymbol{\mu}$ — parametrem, a Σ rzeczywistą, symetryczną macierzą kowariancji (korelacji).

W szczególności przydatna będzie definicja funkcji dla dwóch modów α_1 i α_2 bez członów liniowych w wykładniku:

$$W(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{(2\pi)^{|\Sigma|} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\text{re}\alpha_1, \text{im}\alpha_1, \text{re}\alpha_2, \text{im}\alpha_2)^T \Sigma^{-1} (\text{re}\alpha_1, \text{im}\alpha_1, \text{re}\alpha_2, \text{im}\alpha_2)} \quad (1.78)$$

oraz odpowiednia funkcja charakterystyczna:

$$\chi^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2) = e^{-\frac{1}{2}(\text{re}\alpha_1, \text{im}\alpha_1, \text{re}\alpha_2, \text{im}\alpha_2)^T \Sigma (\text{re}\alpha_1, \text{im}\alpha_1, \text{re}\alpha_2, \text{im}\alpha_2)} \quad (1.79)$$

Definiujemy dla obu modów hermitowskie operatory:

$$\hat{X}_1^1 = \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \quad (1.80)$$

$$\hat{X}_2^1 = i(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1) \quad (1.81)$$

$$\hat{X}_1^2 = \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \quad (1.82)$$

$$\hat{X}_2^2 = i(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2) \quad (1.83)$$

oraz przedstawiamy macierz korelacji z następującą numeracją elementów:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} C_{11}^{11} & C_{12}^{11} & C_{11}^{12} & C_{12}^{12} \\ C_{21}^{11} & C_{22}^{11} & C_{12}^{12} & C_{22}^{12} \\ C_{11}^{21} & C_{12}^{21} & C_{11}^{22} & C_{12}^{22} \\ C_{21}^{21} & C_{22}^{21} & C_{12}^{22} & C_{22}^{22} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

Korzystając z (1.76) możemy wyznaczyć elementy macierzy korelacji:

$$C_{mn}^{kl} = \frac{1}{2} \langle \hat{X}_m^k \hat{X}_n^l + \hat{X}_n^l \hat{X}_m^k \rangle - \langle \hat{X}_m^k \rangle \langle \hat{X}_n^l \rangle \quad (1.85)$$

Zauważmy na koniec, że funkcja gaussowska jest w pełni opisana przez momenty rozkładu do drugiego rzędu włącznie i za ich pomocą można wyznaczyć wszystkie wyższe momenty.

1.5 Równania ruchu

W mechanice kwantowej, ewolucja wektora falowego $|\psi(t)\rangle$ opisana jest równaniem Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.86)$$

W układach otwartych, do opisu stanu kwantowego trzeba często użyć ogólniejszego formalizmu macierzy gęstości $\hat{\rho}$, dla której równanie ruchu wygląda następująco:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, \hat{\rho}] \quad (1.87)$$

W pracy będą również używane równania ruchu w obrazie Heisenberga:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}(t), \hat{A}(t)] + \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) \quad (1.88)$$

oraz w obrazie oddziaływania, przytoczone później.

Reszta tego podrozdziału zostanie poświęcona przeglądowi metod opisu układu otwartego, będącego w kontakcie z dużo większym układem, zwanym *rezewuarem*. Większość tego podrozdziału oparta jest na pracy [28].

1.5.1 Równanie *master*

Dla przykładu przyjmujemy pełny hamiltonian układu w postaci:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_r + \mathcal{V} \quad (1.89)$$

gdzie

$$\mathcal{H}_s = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (1.90)$$

jest hamiltonianem układu (tutaj w prostej postaci oscylatora harmonicznego, tj. reprezentacji modu pola elektromagnetycznego, dla uproszczenia obliczeń),

$$\mathcal{H}_r = \sum_j \hbar\omega_j\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_j \quad (1.91)$$

to hamiltonian rezerwuaru (wiele modów traktowanych jako oscylatory harmoniczne),

$$\mathcal{V} = \hbar \sum_j (g_j\hat{a}^\dagger\hat{b}_j + g_j^*\hat{b}_j^\dagger\hat{a}) \quad (1.92)$$

jest hamiltonianem oddziaływania między układem a rezerwuarem

Zakładając, że w czasie t_0 układ i rezerwar zaczynają być w kontakcie i nie wykazują między sobą korelacji, możemy przyjąć, że pełna macierz gęstości obu układów $\hat{\rho}_{sr}$ faktoryzuje się:

$$\hat{\rho}_{sr}(t_0) = \hat{\rho}_s(t_0)\hat{\rho}_r(\mathcal{H}_r) \quad (1.93)$$

Definiując operator gęstości i hamiltonian oddziaływania w obrazie oddziaływania (odpowiednio, \mathcal{V} i \hat{P}_{sr}):

$$\hat{\rho}_{sr}(t) = e^{-i(\mathcal{H}_s+\mathcal{H}_r)(t-t_0)/\hbar}\hat{P}_{sr}(t)e^{i(\mathcal{H}_s+\mathcal{H}_r)(t-t_0)/\hbar} \quad (1.94)$$

$$\mathcal{V}_I(t-t_0) = e^{i(\mathcal{H}_s+\mathcal{H}_r)(t-t_0)/\hbar}\mathcal{V}e^{-i(\mathcal{H}_s+\mathcal{H}_r)(t-t_0)/\hbar} \quad (1.95)$$

$$(1.96)$$

otrzymujemy równanie ruchu w obrazie oddziaływania:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}_{sr} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{V}_I(t-t_0), \hat{P}_{sr}] \quad (1.97)$$

Następnie definiujemy macierz gęstości układu w obrazie oddziaływania:

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_r\{\hat{P}_{sr}\} \quad (1.98)$$

Całkując równanie (1.97) i rozwijając do drugiego rzędu włącznie, używając przybliżenia:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t+\tau) \simeq \frac{\hat{\rho}(t+\tau) - \hat{\rho}(t)}{\tau} \quad (1.99)$$

a następnie biorąc ślad po rezerwarze, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &\simeq -\frac{i}{\hbar\tau} \int_0^\tau d\tau' \text{Tr}_r\{\mathcal{V}_I(\tau')\hat{P}_{sr}(t)\} \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2\tau} \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' \text{Tr}_r\{\mathcal{V}_I(\tau')\mathcal{V}_I(\tau'')\hat{P}_{sr}(t) - \mathcal{V}_I(\tau')\hat{P}_{sr}(t)\mathcal{V}_I(\tau'')\} + adj. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Wyrażamy następnie hamiltonian oddziaływania w następującej postaci:

$$\mathcal{V}_I(\tau) = \hbar\hat{a}^\dagger\hat{F}(\tau) + \hbar\hat{a}\hat{F}^\dagger(\tau) \quad (1.101)$$

gdzie:

$$\hat{F}(\tau) = -i \sum_j g_j \hat{b}_j e^{i(\omega - \omega_j)\tau} \quad (1.102)$$

Wykonując ślad po rezerwuarze napotykamy na średnie typu $\langle\hat{F}(\tau')\hat{F}^\dagger(\tau'')\rangle_r$, które używając przybliżenia Markowa (o nieskończonym krótkiej pamięci rezerwuaru) można przyrównać do:

$$\langle\hat{F}(\tau')\hat{F}^\dagger(\tau'')\rangle_r = 2\pi D(\omega) \langle\hat{b}(\omega)\hat{b}^\dagger(\omega)\rangle_r \delta(\tau' - \tau'') \quad (1.103)$$

gdzie $D(\omega)$ jest gęstością stanów. Takie przybliżenie prowadzi do redukcji całek postaci:

$$\int_0^\tau \int_0^{\tau'} d\tau'' \langle\hat{F}(\tau')\hat{F}^\dagger(\tau'')\rangle_r = \frac{\gamma\tau}{2} \langle\hat{b}(\omega)\hat{b}^\dagger(\omega)\rangle_r \quad (1.104)$$

gdzie $\gamma = 2\pi D(\omega)|g(\omega)|^2$ jest współczynnikiem tłumienia. Ostatecznie, przyjmując $\langle\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega)\rangle_r = \bar{n}$, otrzymujemy równanie *master* w obrazie oddziaływania:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger) - \frac{\gamma}{2}\bar{n}(\hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a}) + adj. \quad (1.105)$$

1.5.2 Równanie Fokkera-Plancka

Równanie *master* jest równaniem operatorowym. Możliwe jest jednak przekształcenie tego równania do postaci cząstkowego równania różniczkowego, zawierającego zmienne zespolone. Dokonuje się tego poprzez wyrażenie macierzy gęstości w postaci rozwinięcia na stany koherentne (1.50) i podstawienia do (1.105). Korzystając z rozwinięcia (1.31), łatwo otrzymać następującą tożsamość:

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a} = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*} + \alpha\right) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (1.106)$$

$$\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \alpha^*\right) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (1.107)$$

Wykonując całkowanie przez części przy założeniu, że w granicach $|\alpha| \rightarrow \infty$ funkcja $P(\alpha)$ znika, może usunąć pochodne przy wyrażeniach $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Przykładowo:

$$\int d^2\alpha P(\alpha, t) \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = - \int d^2\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P(\alpha, t)) \right) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (1.108)$$

Ostatecznie, po przyrównaniu ze sobą wyrazów podcałkowych stojących przy $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, otrzymujemy *równanie Fokkera-Plancka*:

$$\frac{d}{dt} P(\alpha, t) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P(\alpha, t)) + c.c. \right) + \gamma \bar{n} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} P(\alpha, t) \quad (1.109)$$

Współczynniki stojące przy pierwszym z wyrazów po prawej stronie (przy pierwszych pochodnych) równania nazywa się *macierzą dryftu*, podczas gdy współczynniki przy drugim z wyrazów (przy drugich pochodnych) — *macierzą dyfuzji*. Równanie określa ewolucję czasową funkcji kwaziprawdopodobieństwa dla oscylatora harmonicznego, reprezentującego mod pola. Podobne równanie zostanie później przedstawione dla hamiltonianu opisującego generację drugiej harmonicznego.

1.5.3 Równanie Langevina

Dotychczasowy opis odbywał się w obrazie oddziaływania, lub po prostych przekształceniach — w obrazie Schrödingera. Można jednak podobną analizę przeprowadzić w obrazie Heisenberga, w którym to operatory posiadają następujące równania ruchu:

$$\frac{d}{dt} \hat{a}(t) = -i\omega \hat{a}(t) - i \sum_j g_j \hat{b}_j(t) \quad (1.110)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{b}_j(t) = -i\omega_j \hat{b}_j(t) - ig_j^* \hat{a}(t) \quad (1.111)$$

Całkując drugie z równań otrzymujemy:

$$\hat{b}_j(t) = \hat{b}_j(t_0) e^{-i\omega_j(t-t_0)} - ig_j^* \int_{t_0}^t dt' \hat{a}(t') e^{-i\omega_j(t-t')} \quad (1.112)$$

Następnie podstawiając (1.112) do (1.110), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{a}(t) = & -i\omega \hat{a}(t) - i \sum_j g_j \hat{b}_j(t_0) e^{-i\omega_j(t-t_0)} \\ & - \sum_j |g_j|^2 \int_{t_0}^t dt' \hat{a}(t') e^{-i\omega_j(t-t')} \end{aligned} \quad (1.113)$$

Zwróćmy uwagę, że przechodząc do układu rotującego ze swobodną częstotliwością operatorów (tj. do obrazu oddziaływania):

$$\hat{A}(t) = \hat{a}(t) e^{i\omega t} \quad (1.114)$$

następnie wprowadzając operator szumu:

$$\hat{F}(t) = -i \sum_j g_j \hat{b}_j(t_0) e^{-\omega_j(t-t_0)} \quad (1.115)$$

oraz dokonując ponownie przybliżenia Markowa, tym razem dla drugiego członu po prawej stronie równania (1.113), otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = -\frac{\gamma}{2} \hat{A}(t) + \hat{F}(t) \quad (1.116)$$

Równanie to nazywane jest często *kwantowym równaniem Langevina*, z uwagi na podobieństwo do równań z siłami Langevina opisujących ruchy Browna.

Rozdział 2

Wybrane zjawiska nieliniowe w optyce kwantowej

Skonstruowanie lasera w latach 60. dało możliwości techniczne do rozwoju dziedziny badającej nieliniowe oddziaływanie światła z materią, zwanej optyką nieliniową [4, 24, 38, 41]. Za jej początek uważa się eksperyment generacji drugiej harmonicznej światła przeprowadzony przez Frankena [17], za pomocą rubinowego lasera na kryształach kwarcu. W późniejszym czasie zaobserwowano wiele innych zjawisk nieliniowych, opisanych i wyjaśnionych na gruncie teorii elektromagnetyzmu (klasycznej i kwantowej).

W tym rozdziale celem jest przedstawienie dwóch znanych zjawisk nieliniowych — generacji drugiej harmonicznej i optycznego efektu Kerra — zarówno językiem fizyki klasycznej, jak i kwantowej. Opis poprzedzi wstęp dotyczący bardziej ogólnych równań opisujących oddziaływania padającej fali elektromagnetycznej na układ o nieliniowej polaryzacji. Większość tego rozdziału będzie oparta na pracach [4, 38].

2.1 Nieliniowe sprzężenie fal elektromagnetycznych

W reżimie klasycznym, propagacją fal elektromagnetycznych rządzą równania Maxwella. W przypadku analizowania światła w materii, wygodniej jednak jest posługiwać się inną ich postacią. Pod wpływem fali elektromagnetycznej, atomy ulegają polaryzacji, indukując dodatkowy ładunek, zwany *związanym*. Można go otrzymać, rozwijając pełen ładunek w szereg multipolowy i ucinając na drugim wyrazie:

$$\rho = \rho_0 - \nabla \cdot \mathbf{P} + \dots \quad (2.1)$$

gdzie \mathbf{P} jest wektorem polaryzacji, a $\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{zw}$ ładunkiem związanym. Podobnie można uczynić z prądem \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \nabla \cdot \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \dots \quad (2.2)$$

gdzie \mathbf{M} jest wektorem magnetyzacji (polaryzacji magnetycznej). Następnie definiując wektor indukcji elektrycznej \mathbf{D} i natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} jako:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.4)$$

otrzymujemy następujący układ *równań materiałowych*[20, 23]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Po obustronnym zadziałaniu operatorem rotacji na równanie (2.7) i podstawieniu równania (2.8), przy zaniedbaniu wektora magnetyzacji i stałego prądu, otrzymujemy równanie opisujące propagację fali w ośrodku nieliniowym [38]:

$$\left(\nabla \times (\nabla \times) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

Rozwijając powyższe wektory na nieskończony szereg fal płaskich:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \boldsymbol{\mathcal{E}}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \boldsymbol{\chi}^{(1)}(\omega_i) \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{P}^{NL}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \boldsymbol{\mathcal{P}}^{NL} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - i\omega_m t} \quad (2.13)$$

otrzymujemy następujący zbiór równań dla każdej częstotliwości ω :

$$\left(\nabla \times (\nabla \times) + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \right) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \mathbf{P}^{NL}(\mathbf{k}_m, \omega_m = \omega) \quad (2.14)$$

Prawa strona zależy od wartości \mathbf{E} dla innych ω , co powoduje, że równania te są do siebie nieliniowo sprzężone. Odtąd będziemy zakładali, że fala propaguje się w kierunku osi z . Dodatkowo, ponieważ transfer energii między falami staje się zwykle istotny dopiero po przesunięciu fali o dystans dużo większy, niż jej długość fali, stosujemy przybliżenie:

$$\left| \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}(z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial z} \right| \quad (2.15)$$

Pole \mathbf{E} może zostać zdekomponowane na część równoległą do k , \mathbf{E}_{\parallel} oraz prostopadłą do k , \mathbf{E}_{\perp} . Otrzymujemy w ten sposób dwa równania falowe:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c^2} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E})_{\perp} = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{\perp}^{NL}(\omega, z) \quad (2.16)$$

oraz:

$$\nabla \cdot \left(\epsilon_0 (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E})_{\parallel} + \mathbf{P}_{\parallel}^{NL} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Rozwijając laplasjan po lewej stronie (2.16), otrzymujemy:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{\perp} = e^{i(kz - \omega t)} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial}{\partial z} - k^2 \right) \mathcal{E}_{\perp}(z) \quad (2.18)$$

natomiast ze związku między k a ω (mogącego definiować k) wynika:

$$-k^2 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c^2} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E})_{\perp} = 0 \quad (2.19)$$

Równania te prowadzą wraz z przybliżeniem (2.15) do równania pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\perp}}{\partial z} = \frac{i\mu_0 \omega^2}{2kc^2} \mathbf{P}_{\perp}^{NL}(\omega, z) e^{-i(kz - \omega t)} \quad (2.20)$$

Aby wprowadzić potrzebne przybliżenia, często rozwija się nieliniową polaryzację indukowaną przez pole elektromagnetyczne w szereg potęgowy względem amplitudy pola:

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega) = \mathbf{P}^{(2)}(\omega) + \mathbf{P}^{(3)}(\omega) + \dots \quad (2.21)$$

przy czym:

$$\mathbf{P}^{(n)}(\omega) = \boldsymbol{\chi}^{(n)}(\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) : \mathbf{E}_1(\omega_1) \mathbf{E}_2(\omega_2) \dots \mathbf{E}_n(\omega_n) \quad (2.22)$$

gdzie $\boldsymbol{\chi}^{(n)}$ jest tensorem n -tej rangi nieliniowej podatności elektrycznej. Takie rozwinięcie wiąże się zwykle z możliwością zaniedbania pewnych członów nieliniowych, np. ucięciu szeregu potęgowego na pewnym z wyrazów lub przyjęciu tylko członów o pewnych wartościach częstości ω . W ten sposób tworzymy prostszy problem, opisując układ tzw. hamiltonianem efektywnym.

2.2 Generacja drugiej harmonicznej

Generacja drugiej harmonicznej jest zjawiskiem, w którym na skutek nieliniowego oddziaływania z ośrodkiem, przy wchodzącej fali elektromagnetycznej o częstości ω tworzy się dodatkowa fala o częstotliwości dwukrotnie większej, 2ω . Na początku przedstawiony zostanie opis klasyczny oddziaływania i równania rządzące propagacją fali. W dalszej części podrozdziału, zjawisko generacji drugiej harmonicznej opisane zostanie kwantowomechanicznie.

2.2.1 Opis klasyczny

Przyjmujemy, że pole można zdekomponować na dwie fale płaskie o częstotliwościach ω oraz 2ω , a z kolei każdą z nich na część prostopadłą i równoległą. Dodatkowo, ponieważ generacja drugiej harmonicznej jest zjawiskiem nieliniowym drugiego rzędu, ograniczymy do tego rzędu człony nieliniowe polaryzacji. Z równań (2.16) i (2.17) otrzymujemy:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_\perp(\omega_i) + \frac{\omega_i^2}{c^2} (\boldsymbol{\epsilon}(\omega_i) \cdot \mathbf{E})_\perp(\omega_i) = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_\perp^{(2)}(\omega_i) \quad (2.23)$$

oraz:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E})_\parallel(\omega_i) + \mathbf{P}_\parallel^{(2)}(\omega_i) + \mathbf{P}_\parallel^{(2)}(\omega_i) = 0 \quad (2.24)$$

gdzie $\omega_i = \omega, 2\omega$, $\mathbf{P}^{(2)}(\omega) = \boldsymbol{\chi}^{(2)}(\omega = 2\omega - \omega): \mathbf{E}^*(\omega) \mathbf{E}(2\omega)$, $\mathbf{P}^{(2)}(2\omega) = \boldsymbol{\chi}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega): \mathbf{E}(\omega) \mathbf{E}(\omega)$. Co więcej, przyjmujemy fale w postaci

$$\mathbf{E}(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_1(z) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E}(2\omega) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_2(z) e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - 2\omega t)} \quad (2.26)$$

oraz wektory polaryzacji w postaci:

$$\mathbf{P}^{(2)}(\omega) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_1^{(2)}(z) e^{i((\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}(2\omega) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_2^{(2)}(z) e^{i(2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - 2\omega t)} \quad (2.28)$$

Dalej przyjmujemy, że $\mathbf{P}_\parallel^{(2)}$ jest zwykle zaniedbywalne, co implikuje, że $\mathbf{E}_\parallel(\omega_i)/\mathbf{E}_\perp(\omega_i) = \tan \alpha_i$ jest stałe, gdzie α_i jest kątem między $\mathbf{E}(\omega_i)$ oraz $\mathbf{E}_\perp(\omega_i)$. Tym samym otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\mathcal{E}}_i(z) = \frac{i\mu_0 \omega_i^2}{2k_{i,z} \cos^2 \alpha_i} \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_i^{(2)} e^{i\Delta k z} \quad (2.29)$$

przy czym \mathbf{e}_i jest jednostkowym wektorem wzdłuż kierunku $\boldsymbol{\mathcal{E}}_i$, natomiast Δk jest różnicą wektorów falowych polaryzacji i pola elektrycznego. W szczególności, rozpisanie tego równania dla generacji drugiej harmonicznej, przy założeniu pełnego dopasowania faz ($\Delta k = 0$) prowadzi do następujących równań:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}_1}{\partial z} = \frac{i\omega^2}{k_{1,z} \cos^2 \alpha_1} 2K \boldsymbol{\mathcal{E}}_1^* \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}_2}{\partial z} = \frac{i(2\omega)^2}{k_{2,z} \cos^2 \alpha_2} K \boldsymbol{\mathcal{E}}_1^2 \quad (2.31)$$

przy czym definiujemy K jako:

$$K = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\chi}^{(2)}(2\omega = \omega + \omega): \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \quad (2.32)$$

$$= \frac{\mu_0}{4} \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\chi}^{(2)}(\omega = -\omega + 2\omega): \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \quad (2.33)$$

co wynika z reguł permutacyjnych dla $\chi^{(2)}$. Przy odpowiedniej normalizacji, tj. zamianie zmiennych $\mathcal{E}_1 \rightarrow \alpha_1$, $\mathcal{E}_2 \rightarrow \alpha_2$, $z \rightarrow \xi$, równania (2.30) i (2.31) można zapisać w prostszej postaci:

$$\frac{d}{d\xi}\alpha_1(\xi) = \kappa\alpha_1^*(\xi)\alpha_2(\xi) \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{d\xi}\alpha_2(\xi) = -\frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2(\xi) \quad (2.35)$$

W dalszej analizie będziemy rozważali generację drugiej harmonicznej w rezonatorze, stąd zmienna ξ zostanie zastąpiona zmienną czasową t . Co więcej, do powyższych równań można dodać człony odpowiadające za „siłę” wymuszającą dla poszczególnych modów (czyli zewnętrzne pole pompujące), a także odpowiadające za tłumienie. Nie będzie rozważany problem niedopasowania faz, tzn. założymy odtąd $\Delta k = 0$. W dalszej części pracy będziemy posługiwać się równaniami [13, 36]:

$$\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = -\gamma_1\alpha_1(t) + \kappa\alpha_1^*(t)\alpha_2(t) + \epsilon_1 \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_2(t) = -\gamma_2\alpha_2(t) - \frac{1}{2}\kappa\alpha_1^2(t) + \epsilon_2 \quad (2.37)$$

przy czym ϵ_1 , ϵ_2 są klasycznym koherentnymi polami pompującymi, γ_1 , γ_2 — współczynnikami tłumienia.

2.2.2 Opis kwantowy

Rozważymy oddziaływanie modu światła o częstotliwości ω_1 z drugim modem o podwojonej częstotliwości $\omega_2 \simeq 2\omega_1$ w nieliniowym kryształcie zamkniętym w interferometrze Fabry-Perota [14, 41]. Oba mody są napędzane koherentnymi wejściowymi polami o częstotliwościach ω_p i $2\omega_p$. Układ opisany jest następującym hamiltonianem [14, 25]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_i \quad (2.38)$$

gdzie \mathcal{H}_s opisuje część hamiltonianu związaną z układem (odwracalną), natomiast \mathcal{H}_i część opisującą oddziaływanie z rezerwuarem (nieodwracalną):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s = & \hbar\omega_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + i\hbar\frac{\kappa}{2}(\hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_2 - \hat{a}_1^2\hat{a}_2^\dagger) \\ & + i\hbar(\epsilon_1\hat{a}_1^\dagger e^{-i\omega_p t} - \epsilon_1^*\hat{a}_1 e^{i\omega_p t}) + i\hbar(\epsilon_2\hat{a}_2^\dagger e^{-i2\omega_p t} - \epsilon_2^*\hat{a}_2 e^{i2\omega_p t}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\mathcal{H}_i = (\hat{a}_1\hat{\Gamma}_{c_1}^\dagger + \hat{a}_1^\dagger\hat{\Gamma}_{c_1}) + (\hat{a}_2\hat{\Gamma}_{c_2}^\dagger + \hat{a}_2^\dagger\hat{\Gamma}_{c_2}) \quad (2.40)$$

gdzie $\hat{\Gamma}_{c_1}$ i $\hat{\Gamma}_{c_2}$ są operatorami rezerwuwarowymi (w porównaniu z równaniem (1.89) jest to hamiltonian oddziaływania z rezerwuarem już w obrazie oddziaływania, wyrażony za pomocą operatorów szumu kwantowego \hat{F}). Eliminując

operatory szumu zgodnie z techniką opisaną w 1.5.1, otrzymujemy równanie *master*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_s, \hat{\rho}] + \gamma_1 (2\hat{a}_1 \hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) \\ & + \gamma_2 (2\hat{a}_2 \hat{\rho} \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \\ & + 2\gamma_1 n_1 [[\hat{a}_1, \hat{\rho}], \hat{a}_1^\dagger] + 2\gamma_2 n_2 [[\hat{a}_2, \hat{\rho}], \hat{a}_2^\dagger] \end{aligned} \quad (2.41)$$

gdzie γ_i są współczynnikami tłumienia, n_i — liczbami termicznych fotonów występujących w rezerwarze. Równanie *master* może zostać przekształcone do równania Fokkera-Plancka zgodnie z zasadami opisanymi w rozdziale 1.5.2. Zakładamy przy tym, że rezerwar jest w stanie fotonowej próżni, $n_1 = n_2 = 0$, oraz dopasowanie częstości wymuszającej do częstości rezonatora, $\omega_1 = \omega_p$. Przekształcamy również operatory kreacji i anihilacji do obrazu oddziaływania, aby pozbyć się swobodnej ewolucji tych operatorów:

$$\hat{a}_i \rightarrow \hat{a}_i e^{-i\omega_i t} \quad (2.42)$$

$$\hat{a}_i^\dagger \rightarrow \hat{a}_i^\dagger e^{i\omega_i t} \quad (2.43)$$

Po tych przekształceniach otrzymujemy następujące równanie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\alpha_1, \alpha_2) = & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \{(\gamma_1 \alpha_1 - \epsilon_1 - \kappa \alpha_1^* \alpha_2) P(\alpha_1, \alpha_2)\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \{(\gamma_1 \alpha_1^* - \epsilon_1^* - \kappa \alpha_1 \alpha_2^*) P(\alpha_1, \alpha_2)\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ (\gamma_2 \alpha_2 - \epsilon_2 + \frac{\kappa}{2} \alpha_1^2) P(\alpha_1, \alpha_2) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} \left\{ (\gamma_2 \alpha_2^* - \epsilon_2^* + \frac{\kappa}{2} \alpha_1^{*2}) P(\alpha_1, \alpha_2) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \{ \kappa \alpha_2 P(\alpha_1, \alpha_2) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^{*2}} \{ \kappa \alpha_2^* P(\alpha_1, \alpha_2) \} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Należy skomentować, że w przypadku użycie zwykłej funkcji $P(\alpha_1, \alpha_2)$, mogą pojawić się problemy wynikające z osobliwości tej funkcji dla pewnych stanów kwantowych. Użycie tzw. *uogólnionej reprezentacji* [12], opisaney za pomocą podwojonej liczby zmiennych (np. czterech zmiennych zespolonych $\alpha_1, \alpha_1^\dagger, \alpha_2, \alpha_2^\dagger$, przy czym α_i^\dagger nie jest sprzężeniem zespolonym α_i) zapobiega tego typu sytuacjom, zapewniając poprawne zachowanie się funkcji $P(\alpha_1, \alpha_1^\dagger, \alpha_2, \alpha_2^\dagger)$. Tym niemniej, będziemy używali równania Fokkera-Plancka do wyznaczenia momentów, przez co używanie uogólnionej reprezentacji nie wydaje się konieczne.

Istnieje możliwość rozważenia równań ruchu hamiltonianu drugiej harmonicznej w reprezentacji Heisenberga. Użyjemy tutaj metody przedstawionej w sekcji 1.5.3. Podobnie jak w poprzednim przypadku, sprowadzimy operatory kreacji i anihilacji do obrazu oddziaływania. Uzyskujemy następujące kwantowe równania Langevina:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1(t) = -\gamma_1\hat{a}_1(t) + \kappa\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t) + \epsilon_1 + \hat{F}_1(t) \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_2(t) = -\gamma_2\hat{a}_2(t) - \frac{\kappa}{2}(\hat{a}_1(t))^2 + \epsilon_2 + \hat{F}_2(t) \quad (2.46)$$

przy czym operatory $\hat{F}_i(t)$ są operatorami szumu kwantowego. Jak zauważono w [9], można operatory te potraktować jako proporcjonalne do zewnętrznego pola próżni wnikającego do rezonatora. Stąd równania te możemy przepisać jako:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1(t) = -\gamma_1\hat{a}_1(t) + \kappa\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t) + \epsilon_1 + \hat{A}_{1,in} \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_2(t) = -\gamma_2\hat{a}_2(t) - \frac{\kappa}{2}(\hat{a}_1(t))^2 + \epsilon_2 + \hat{A}_{2,in} \quad (2.48)$$

2.3 Optyczny efekt Kerra

Efekt Kerra nazywa się zmianę współczynnika załamania światła w nieliniowym ośrodku na skutek przyłożonego pola elektrycznego [4, 6]. Istotnym czynnikiem odróżniającym ten efekt od innego efektu, zwanego efektem Pockela, jest fakt, że pojawiająca się różnica wartości współczynnika załamania jest proporcjonalna do kwadratu wartości pola elektrycznego (podczas gdy w drugim wspomnianym efekcie — po prostu do jego wartości w pierwszej potęgce). Wyróżnia się zwykle dwa rodzaje efektu Kerra — elektro-optyczny efekt Kerra oraz optyczny efekt Kerra.

Pierwszy z nich wiąże się z przyłożeniem wolno zmieniającego się pola, np. napięcia między dwoma końcami kryształu. Kryształ staje się wtedy dwójłomny. Drugi z efektów dotyczy przypadku, w którym samo padające światło wytwarza zmianę we współczynniku załamania na skutek indukowania w kryształach polaryzacji. Właśnie tym drugim efektem będziemy się zajmować w tej pracy.

2.3.1 Opis klasyczny

Rozważmy przypadek światła monochromatycznego o częstotliwości ω padającego na kryształ. W tym przypadku pierwszy człon w szeregu potęgowym polaryzacji (2.21) wystąpi tylko dla wartości ω i będzie odpowiadał za zwykły współczynnik załamania dla światła. Drugi ze współczynników w szeregu wystąpi dla wartości $\omega + \omega = 2\omega$ oraz $\omega - \omega = 0$ i odpowiedzialny będzie za, odpowiednio, generację drugiej harmonicznej oraz pojawienie się napięcia na kryształach. Dopiero trzeci współczynnik, a dokładniej jedna z jego składowych o częstotliwości $\omega + \omega - \omega = \omega$ będzie związana z efektem Kerra [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(3)} &= 3\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega): \mathbf{E}(\omega)\mathbf{E}(\omega)\mathbf{E}^*(\omega) \\ &= 3\chi^{(3)}(\omega = \omega + \omega - \omega): |\mathbf{E}(\omega)|^2 \mathbf{E}(\omega) \end{aligned} \quad (2.49)$$

przy czym czynnik 3 przy podatności wynika z relacji permutacyjnych. Jeśli utniemy szereg potęgowy na trzecim wyrazie i dla prostoty założymy pełną

symetrię (co pozwala zredukować tensorową naturę podatności do postaci skalarnej), całkowita polaryzacja będzie równa:

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi^{(1)} \mathbf{E}(\omega) + \chi^{(3)} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \mathbf{E}(\omega) = \chi_{eff} \mathbf{E}(\omega) \quad (2.50)$$

gdzie χ_{eff} jest efektywną podatnością elektryczną, wyrażoną wzorem:

$$\chi_{eff} = \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \quad (2.51)$$

Następnie należy odnieść podatność elektryczną do współczynnika załamania:

$$n^2 = \epsilon_0(1 + \chi) \quad (2.52)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania, a ϵ_0 przenikalnością elektryczną próżni. Podstawiając do wzoru χ_{eff} , otrzymujemy:

$$n = \sqrt{\epsilon_0(1 + \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |\mathbf{E}(\omega)|^2)} \quad (2.53)$$

Następnie rozwijamy pierwiastek w szereg potęgowy względem małego wyrazu $\epsilon_0 3\chi^{(3)} |\mathbf{E}(\omega)|^2$, odcinając wyrazy powyżej pierwszego. Otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{\epsilon_0(1 + \chi^{(1)})} + \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{2\sqrt{\epsilon_0(1 + \chi^{(1)})}} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \\ &= n_0 + \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{2n_0} |\mathbf{E}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Pozostaje uśrednić współczynnik po czasie, pamiętając, że $\langle E(\omega)^2 \rangle = 2|\mathbf{E}(\omega)|^2$ (przyjmując notację, zgodnie z którą amplituda pola stoi przy obu eksponensach z ujemnymi i dodatnimi częściami). Dostajemy:

$$n = n_0 + \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{n_0} \langle E(\omega)^2 \rangle = n_0 + n_2 \langle E(\omega)^2 \rangle \quad (2.55)$$

gdzie

$$n_2 = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{n_0} \quad (2.56)$$

Tłumaczy to, że zmiana współczynnika załamania jest proporcjonalna do kwadratu wartości padającego pola elektrycznego.

2.3.2 Opis kwantowy

Rozważmy oddziaływanie pola elektromagnetycznego z nieliniowym ośrodkiem w obecności optycznego efektu Kerra. Cały układ może być opisany za pomocą następującego hamiltonianu [29, 30, 39, 40]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_s + \mathcal{H}_i \quad (2.57)$$

gdzie, jak zwykle, \mathcal{H}_s jest hamiltonianem układu, zaś \mathcal{H}_i opisuje oddziaływanie z rezerwuarem:

$$\mathcal{H}_s = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\chi}{2} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + i\hbar(\epsilon \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t} - \epsilon^* \hat{a} e^{i\omega_p t}) \quad (2.58)$$

$$\mathcal{H}_i = \hat{a}\hat{\Gamma}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\Gamma} \quad (2.59)$$

gdzie $\hat{\Gamma}$ jest operatorem rezerwurowym, ϵ — koherentnym polem pompującym, a χ stałą sprzężenie odpowiedzialną za efekt Kerra. Eliminując operatory szumu zgodnie z techniką z części 1.5.1 otrzymujemy następujące równanie *master*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = & -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_s, \hat{\rho}] + \gamma(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}_1) \\ & + 2\gamma n[[\hat{a}, \hat{\rho}], \hat{a}^\dagger] \end{aligned} \quad (2.60)$$

gdzie n jest średnią liczbą fotonów w rezerwarze. Podobnie, jak w przypadku generacji drugiej harmonicznej, wykorzystując reguły z części 1.5.2, zakładając stan próżni fotonowej rezerwaru ($n = 0$), dopasowanie częstości fali pompującej do częstości rezonatora ($\omega_p = \omega$) oraz używając operatorów w obrazie oddziaływania, przekształcamy powyższe równanie do odpowiedniego równania Fokkera-Plancka [40]:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha, t) = L_{cl} + L_{qu} \quad (2.61)$$

gdzie L_{cl} i L_{qu} to wydzielone dwie części równania odpowiedzialne, odpowiednio, za klasyczne i kwantowe zachowanie układu:

$$\begin{aligned} L_{cl} = & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left(\frac{1}{2}\gamma\alpha - \epsilon + i\chi\alpha|\alpha|^2 \right) P(\alpha, t) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left\{ \left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^* - \epsilon^* - i\chi\alpha^*|\alpha|^2 \right) P(\alpha, t) \right\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$L_{qu} = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha^2 P(\alpha, t)) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha^*}(\alpha^{*2} P(\alpha, t)) \quad (2.63)$$

Podobnie, jak w przypadku generacji drugiej harmonicznej, użyteczne okaże się rozwiązywanie równań ruchu w obrazie Heisenberga. Zakładając, że operatory kreacji i anihilacji będą rozpatrywane w obrazie oddziaływania:

$$\hat{a} \rightarrow \hat{a}e^{-i\omega t} \quad (2.64)$$

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

otrzymujemy następujące równanie Langevina:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -\gamma\hat{a}(t) - i\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 + \epsilon + \hat{F}(t) \quad (2.66)$$

gdzie operator $\hat{F}(t)$ jest operatorem szumu kwantowego.

Rozdział 3

Miary splątania

3.1 Definicja splątania

Niewątpliwie, *splątanie* jest najistotniejszą cechą odróżniającą fizykę kwantową od klasycznej [35]. Początkowo, było traktowane w sposób jakościowy, jako element nieklasycznego zachowania się układu kwantowego. Z czasem jednak, rozpoczynając od prac Bella [1] nad nierównościami związanymi z korelacjami, zaczęto podejmować próby ilościowego opisu splątania. Stąd pojawiło się pojęcie *miar* splątania w układach kwantowych.

Jak się okaże w dalszej części rozdziału, niezwykle istotną rolę przy definicji splątania odgrywają tzw. *lokalne operacje kwantowej i klasycznej komunikacji* (LOCC). Nazwą tą określa się cały szereg możliwych operacji, włącznie z pomiarami, dotyczących jednak tylko jednego z podukładów (stąd lokalne). Dochodzi do tego wymiana dowolnej informacji klasycznym kanałem komunikacji. Istotność LOCC polega na tym, że odzwierciedlają one to, co rozumiemy poprzez klasyczne korelacje. Ich działanie nie wykracza poza możliwości informacyjne i obliczeniowe klasycznych układów. Stąd za ich pomocą nie można utworzyć stanu splątanego ze stanu niesplątanego. Co więcej, jeśli stan po operacjach LOCC wykazuje jakies cechy splątania, można być pewnym, że cechy te musiały już istnieć *przed* wykonaniem operacji, gdyż LOCC nie są w stanie zwiększyć siły splątania. Wszystkie terminy, które zostały tutaj wymienione, zostaną doprecyzowane w dalszej części rozdziału.

Zanim zdefiniuje się miary splątania i poda własności, jakie powinny być przez nie spełniane, należy zastanowić się nad samą definicją splątania. Może być ono uważane za własność układu kwantowego, w którym pojawiają się korelacje niemożliwe do osiągnięcia klasycznie [43]. Da się wyróżnić kilka własności wskazujących czy dany układ jest splątany czy też nie [35]:

- Stany separowalne, tzn. takie, których macierz gęstości da się przedstawić w postaci sumy iloczynów tensorowych macierzy wszystkich podukładów:

$$\hat{\rho}_{total} = \sum_i p_i \hat{\rho}_1^i \otimes \hat{\rho}_2^i \otimes \dots \quad (3.1)$$

nie są splątane.

- Splątanie nie może wzrosnąć na skutek lokalnych operacji kwantowych i klasycznej komunikacji (LOCC) — postulat ten jest uzasadniony tym,

że klasyczna komunikacja nie może zwiększyć nieklasycznych korelacji; co więcej lokalne operacje kwantowe nigdy nie zmienią stanu separowalnego w nieseparowalny, tzn. nie doprowadzą do pojawienia się splątania.

- Splątanie nie może zmienić się pod wpływem lokalnych operacji unitarnych — z racji ich odwracalność, jakakolwiek zmiana byłaby sprzeczna z poprzednią własnością.
- Istnieją stany maksymalnie splątane — okazuje się, że każdy stan kwantowy może zostać otrzymany poprzez zastosowanie LOCC ze stanu:

$$|\psi_{\max}\rangle = \frac{|0,0\rangle + |1,1\rangle + \dots + |d-1,d-1\rangle}{\sqrt{d}} \quad (3.2)$$

(lub każdego innego stanu otrzymanego przez lokalnie unitarne transformacje) dla dwuczęściowego, d -wymiarowego układu.

3.2 Postulaty miar splątania

Od tego momentu ograniczymy się w rozważaniach tylko do układu złożonego z dwóch części, ponieważ są najlepiej poznane i tylko takie będą tematem niniejszej pracy.

Celem wprowadzenia ilościowego opisu splątania (czyli *miary* splątania), należy ustalić wpierw, jakie własności powinna posiadać taka miara, aby była zgodna z własnościami i charakterem samego splątania. Przede wszystkim, będzie to funkcja:

$$E: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (3.3)$$

$$\hat{\rho} \mapsto E(\hat{\rho}) \quad (3.4)$$

gdzie \mathcal{H} jest przestrzenią Hilberta. Zakłada się również normalizację dla maksymalnie splątanego stanu (3.2):

$$E(|\psi_{\max}\rangle) = \log d \quad (3.5)$$

Poniżej przedstawiona zostaje lista postulatów, które powinny być spełnione przez każdą z takich miar [35] (choć nie wszystkie są spełniane przez istniejące miary):

1. $E(\hat{\rho}) = 0$ jeśli $\hat{\rho}$ jest separowalny
2. E nie rośnie (w sensie wartości średniej) przy operacjach LOCC:

$$E(\hat{\rho}) \geq \sum_i p_i E\left(\frac{\hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger}{\text{Tr}\{\hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger\}}\right) \quad (3.6)$$

gdzie \hat{A}_i są tzw. operatorami Krausa [32] opisującymi pewne operacje LOCC.

3. Dla stanu czystego $|\psi\rangle\langle\psi|$ E redukuje się do *entropii splątania* (ang. *entropy of entanglement*) [32]:

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) = (S \circ \text{Tr}_B)(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (3.7)$$

przy czym S jest entropią von Neumanna (opisaną w następnej sekcji) a Tr_B jest operacją częściowego śladu po podukładzie B .

Poza wyżej wymienionymi pojawiają się jeszcze inne własności, nie są jednak ogólnie przyjmowane:

1. Wypukłość — z matematycznego punktu widzenia miara splątania jest funkcją wypukłą, tzn:

$$E\left(\sum_i p_i \hat{\rho}_i\right) \leq \sum_i p_i E(\hat{\rho}_i) \quad (3.8)$$

2. Addytywność — mając n kopii stanu $\hat{\rho}$, miara dla takiego stanu jest sumą miar dla poszczególnych stanów, tj:

$$E(\hat{\rho}^{\otimes n}) = nE(\hat{\rho}) \quad (3.9)$$

Odmianą tej własności, mniej restrykcyjną i bardziej akceptowalną jest regularyzowana (asymptotyczna) addytywność, mianowicie miara:

$$E^\infty(\hat{\rho}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\hat{\rho}^{\otimes n})}{n} \quad (3.10)$$

jest addytywna, natomiast miara E nie musi być.

3. Ciągłość — miara splątania jest funkcją ciągłą.

3.3 Splątanie w przestrzeni Hilberta o skończonym wymiarze

Miary splątania zdefiniowane są i zbadane najlepiej w przypadku układu składającego się z dwóch podukładów (dwóch kubitów) w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta (wymiar będzie oznaczany przez d). Rozpoczniemy analizę od stanów czystych, tj. stanów, dla których macierz gęstości może być przedstawiona w postaci operatora rzutowego $|\psi\rangle\langle\psi|$ na jednowymiarową podprzestrzeń. Taka macierz gęstości (i tylko taka) ma swój odpowiednik w postaci wektora stanu $|\psi\rangle$.

Jak wspomniano już w przypadku kryteriów, jakie powinna spełniać porządna miara splątania, musi ona w przypadku stanów czystych sprowadzać się do entropii splątania [2], która jest wprost związana z entropią von Neumanna [32]. Sugeruje to natychmiast fakt istnienia tylko jednej miary dla stanów czystych, którą jest wyżej wspomniana entropia.

Entropię von Neumanna $S(\hat{\rho})$ definiuje się jako

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) \quad (3.11)$$

na podobieństwo entropii klasycznej. Z kolei, entropią splątania nazywa się entropię von Neumanna macierzy gęstości powstałej w wyniku wykonania częściowego śladu na jednym z podukładów:

$$E(|\psi\rangle\langle\psi|) \stackrel{\text{def}}{=} S(\text{Tr}_A\{|\psi\rangle\langle\psi|\}) = S(\text{Tr}_B\{|\psi\rangle\langle\psi|\}) \quad (3.12)$$

Zostało pokazane [11], że każda miara L na stanach czystych jest równoważna entropii splątania, jeśli jest:

1. normalizowana na stanie singletowym,
2. addytywna na stanach czystych,
3. nierosnąca pod wpływem deterministycznych transformacji LOCC,
4. asymptotycznie ciągła na stanach czystych, tj dla każdego ciągu $\{|\phi_n\rangle\}$, $\{|\psi_n\rangle\}$, zbieżnych do tej samej granicy (w sensie normy śladowej) zachodzi:

$$\frac{L(|\phi_n\rangle) - L(|\psi_n\rangle)}{1 + \log(\dim \mathcal{H})} \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Są to warunki bardzo ogólne, co uzasadnia przyjęcie jednej miary splątania na stanach czystych.

W przypadku stanów mieszanych, sprawa jest dużo bardziej skomplikowana. Wyróżnia się szereg miar splątania, spełniających część lub wszystkie własności wyszczególnione w części 3.2. Celem omówienia dwóch podstawowych miar należy wpieryw przyrzeć się transformacji stanów kwantowych w asymptotycznej granicy. Rozważmy n kopii stanu $\hat{\rho}$. Niech pod wpływem transformacji LOCC stany te zostaną przekształcone w m stanów $\hat{\sigma}$. Przez r oznaczmy sprawność takiego przekształcenia definiowaną, jako $r = \frac{m}{n}$. Definiując miary splątania, będziemy rozważali supremum wśród takich wartości, czyli szukali jak najlepszej sprawności takiej transformacji. Co więcej, supremum będzie poszukiwane w przypadku asymptotycznym, czyli dla $n \rightarrow \infty$.

Na podstawie sprawności transformacji stanów pod wpływem LOCC, można zdefiniować dwie miary, które okazują się bardzo istotne z punktu widzenia teorii splątania. *Koszt splątania* (ang. *entanglement cost*) [35] definiuje się jako najlepszą sprawność konwersji n maksymalnie splątanych stanów (singletów) do m kopii danego stanu, którego splątanie mierzymy. Jeśli transformację LOCC, zachowującą ślad, oznaczymy przez $\Phi(\cdot)$, koszt splątania E_C definiujemy jako:

$$E_C(\hat{\rho}) = \inf \left\{ r : \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{\Psi} D(\hat{\rho}^{\otimes n}, \Phi(|\phi_{\max}\rangle^{\otimes rn})) \right] = 0 \right\} \quad (3.14)$$

przy czym $D(\cdot, \cdot)$ jest odpowiednią miarą odległości, np. normą śladową.

Podobnie, można zdefiniować proces odwrotny, czyli konwersję n kopii danego stanu $\hat{\rho}$ do m kopii stanu maksymalnie splątanego. Miara powstała w wyniku rozważania takiego procesu to *destylowalne splątanie* (ang. *distillable entanglement*) [35], E_D . Definiuje się je w analogiczny sposób, jako:

$$E_D(\hat{\rho}) = \sup \left\{ r : \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{\Psi} D(\Phi(\hat{\rho}^{\otimes n}), |\phi_{\max}\rangle^{\otimes rn}) \right] = 0 \right\} \quad (3.15)$$

W tym przypadku jest to supremum, ponieważ chcemy uzyskać jak największą liczbę kopii stanów maksymalnie splątanych z danej liczby kopii stanu $\hat{\rho}$,

podczas gdy w przypadku kosztu splątania było to infimum, gdyż wtedy z jak najmniejszej liczby stanów maksymalnie splątanych chcieliśmy uzyskać daną liczbę kopii stanu $\hat{\rho}$.

Okazuje się, że miary te dla stanów czystych są sobie równe i obie sprowadzają się do entropii splątania. Co więcej, dla dowolnych stanów zachodzi bardzo silna własność, która pozwala traktować obie wielkości jako górne i dolne ograniczenie na możliwe miary splątania. Mianowicie, przyjmując że dana miara $L(\hat{\rho})$ spełnia pierwszy i drugi z postulatów splątania (ma wartość zero dla stanów separowalnych i nie wzrasta pod wpływem LOCC), jest asymptotycznie ciągła w sensie (3.13) oraz posiada swoją regularyzację:

$$L^\infty(\hat{\rho}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\hat{\rho}^{\otimes n})}{n} \quad (3.16)$$

to zachodzi:

$$E_C(\hat{\rho}) \leq L^\infty(\hat{\rho}) \leq E_D(\hat{\rho}) \quad (3.17)$$

Poniżej wymienimy jeszcze dwie inne miary, pozostawiając dla czytelności ich angielskie nazwy (brak jest bezpośredniego lub powszechnie przyjętego ich tłumaczenia):

- *Concurrence* („współbieżność”) [44], zdefiniowana tylko dla kubitów (czyli wymiaru $d = 2$), jako:

$$C(\hat{\rho}) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (3.18)$$

gdzie $\{\lambda_i\}$ są wartościami własnymi macierzy $\hat{\rho}\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y\hat{\rho}^* \otimes \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$, gdzie $\hat{\sigma}_y$ jest jedną z macierzy Pauliego, natomiast $\hat{\rho}^*$ jest macierzą powstałą w wyniku sprzężenia wszystkich elementów macierzy $\hat{\rho}$. *Concurrence* jest bezpośrednio związany ze szczególnym sposobem liczenia ogólniejszej miary splątania — *splątania formacji* (ang. *entanglement of formation*). *Concurrence* przyjmuje wartość 0 dla stanów separowalnych oraz 1 dla stanów maksymalnie splątanych.

- *Negativity* („negatywność”), bazująca na kryterium splątania Peresa-Horodeckiego [33, 22], zdefiniowana jest jako:

$$N(\hat{\rho}) = \max\left(0, -2 \sum_i \mu_i\right) \quad (3.19)$$

gdzie $\{\mu_i\}$ jest zbiorem ujemnych wartości własnych macierzy $\hat{\rho}^{TB}$ częściowo transponowanej, przy czym transpozycja jest wykonana tylko dla elementów z podukładu B . Tak zdefiniowana miara *negativity* przyjmuje wartość 0 dla stanów separowalnych oraz 1 dla stanów maksymalnie splątanych. Miarę tą można zdefiniować również jako:

$$N(\hat{\rho}) = \|\hat{\rho}^{TB}\| - 1 \quad (3.20)$$

gdzie $\|\hat{X}\| = \text{Tr} \left\{ \sqrt{\hat{X}^\dagger \hat{X}} \right\}$ jest normą śladową macierzy operatora. Obie definicje są sobie równoważne. Aby miara stała się addytywna, wprowadza

się jej modyfikację znaną jako *logarithmic negativity* („logarytmiczna negatywność”):

$$E_N(\hat{\rho}) = \log_2 \|\hat{\rho}^{TB}\| \quad (3.21)$$

3.4 Splątanie dla zmiennych ciągłych

Zdefiniowanie miar splątania w przypadku nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta (lub inaczej — w przypadku zmiennych ciągłych) staje się niezwykle trudnym zadaniem. Przykładowy problem, na jaki się napotyka, to następujący fakt: w dowolnie małym otoczeniu (w sensie normy śladowej) każdego czystego, separowalnego stanu, istnieje inny czysty stan z dowolnie dużą wartością entropii splątania! Co prawda efekt ten zanika w przypadku rozpatrywania stanów o ograniczonej energii, tym niemniej zdefiniowanie solidnych miar dla dowolnych stanów ciągłych nadal jest poza zasięgiem teorii splątania. Stąd ogranicza się często rozważania do zawężonej grupy stanów, mających w reprezentacji Wignera postać gaussowską (patrz 1.4) [35, 7].

Stan gaussowski jest całkowicie opisany przy pomocy wartości średnich i momentów drugiego rzędu. W przypadku splątania średnie są nieistotne i pełna informacja o splątaniu może zostać odczytana z macierzy kowariancji, nazywanej też macierzą korelacji (pomimo, że nie jest unormowana).

Zanim przystąpimy od opisu stanów splątanych, należy wyszczególnić zestaw operacji, jakie mogą być wykonywane na stanach gaussowskich. Przede wszystkim dopuszcza się branie kombinacji operatorów jako nowej bazy, co równoznaczne jest z pewną transformacją liniową S . Jak wiadomo, macierz korelacji pod wpływem takiej transformacji ulegnie zmianie analogicznej do zmiany bazy, $\Sigma = S^T \Sigma S$. Znak transpozycji zamiast przekształcenia odwrotnego pojawia się stąd, że przekształcenie liniowe S musi spełniać ściśle określone własności, tak aby nowe operatory \hat{X}'_i będące kombinacjami starych \hat{X}_i , zachowywały dobrze określone zasady komutacji:

$$[\hat{X}'_i, \hat{X}'_j] = i\sigma_{ij} \quad (3.22)$$

gdzie:

$$\sigma = \bigoplus_{t=1}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

jest macierzą symplektyczną. W przypadku zachowania takich zasad, odwzorowania S muszą tworzyć rzeczywistą grupę symplektyczną $Sp(2n, \mathbb{R})$. Można pokazać, że dla dwuczęściowego stanu gaussowskiego warunkiem wystarczającym separowalności takiego stanu jest zachowanie zasad komutacji przy częściowej transpozycji stanu (która w tym przypadku oznacza sprzężenie zespolone macierzy gęstości, co jest równoważne odwróceniu czasu w równaniu ewolucji). Nie jest to niestety warunek konieczny.

3.4.1 Wybrane miary

Miary splątania występujące dla stanów gaussowskich są odpowiednikami miar dla przypadku skończenie wymiarowego. Poniżej zostaną omówione tylko

dwie z nich, których wyznaczenie jest stosunkowo łatwe [35]:

- Entropia splątania — zachowuje poprzednią definicję jako entropia von Neumanna z częściowego śladu po jednej z części układu z macierzy gęstości. Entropię w przypadku stanów gaussowskich można wyrazić w pełni poprzez tzw. *symplektyczne wartości własne*. Są one zdefiniowane jako wartości własne macierzy $|i\Sigma\sigma|$, przy czym $|\cdot|$ oznacza wartość bezwzględna (w przypadku macierzy wynikiem operacji jest macierz o wartościach własnych równych wartościom bezwzględny pierwotnej macierzy). Można pokazać, że jeśli jedna część układu składa się z n_A oscylatorów harmonicznym (np. modów światła), druga część z n_B oscylatorów, wtedy entropia splątania może zostać wyrażona w następujący sposób:

$$S = \sum_{i=1}^{n_A} \left(\frac{\mu_i + 1}{2} \log_2 \frac{\mu_i + 1}{2} - \frac{\mu_i - 1}{2} \log_2 \frac{\mu_i - 1}{2} \right) \quad (3.24)$$

gdzie μ_i są właśnie symplektycznymi wartościami własnymi podmacierzy korelacji Σ_A , która powstaje poprzez wzięcie operacji śladu na podukładzie B (lub inaczej — marginalizację rozkładu po zmiennych B). Jest to dokładnie podmacierz korelacji związana ze zmiennymi z A.

- *Logarithmic negativity* — również ta miara pozostaje prosta do wyznaczenia w przypadku stanów gaussowskich. Zakładając ponownie, że układ składa się z n_A oscylatorów w jednej części oraz n_B w drugiej, definiujemy częściowo transponowaną macierz korelacji Σ^{T_B} jako macierzy stanu kwantowego transponowanego ze względu na zmienne B. Wtedy wartość miary *logarithmic negativity* można wyrazić jako:

$$E_N = - \sum_{i=1}^n \log_2(\min\{1, \tilde{\mu}_k\}) \quad (3.25)$$

przy czym $\tilde{\mu}_k$ są symplektycznymi wartościami własnymi macierzy Σ^{T_B}

3.4.2 Kryterium nieseparowalności

Inne podejście, nie korzystające wprost z częściowej transpozycji stanu, zostało wprowadzone w [15], gdzie pokazano konieczny i wystarczający warunek, aby stan gaussowski był separowalny. Cała analiza zostanie przeprowadzona w przypadku stanu składającego się z dwóch części, przy czym w każdej z nich znajduje się pojedynczy oscylator harmoniczny. Zakładamy więc, że układ opisywany jest za pomocą czterech operatorów, które tutaj zostaną nazwane $\hat{x}_1, \hat{p}_1, \hat{x}_2, \hat{p}_2$, oraz spełniają następujące reguły komutacji:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (3.26)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (3.27)$$

Utwórzmy z tych par dwie ich kombinacje w następujący sposób:

$$\hat{u} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2 \quad (3.28)$$

$$\hat{v} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2 \quad (3.29)$$

przy czym a jest dowolną niezerową liczbą rzeczywistą. Korzystając z nierówności operatorowej:

$$\langle(\Delta\hat{x}_j)^2\rangle + \langle(\Delta\hat{p}_j)^2\rangle \geq |[\hat{x}_j, \hat{p}_j]| = 1 \quad (3.30)$$

oraz z separowalności stanu $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_{i1} \otimes \hat{\rho}_{i2} \quad (3.31)$$

można pokazać, że nowe operatory \hat{u} i \hat{v} muszą spełniać nierówność:

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle \geq a^2 + \frac{1}{a^2} \quad (3.32)$$

Następnym elementem teorii z [15] jest wprowadzenie dwóch postaci standardowych macierzy korelacji i pokazanie, że macierz korelacji każdego stanu gaussowskiego może zostać sprowadzona do każdej z tych postaci poprzez wykonanie operacji LLUBO (*local linear unitary Bogoliubov operations*). Są to operacje o ogólnej postaci $U = U_1 \otimes U_2$ (iloczyn tensorowy sugeruje właśnie ich lokalność), przy czym $U(\hat{x}_j, \hat{p}_j)^T U^\dagger = H_j(\hat{x}_j, \hat{p}_j)^T$, gdzie H_j jest rzeczywistą macierzą o wyznaczniku równym jedności. Można pokazać [7], że LLUBO można sprowadzić do kombinacji operatorów ścięśniania i lokalnych rotacji na stanach.

Poniżej przedstawiamy obie postacie standardowe pomijając dowody transformacji (znajdujące się w [15]):

Postać standardowa I Każdy stan gaussowski $\hat{\rho}$ może zostać sprowadzony do stanu o następującej macierzy korelacji:

$$\Sigma^I = \begin{pmatrix} n & c & & \\ & n & c' & \\ c & & m & \\ & c' & & m \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

przy czym $n, m \geq 1$, natomiast c, c' są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Postać standardowa II Każdy stan gaussowski $\hat{\rho}$ może zostać sprowadzony do stanu o następującej macierzy korelacji:

$$\Sigma^{II} = \begin{pmatrix} nr_1 & & \sqrt{r_1 r_2} c & \\ & \frac{n}{r_1} & & \frac{c'}{\sqrt{r_1 r_2}} \\ \sqrt{r_1 r_2} c & & mr_2 & \\ & \frac{c'}{\sqrt{r_1 r_2}} & & \frac{m}{r_2} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

przy czym r_1 i r_2 są parametrami ściśnięcia, spełniającymi następujące równości:

$$\frac{\frac{n}{r_1} - 1}{nr_1 - 1} = \frac{\frac{m}{r_2} - 1}{mr_2 - 1} \quad (3.35)$$

$$\sqrt{r_1 r_2} |c| - \frac{|c'|}{\sqrt{r_1 r_2}} = \sqrt{(nr_1 - 1)(mr_2 - 1)} - \sqrt{\left(\frac{n}{r_1} - 1\right) \left(\frac{m}{r_2} - 1\right)} \quad (3.36)$$

Mając stan gaussowski w drugiej postaci normalnej, można pokazać najważniejszy z wniosków zawartych w [15]: warunek konieczny i wystarczający separowalności stanu gaussowskiego $\hat{\rho}$. Stan ten jest separowalny wtedy i tylko wtedy gdy, przy wyrażeniu macierzy korelacji w postaci standardowej II, nierówność (3.32) jest spełniona przez następujące operatory:

$$\hat{u} = a_0 \hat{x}_1 - \frac{c_1}{|c_1|} \frac{1}{a_0} \hat{x}_2 \quad (3.37)$$

$$\hat{v} = a_0 \hat{p}_1 - \frac{c_2}{|c_2|} \frac{1}{a_0} \hat{p}_2 \quad (3.38)$$

przy czym:

$$a_0^2 = \sqrt{\frac{mr_2 - 1}{nr_1 - 1}} = \sqrt{\frac{m/r_2 - 1}{n/r_1 - 1}} \quad (3.39)$$

$$c_1 = \sqrt{r_1 r_2} c \quad (3.40)$$

$$c_2 = \frac{c'}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (3.41)$$

gdzie m, n, c, c', r_1, r_2 są elementami macierzy korelacji występującymi w jej postaci standardowej II.

Po bliższej analizie warunków twierdzenie, można pokazać [5], że nieoznaczoności operatorów \hat{u} i \hat{v} są równe, tzn:

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle \quad (3.42)$$

a stąd nierówność (3.32) może zostać wyrażona w postaci iloczynowej:

$$\sqrt{\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle} < \frac{1}{2} \left(a_0 + \frac{1}{a_0} \right) \quad (3.43)$$

Sugeruje to wprowadzenie następującej miary splątania, nazwanej *stopniem nieseparowalności* [5]:

$$\mathcal{I} = \frac{2\sqrt{\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle}}{a_0 + \frac{1}{a_0}} \quad (3.44)$$

Nasuwa się następujące pytanie — czy \mathcal{I} może rzeczywiście zostać nazwana miarą? Z pewnością dyskryminuje stany splątane od separowalnych. Co więcej jest niezmiennicza przy lokalnych operacjach unitarnych (są to operacje LLUBO, a więc postać standardowa II nie zmienia się). Z definicji zawsze jest dodatnia. Co do pozostałych własności, autorowi tej pracy nie są znane żadne prace traktujące na ten temat.

3.4.3 Kryterium EPR

Termin *paradoks EPR* pochodzi z pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena z 1935 roku [16], w której to po raz pierwszy pojawiła się koncepcja splątania. Pojawienie się paradoksu EPR wiąże się z istnieniem w układzie korelacji kwantowych pomiędzy parą niekomutujących zmiennych, w tym sensie, że pomiar jednej z obserwabi w układzie A pozwala wnioskować lepiej o układzie B [5].

Aby zdefiniować kryterium EPR, wprowadzimy pojęcie warunkowej wariancji jako:

$$\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{1|2} = \min_k \langle(\Delta\hat{x}_1 - k\Delta\hat{x}_2)^2\rangle \quad (3.45)$$

Minimum w tej postaci wariacyjnej jest osiąganane jako „rzut” operatora \hat{x}_1 na układ 1 (jest to ściśle przy odpowiednim zdefiniowaniu iloczynu skalarnego między operatorami jako korelacji między nimi przy założeniu hermitowskości tych operatorów), stąd:

$$\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{1|2} = \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle - \frac{\langle(\Delta\hat{x}_1\Delta\hat{x}_2)\rangle}{\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle} \quad (3.46)$$

a korzystając z macierzy korelacji w postaci (1.84):

$$\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{1|2} = C_{11}^{11} - \frac{|C_{11}^{12}|^2}{C_{11}^{22}} \quad (3.47)$$

Podobnie definiuje się warunkowe wariancje dla operatorów p_1, x_2, p_2 . Jak widać, wszystkie one mogą zostać przedstawione wyłącznie w postaci elementów macierzy korelacji. Co więcej, można pokazać, że jeśli zdefiniujemy *stopień paradoksu EPR* jako:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{1|2} \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_{1|2} \quad (3.48)$$

(lub symetrycznie zamieniając indeksy 1 i 2), to dla stanów separowalnych musi zachodzić $\epsilon \geq 1$. Oznacza to, że jeśli $\epsilon < 1$, to stan jest splątany, jest to więc kryterium wystarczające splątania (ale nie konieczne). Sam stopień paradoksu EPR może służyć jako miara siły splątania między podukładami, choć, podobnie jak w przypadku stopnia nieseparowalności, nie jest znane autorowi, czy (i które) aksjomaty miar splątania są w tym przypadku spełnione. Oczywiście, z nierówności Cauchy’ego-Schwarza dla operatorów wynika, że $\epsilon \geq 0$.

Rozdział 4

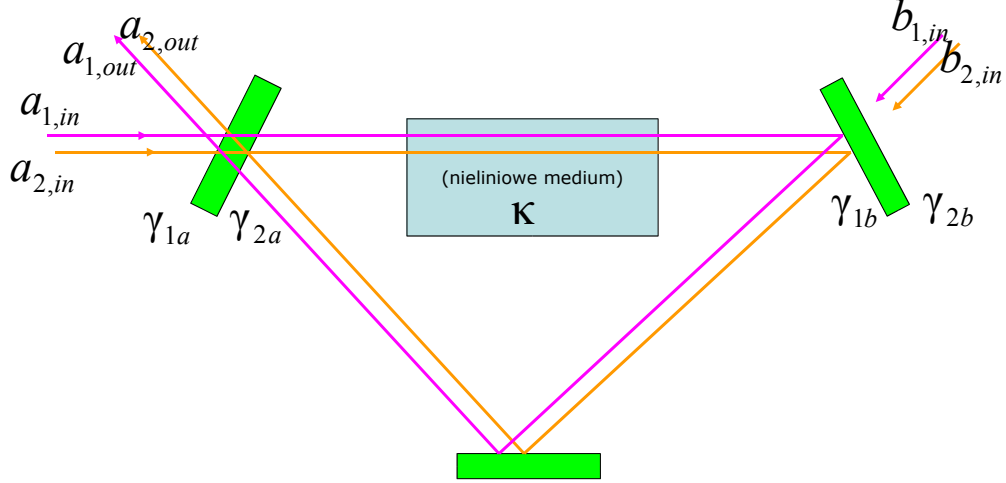
Splątanie w procesie generacji drugiej harmonicznej

Procesy nieliniowe okazują się bardzo dobrym sposobem generacji stanów splątanych światła [21]. W szczególności, w tym rozdziale zajmiemy się analizą splątania w przypadku generacji drugiej harmonicznej w rezonatorze. Na skutek obecności nieliniowego ośrodka między podstawowym modem oraz generowanym modem o podwojonej częstotliwości tworzą się korelacje, pozwalające klasyfikować układ jako splątany. Analizowane jest światło wychodzące z rezonatora, używając do tego celu formalizmu wejścia-wyjścia [9, 19]. Podstawowym sposobem opisu układu są kwantowe równania Langevina, linearyzowane w punktach odpowiadających ustalonym stanom koherentnych klasycznych amplitud. Większa część poniższego rozdziału pochodzi z pracy [21].

4.1 Opis układu i równania ruchu

Rozpatrywanym układem jest nieliniowy ośrodek zamknięty w rezonatorze, przedstawiony na rysunku 4.1. Rezonator składa się z dwóch półprzepuszczalnych zwierciadeł, ośrodka umieszczonego między nimi, oraz dodatkowego zwierciadła (zwierciadło dolne na rysunku) umożliwiającego rozdzielenie promieni wchodzących i wychodzących (biegną w różnych kierunkach)). Jedno ze zwierciadeł półprzepuszczalnych (lewe) jest traktowane jako wpuszczające do rezonatora światło wejściowe i wypuszczające wyjściowe. Drugie (prawe) — reprezentuje straty związane z kontaktem z rezerwuarem.

Aby wyprowadzić równania, posłużymy się hamiltonianem (2.38), jednak zgodnie z formalizmem wejścia-wyjścia [19], koherentne światło wejściowe zostanie włączone do rezerwuaru. Tym samym otrzymamy równania podobne do (2.47-2.48), ale bez obecności koherentnej amplitudy:



Rysunek 4.1: Schemat układu do analizy splątania przy generacji drugiej harmonicznej.

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_1(t) = -\gamma_1 \hat{a}_1(t) + \kappa \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_2(t) + \hat{A}_{1,in} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_2(t) = -\gamma_2 \hat{a}_2(t) - \frac{\kappa}{2} (\hat{a}_1(t))^2 + \hat{A}_{2,in} \quad (4.2)$$

przy czym zakładamy tutaj, że operatory $\hat{A}_{1,in}$ i $\hat{A}_{2,in}$ są równe tym amplitudom co do wartości średniej, tj. $\langle \hat{A}_{1,in} \rangle = \epsilon_1$, $\langle \hat{A}_{2,in} \rangle = \epsilon_2$.

Zastosujemy teraz formalizm wejścia-wyjścia do wyznaczenia relacji między polem wejściowym, wyjściowym i występującym w rezonatorze. Dodatkowo, zostanie uściślone, co rozumiemy przez $\hat{A}_{1,in}$ oraz $\hat{A}_{2,in}$. Formalizm wejścia-wyjścia opiera się na kwantowych równaniach Langevina, przy czym szum kwantowy:

$$\hat{F}(t) = -i \sum_j g_j \hat{b}_j(t_0) e^{-\omega_j(t-t_0)} \quad (4.3)$$

przybliża się całką po częstościach, zakładając dodatkowo, że g_j nie zależą od częstości i jest urojone (tzn. $g_j \equiv ig$):

$$\hat{F}(t) = -g \int d\omega \hat{b}(\omega) e^{-\omega(t-t_0)} \quad (4.4)$$

Wprowadzając następujący operator:

$$\hat{a}_{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_0)} b_0(\omega) \quad (4.5)$$

możemy napisać:

$$\hat{F}(t) = \sqrt{\gamma} \hat{a}_{in}(t) \quad (4.6)$$

Dla uczynienia uwagi przepiszemy tutaj całe równanie Langevina:

$$\frac{d}{dt} \hat{a}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \mathcal{H}_s] - \frac{\gamma}{2} \hat{a} + \sqrt{\gamma} \hat{a}_{in}(t) \quad (4.7)$$

Okazuje się jednak, że gdy rozwiążemy równanie ruchu w obrazie Heisenberga używając nie warunków początkowych, ale końcowych w równaniu całkowym postaci (1.113), otrzymamy analogiczne równanie, ale w odniesieniu do warunków wyjściowych zamiast wejściowych:

$$\frac{d}{dt} \hat{a}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(t), \mathcal{H}_s] + \frac{\gamma}{2} \hat{a} - \sqrt{\gamma} \hat{a}_{out}(t) \quad (4.8)$$

Po odjęciu drugiego z równań od pierwszego otrzymamy szukaną zależność [9, 19, 31]:

$$\hat{a}_{out}(t) + \hat{a}_{in}(t) = \sqrt{\gamma} \hat{a}(t) \quad (4.9)$$

W przypadku więcej niż dwóch wyjść z rezonatora powyższe związki zachodzą dla każdego z osobna. W szczególności, dla dwóch wyjść można, porównując równania (4.7) i (4.1)-(4.2), uzyskać następujące równości:

$$\hat{A}_{1,in} = \sqrt{2\gamma_{1a}} \hat{a}_{1,in} + \sqrt{2\gamma_{1b}} \hat{b}_{1,in} \quad (4.10)$$

$$\hat{A}_{2,in} = \sqrt{2\gamma_{2a}} \hat{a}_{1,in} + \sqrt{2\gamma_{2b}} \hat{b}_{2,in} \quad (4.11)$$

przy czym założyliśmy tutaj następującą notację:

- γ_{1a}, γ_{1b} to *połówkowe* współczynniki tłumienia dla modu \hat{a}_1 , odpowiednio dla pierwszego (a) i drugiego (b) wyjścia z rezonatora (dlatego w równaniach opisujących pole wejściowe i wyjściowe występują przemnożone przez 2, za to przy tłumieniu nie będą dzielone przez 2),
- γ_{2a}, γ_{2b} to połówkowe współczynniki tłumienia dla drugiego z modów \hat{a}_2 ,
- $\hat{a}_{1,in}, \hat{b}_{1,in}$ to operatory pól wejściowych dla pierwszego z modów, odpowiednio dla pierwszego i drugiego wejścia,
- $\hat{a}_{2,in}, \hat{b}_{2,in}$ to operatory pól wejściowych dla drugiego z modów, odpowiednio dla pierwszego i drugiego wejścia.

Okazuje się również, że sumaryczne współczynniki tłumienia w równaniach (4.1)-(4.2) muszą w takim przypadku wynosić:

$$\gamma_1 = \gamma_{1a} + \gamma_{1b} \quad (4.12)$$

$$\gamma_2 = \gamma_{2a} + \gamma_{2b} \quad (4.13)$$

Równania ruchu zostaną rozwiązane poprzez podzielenie każdego z operatorów na jego wartość średnią i fluktuację, tj.:

$$\hat{a}_i = \langle \hat{a}_i \rangle + \Delta \hat{a}_i = \alpha_i + \Delta \hat{a}_i \quad (4.14)$$

Następnie, zostanie rozwiązana w pierwszej wersji równań z całkowitym zaniedbaniem szumów kwantowych, $\Delta \hat{a}_i(t) \equiv 0$, co będzie odpowiadać równaniom klasycznym. Dalej, wprowadzone zostaną szумы kwantowe do pierwszego rzędu, tzn. jako równanie zlinearyzowane i na ich podstawie wyznaczone zostaną relacje potrzebne do obliczenia stopnia splątania.

4.2 Analiza równań na klasyczne amplitudy koherentne

Zaniedbując szумы kwantowe, równania (4.1)-(4.2) można przekształcić do następujących równań klasycznych:

$$\dot{\alpha}_1 = -\gamma_1 \alpha_1 + \kappa \alpha_1^* \alpha_2 + \epsilon_1 \quad (4.15)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\gamma_2 \alpha_2 - \frac{\kappa}{2} \alpha_1^2 + \epsilon_2 \quad (4.16)$$

przy czym kropka nad zmienną oznacza pochodną czasową. Skoncentrujemy się wyłącznie na stanach ustalonych, tj. punktach stałych dla tego układu równań [13]. W celu badania ich stabilności, należy wyznaczyć macierz Jakobiego w każdym z takich punktów i zbadać jej wartości własne. Ogólna postać macierzy Jakobiego dla układu (4.15)-(4.16) ma następującą postać:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \kappa \alpha_2 & \kappa \alpha_1^* & 0 \\ \kappa \alpha_2^* & -\gamma_1 & 0 & \kappa \alpha_1 \\ -\kappa \alpha_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & -\kappa \alpha_1^* & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Nietrudno wyznaczyć wartości własne tej macierzy:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}(-|\kappa \alpha_2| + \gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-|\kappa \alpha_2| + \gamma_1 - \gamma_2)^2 - 4|\kappa \alpha_1|^2} \quad (4.18)$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -\frac{1}{2}(|\kappa \alpha_2| + \gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(|\kappa \alpha_2| + \gamma_1 - \gamma_2)^2 - 4|\kappa \alpha_1|^2} \quad (4.19)$$

Na podstawie tych macierzy można badać stabilność punktu stałego. W przypadku, gdy choć jedna wartość własna ma część rzeczywistą większą od 0,

Rozdział 4. Splątanie w procesie generacji drugiej harmonicznej 53

układ jest niestabilny. Jeśli jedna z wartości własnych wynosi 0, a pozostałe są ujemne, będziemy obserwować cykl graniczny. W końcu, przy wszystkich ujemnych wartościach własnych mamy do czynienia ze stabilnym punktem stałym.

Aby rozwiązać układ równań (4.15)-(4.16) w stanie ustalonym, przyrównujemy pochodne $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ do zera. Otrzymujemy w ten sposób układ równań algebraicznych. Równanie drugie można natychmiast rozwiązać względem α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\gamma_2} \left(\epsilon_2 - \frac{\kappa}{2} \alpha_1^2 \right) \quad (4.20)$$

Podstawiając to do drugiego z równań, otrzymujemy, po niewielkich przekształceniach, wyrażenie na α_1 :

$$\alpha_1^2 \alpha_1^* + \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\kappa^2} \alpha_1 - \frac{2\epsilon_2}{\kappa} \alpha_1^* - \frac{2\gamma_2\epsilon_1}{\kappa^2} = 0 \quad (4.21)$$

Najprościej równanie to rozwiązać można poprzez podzielenie α_1 na moduł i fazę, tj. $\alpha_1 = r e^{i\phi}$. Po podstawieniu tej postaci do (4.21) otrzymujemy dwa równania (część rzeczywistą i urojoną):

$$r^3 - \left(\frac{2\epsilon_2}{\kappa} \right) r \cos 2\phi + \left(\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\kappa^2} \right) r - \left(\frac{2\gamma_2\epsilon_1}{\kappa^2} \right) \cos \phi = 0 \quad (4.22)$$

$$\sin 2\phi + \left(\frac{\gamma_2\epsilon_1}{\kappa\epsilon_2 r} \right) \sin \phi = 0 \quad (4.23)$$

Rozważmy wpiery rozwiązania równania z wartością $\phi = n\pi$, tzn. dla których $\sin \phi = 0$ (nazwiemy je rozwiązaniami „w fazie”). Wtedy drugie z równań jest tożsamościowo zerem, natomiast pierwsze sprowadza się do postaci [13]:

$$r^3 + (B - A)r = C \quad (4.24)$$

gdzie:

$$A = \frac{2\epsilon_2}{\kappa} \quad (4.25)$$

$$B = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\kappa^2} \quad (4.26)$$

$$C = \frac{2\gamma_2\epsilon_1}{\kappa^2} \quad (4.27)$$

Ilość pierwiastków rzeczywistych tego równania jest zależna od znaku wyznacznika:

$$\delta = \left(\frac{C}{2} \right)^2 + \left(\frac{B - A}{3} \right)^3 \quad (4.28)$$

Dla $\delta \geq 0$ istnieje jeden pierwiastek rzeczywisty i z analizy wartości własnych wynika, że jest to rozwiązanie stabilne (wszystkie wartości własne ujemne). W przypadku $\delta < 0$ mamy do czynienia z trzema pierwiastkami, z których zawsze jeden opisuje rozwiązanie niestabilne, a dwa pozostałe — stabilne (układ jest w stanie bistabilnym i to, do jakiego zbiegnie rozwiązanie, zależy od warunków początkowych, tzn. od basenu atraktora w jakim układ zaczyna

ruch w przestrzeni fazowej). Rozmaitość, na której $\delta = 0$ (punkty bifurkacji) opisane są równaniem [13]:

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^c + \frac{3}{2}\kappa^2 \left(\frac{\gamma_2 \epsilon_1}{\kappa^2} \right)^{2/3} \quad (4.29)$$

gdzie $\epsilon_2^c = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\kappa}$. Równanie to można wyznaczyć w prosty sposób, przyrównując δ do zera. Same rozwiązania można wyznaczyć najprościej stosując metodę Cardana rozwiązywania równań trzeciego stopnia. W ogólności będą to trzy równania:

$$\alpha_1^{(1)} = Z_1 + Z_2 \quad (4.30)$$

$$\alpha_2^{(2)} = -\frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(Z_1 - Z_2) \quad (4.31)$$

$$\alpha_2^{(3)} = -\frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(Z_1 - Z_2) \quad (4.32)$$

przy czym

$$Z_1 = \left(\frac{C}{2} + \sqrt{\delta} \right)^{1/3} \quad (4.33)$$

$$Z_2 = \left(\frac{C}{2} - \sqrt{\delta} \right)^{1/3} \quad (4.34)$$

Zauważmy, że dla $\delta \geq 0$ tylko jedno z rozwiązań ($\alpha_1^{(1)}$) jest rzeczywiste. Rozwiązanie to staje się niestabilne przy $\delta < 0$, natomiast dwa pozostałe pierwiastki (już teraz rzeczywiste) są stabilne.

Mogą jednak istnieć również rozwiązania „nie w fazie”, tzn. takie dla których $\sin\phi \neq 0$. W równaniu (4.23) używamy tożsamości $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi$, podstawiamy do równania (4.22), dzięki czemu pozbywamy się z niego zmiennej ϕ . Ostatecznie otrzymujemy dwa równania:

$$\cos \phi = -\frac{C}{2Ar} \quad (4.35)$$

$$r^3 + (A + B)r = 0 \quad (4.36)$$

Drugie z równań można sprowadzić do równania kwadratowego (dzieląc przez r , wiedząc że $r \neq 0$ z uwagi na pierwsze równanie). Jedynym „fizycznym” rozwiązaniem tego równania jest:

$$r = \sqrt{\frac{2}{\kappa} (|\epsilon_2| - \epsilon_2^c)} \quad (4.37)$$

istniejące dla $\epsilon_2 \leq -\epsilon_2^c$. Badając stabilność układu, podstawiając do wzorów na wartości własne (4.18)-(4.19) rozwiązania r i ϕ , można wyznaczyć warunek, aby wszystkie wartości własne miały część rzeczywistą niedodatnią:

$$\epsilon_1^2 \leq \frac{8\kappa}{\gamma_2} |\epsilon_2|^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_2^c) \quad (4.38)$$

Podsumowując, w zależności od wartości parametrów, mamy do czynienia z trzema typami rozwiązań: stabilnym „w fazie”, bistabilnym „w fazie” oraz stabilnym „nie w fazie”. Wszystkie te rozwiązania pojawią się przy badaniu splątania w następnych sekcjach.

4.3 Macierze korelacji i miary splątania

Mając wyznaczone wartości klasycznych amplitud, można przystąpić do zejścia poziom niżej przy analizie równań (4.1)-(4.2) i uwzględnieniu szumu kwantowego. Dokonujemy tego, podstawiając do tych równań wyrażenia postaci (4.14), a następnie pozostawiając wyłącznie wyrazy do pierwszego rzędu włącznie, tzn. zawierające $\Delta\hat{a}_i, \Delta\hat{a}_i^\dagger$, a odrzucając wyrazy wyższego rzędu, np. zawierające $\Delta\hat{a}_1^\dagger\Delta\hat{a}_2$. Otrzymujemy w ten sposób równania zlinearyzowane [21]:

$$\Delta\hat{a}_1 = -\gamma_1\Delta\hat{a}_1 + \kappa(\alpha_1^*\Delta\hat{a}_2 + \alpha_2\Delta\hat{a}_1^\dagger) + \Delta\hat{A}_{1,in} \quad (4.39)$$

$$\Delta\hat{a}_2 = -\gamma_2\Delta\hat{a}_2 - \kappa\alpha_1\Delta\hat{a}_1 + \Delta\hat{A}_{2,in} \quad (4.40)$$

Ponieważ będziemy się starali uzyskać spektralną macierz korelacji, najwygodniej będzie przejść do dziedziny częstotliwościowej wykonując po obu stronach równań transformatę Fouriera:

$$-i\omega\Delta\hat{a}_1 = -\gamma_1\Delta\hat{a}_1 + \kappa(\alpha_1^*\Delta\hat{a}_2 + \alpha_2\Delta\hat{a}_1^\dagger) + \Delta\hat{A}_{1,in} \quad (4.41)$$

$$-i\omega\Delta\hat{a}_2 = -\gamma_2\Delta\hat{a}_2 - \kappa\alpha_1\Delta\hat{a}_1 + \Delta\hat{A}_{2,in} \quad (4.42)$$

Wprowadźmy dwie zmienne hermitowskie dla każdego modu, używając równań (1.80)-(1.83). Następnie zdefiniujemy wektor kolumnowy:

$$\Delta\hat{\mathbf{X}} = (\Delta\hat{X}_1^1, \Delta\hat{X}_2^1, \Delta\hat{X}_1^2, \Delta\hat{X}_2^2) \quad (4.43)$$

oraz:

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{in} = (\Delta\hat{X}_{1,in}^1, \Delta\hat{X}_{2,in}^1, \Delta\hat{X}_{1,in}^2, \Delta\hat{X}_{2,in}^2) \quad (4.44)$$

w analogiczny sposób (korzystając ponownie z definicji (1.80)-(1.83), ale zamiast modów \hat{a}_1, \hat{a}_2 używając pól wejściowych $\hat{A}_{1,in}, \hat{A}_{2,in}$). Najlepszym sposobem zapisania równań (4.41)-(4.42) za pomocą tych zmiennych jest utworzenie dwóch kombinacji równań — jedną przez dodanie do siebie obu równań, drugą przez odjęcie jednego równania od drugiego. Otrzymujemy w ten sposób układ czterech równań liniowych, które zapisać można w postaci macierzowej:

$$(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{in}) = \mathbf{A}(\Delta\hat{\mathbf{X}}) \quad (4.45)$$

gdzie macierz \mathbf{A} przedstawia się następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - i\omega - \kappa\text{Re}\alpha_2 & -\kappa\text{Im}\alpha_2 & -\kappa\text{Re}\alpha_1 & -\kappa\text{Im}\alpha_1 \\ -\kappa\text{Im}\alpha_2 & \gamma_1 - i\omega + \kappa\text{Re}\alpha_2 & \kappa\text{Im}\alpha_1 & -\kappa\text{Re}\alpha_1 \\ \kappa\text{Re}\alpha_1 & -\kappa\text{Im}\alpha_1 & \gamma_2 - i\omega & 0 \\ \kappa\text{Im}\alpha_1 & \kappa\text{Re}\alpha_1 & 0 & \gamma_2 - i\omega \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

przy czym $\text{Re}\alpha_i$ i $\text{Im}\alpha_i$ to, odpowiednio, część rzeczywista i urojona koherentnych amplitud. Następnie, korzystając z zależności (4.10)-(4.11), możemy wyrazić wektor $\Delta\hat{\mathbf{X}}_{in}$ poprzez wektory $\Delta\hat{\mathbf{X}}_{a,in}$ i $\Delta\hat{\mathbf{X}}_{b,in}$, przy czym:

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{a,in} = (\Delta\hat{X}_{1,a,in}^1, \Delta\hat{X}_{2,a,in}^1, \Delta\hat{X}_{1,a,in}^2, \Delta\hat{X}_{2,a,in}^2) \quad (4.47)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{b,in} = (\Delta\hat{X}_{1,b,in}^1, \Delta\hat{X}_{2,b,in}^1, \Delta\hat{X}_{1,b,in}^2, \Delta\hat{X}_{2,b,in}^2) \quad (4.48)$$

gdzie składowe tych wektorów definiujemy znowu w analogiczny sposób do (1.80)-(1.83), ale zamiast zwykłych operatorów pól \hat{a}_1, \hat{a}_2 używamy operatorów $\hat{a}_{1,in}, \hat{a}_{2,in}$ (w pierwszym przypadku) oraz $\hat{b}_{1,in}, \hat{b}_{2,in}$ (w drugim przypadku), np. $\hat{X}_{1,a,in}^2 = \hat{a}_{2,in} + \hat{a}_{2,in}^\dagger$, itp. Oczywiście, Δ jak zwykle oznacza szum kwantowy (operator po odjęciu wartości średniej). Dzięki tym wektorom jesteśmy w stanie zapisać równości (4.10)-(4.11) w postaci macierzowej:

$$(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{in}) = \mathbf{M}_a(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{a,in}) + \mathbf{M}_b(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{b,in}) \quad (4.49)$$

gdzie macierze $\mathbf{M}_a, \mathbf{M}_b$ zdefiniowane są w sposób następujący:

$$\mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} \sqrt{2\gamma_{1a}} & & & \\ & \sqrt{2\gamma_{1a}} & & \\ & & \sqrt{2\gamma_{2a}} & \\ & & & \sqrt{2\gamma_{2a}} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} \sqrt{2\gamma_{1b}} & & & \\ & \sqrt{2\gamma_{1b}} & & \\ & & \sqrt{2\gamma_{2b}} & \\ & & & \sqrt{2\gamma_{2b}} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

Co więcej, równość (4.9) można również wyrazić w postaci macierzowej, definiując wektor:

$$\Delta\hat{\mathbf{X}}_{out} = (\Delta\hat{X}_{1,out}^1, \Delta\hat{X}_{2,out}^1, \Delta\hat{X}_{1,out}^2, \Delta\hat{X}_{2,out}^2) \quad (4.52)$$

przy czym ponownie definiujemy składowe wektora w sposób analogiczny do (1.80)-(1.83), ale używając operatorów $\hat{a}_{1,out}, \hat{a}_{2,out}$ (są to operatory związane z lewym z wyjść rezonatora, z prawym z wyjść nie wiążemy operatora, ponieważ nie interesujemy się tym wyjściem w naszej analizie). Przepisujemy (4.9) jako:

$$(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{out}) = \mathbf{M}_a(\Delta\hat{\mathbf{X}}) - \mathbf{I}(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{a,in}) \quad (4.53)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową, natomiast \mathbf{M}_a została już wcześniej zdefiniowana. Odwracając równanie (4.45), tzn:

$$(\Delta\hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{A}^{-1}(\Delta\hat{\mathbf{X}}_{in}) \quad (4.54)$$

oraz podstawiając do (4.53) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}) &= \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{in}) - \mathbf{I} (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) \\
 &= \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{M}_a (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) + \mathbf{M}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})] - \mathbf{I} (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) \\
 &= (\mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I}) (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) + \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}) \\
 &= \mathbf{S}_a (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) + \mathbf{S}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

gdzie w drugim kroku użyliśmy (4.49) oraz wprowadziliśmy macierze $\mathbf{S}_a = \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I}$ oraz $\mathbf{S}_b = \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_b$. Pozwoliło nam to wyrażenie operatorów wyjściowych całkowicie poprzez operatory wejściowe. Aby wyznaczyć korelacje między operatorami, musimy wprowadzić jeszcze macierz $(\Delta \hat{\mathbf{X}}_{out})(\Delta \hat{\mathbf{X}}_{out})^\dagger$ (użyliśmy tutaj sprzężenia hermitowskiego zamiast zwykłej transpozycji, ponieważ operatory \hat{X} po transformacji Fouriera nie są już hermitowskie), której każdy element jest równy iloczynowi pewnych dwóch operatorów $\hat{X}_{l,out}^k$ i $\hat{X}_{n,out}^m$. Używając (4.55), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{out})(\Delta \hat{\mathbf{X}}_{out})^\dagger &= [\mathbf{S}_a (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) + \mathbf{S}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})][(\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in})^\dagger \mathbf{S}_a^\dagger + (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})^\dagger \mathbf{S}_b^\dagger] \\
 &= \mathbf{S}_a (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in})^\dagger \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_a (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}) (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})^\dagger \mathbf{S}_b^\dagger \\
 &\quad + \mathbf{S}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}) (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in})^\dagger \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_b (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}) (\Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in})^\dagger \mathbf{S}_b^\dagger
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Aby wyznaczyć wartości funkcji korelacji, zauważmy, że $\langle \Delta \hat{u} \Delta \hat{v} \rangle = \langle \hat{u} \hat{v} \rangle - \langle \hat{u} \rangle \langle \hat{v} \rangle$. Korzystając z własności liniowości dla tej funkcji możemy zapisać:

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}^\dagger \rangle &= \mathbf{S}_a \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}^\dagger \rangle \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_a \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}^\dagger \rangle \mathbf{S}_b^\dagger \\
 &\quad + \mathbf{S}_b \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}^\dagger \rangle \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_b \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}^\dagger \rangle \mathbf{S}_b^\dagger
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Zakładamy, że światło wejściowe jest początkowo w stanie koherentnym. Oznacza to, że wszelkie korelacje znikają (bo średnie z iloczynu operatorów faktoryzują się) za wyjątkiem korelacji postaci $\langle \hat{X}_1, \hat{X}_1 \rangle$ i $\langle \hat{X}_2, \hat{X}_2 \rangle$ (gdzie \hat{X}_i jest dowolnym z operatorów $\hat{X}_{i,a,in}^1, \hat{X}_{i,a,in}^2, \hat{X}_{i,b,in}^1, \hat{X}_{i,b,in}^2$), które to wynoszą w stanie koherentnym 1. Stąd okazuje się, że $\langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}^\dagger \rangle$ i $\langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}^\dagger \rangle$ są macierzami jednostkowymi, natomiast $\langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in}^\dagger \rangle$ i $\langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{b,in} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{a,in}^\dagger \rangle$ — macierzami zerowymi. Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}^\dagger \rangle &= \mathbf{S}_a \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_b \mathbf{S}_b^\dagger \\
 &= (\mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I})(\mathbf{M}_a \mathbf{A}^{\dagger-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I}) + \mathbf{M}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{M}_b^2 \mathbf{A}^{\dagger-1} \mathbf{M}_a
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Żeby wyznaczyć macierz korelacji Σ wystarczy skorzystać z (1.85). W postaci macierzowej będzie to wyglądało w następujący sposób:

$$\Sigma = \frac{1}{2} (\langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}^\dagger \rangle + \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}^\dagger \rangle^T) \tag{4.59}$$

Mając daną macierz korelacji, można wyznaczyć już miary splątania. Analiza splątania zostanie oparta przede wszystkim o stopień nieseparowalności i stopień paradoksu EPR (patrz części 3.4.2 i 3.4.3). W pierwszym przypadku, należy sprowadzić macierz korelacji do postaci standardowej II, w drugim wystarczy postać standardowa I. Poniżej opiszemy metody sprowadzania macierzy korelacji do tych postaci.

Aby uzyskać postać standardową I, wcale nie trzeba szukać odpowiednich operacji LLUBO, ale wystarczy posłużyć się zachowanymi w tym procesie wielkościami. Zapiszmy macierz korelacji w pierwotnym kształcie w postaci blokowej, tzn:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

przy czym Σ_{ij} to cztery podmacierze o rozmiarach 2×2 . Przytoczymy tutaj raz jeszcze wygląd macierzy korelacji w jej postaci standardowej I:

$$\Sigma^I = \begin{pmatrix} n & c & & \\ & n & c' & \\ c & & m & \\ & c' & & m \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Zwróćmy uwagę, że postać standardowa I powstaje poprzez zadziałanie lokalnymi operacjami o wyznaczniku 1 (LLUBO), tzn:

$$\Sigma^I = \begin{pmatrix} V_1 & \\ & V_2 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} V_1^T & \\ & V_2^T \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

Elementy macierzy można mnożyć blokowo, a ponieważ wyznacznik iloczynu trzech macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników, wiedząc, że V_1, V_2 mają wyznaczniki równe 1, łatwo można się przekonać, że wszystkie macierze Σ_{ij} oraz cała macierz Σ zachowują swój wyznacznik. Jest to wiedza wystarczająca do wyznaczenia współczynników n, m, c, c' . Mianowicie:

$$n^2 = |\Sigma_{11}| \quad (4.63)$$

$$cc' = |\Sigma_{12}| \quad (4.64)$$

$$m^2 = |\Sigma_{22}| \quad (4.65)$$

$$|\Sigma^I| = (nm - c^2)(nm - c'^2) = |\Sigma| \quad (4.66)$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza wyznacznik. Wartości n i m otrzymujemy natychmiast z pierwszego i trzeciego z tych równań (macierz korelacji jest dodatnio określona, stąd wyznaczniki nie mogą być ujemne). Używając drugiego i czwartego równania jesteśmy w stanie wyznaczyć c i c' , rozwiązując równanie kwadratowe. Twierdzenie z [15] zapewnia nam istnienie odpowiedniego rozwiązania takiego równania.

Problem pojawia się w przypadku postaci standardowej II. Nie wchodząc w szczegóły, omówione już w części 3.4.2, problem polega na znalezieniu takich parametrów r_1, r_2 , aby były spełnione równania:

$$\frac{\frac{n}{r_1} - 1}{nr_1 - 1} = \frac{\frac{m}{r_2} - 1}{mr_2 - 1} \quad (4.67)$$

$$\sqrt{r_1 r_2} |c| - \frac{|c'|}{\sqrt{r_1 r_2}} = \sqrt{(nr_1 - 1)(mr_2 - 1)} - \sqrt{\left(\frac{n}{r_1} - 1\right)\left(\frac{m}{r_2} - 1\right)} \quad (4.68)$$

Twierdzenie z [15] mówi tylko o istnieniu rozwiązania. Parametry można jednak znaleźć, sprowadzając oba równania do wielomianu wysokiego stopnia i rozwiązując numerycznie problem znajdowania pierwiastków takiego wielomianu. Ponieważ rozwiązanie istnieje, będzie przynajmniej jeden pierwiastek (a właściwie para liczb rzeczywistych dodatnich: r_1, r_2) spełniający równania. Ostatecznej formy wielomianu nie podajemy, ponieważ jest bardzo skomplikowana. Szkicując jego wyprowadzenie — pierwsze z równań rozwiązuje się ze względu na jeden z parametrów (rozwiązując równanie kwadratowe), następnie rozwiązanie to wprowadza się do równania drugiego. Dwukrotne przekształcanie równania i podnoszenie go do kwadratu pozwala pozbyć się pierwiastków i daje ostatecznie wielomian 12 stopnia. Nie jest znany autorowi inny sposób rozwiązania.

Mając macierz w odpowiedniej postaci standardowej, wzór na stopień nieseparowalności (3.44) sprowadza się do:

$$\mathcal{I} = \frac{\sqrt{C_I^1 C_I^2}}{k + \frac{1}{k}} \quad (4.69)$$

gdzie:

$$C_I^i = k C_{ii}^{11} + \frac{1}{k} C_{ii}^{22} - 2|C_{ii}^{12}| \quad (4.70)$$

$$k = \left(\frac{C_{11}^{22} - 1}{C_{11}^{11} - 1} \right)^{1/2} \quad (4.71)$$

przy czym współczynniki C_{mn}^{kl} są elementami macierzy Σ^{II} (patrz również równanie (1.84)).

W przypadku stopnia paradoksu EPR, można wyrazić go jako:

$$\epsilon = \left(C_{11}^{11} - \frac{|C_{11}^{12}|^2}{C_{11}^{22}} \right) \left(C_{22}^{11} - \frac{|C_{22}^{12}|^2}{C_{22}^{22}} \right) \quad (4.72)$$

przy czym wystarczy, że współczynniki macierzy pochodzą z Σ^I (w postaci standardowej II ϵ ma taką samą wartość)

4.4 Analiza wyników

W ramach analizy wyników, zrekonstruowane zostały rezultaty z pracy [21]. Ustalono, że analiza będzie się odbywać dla parametrów $\gamma_{1a} = 1$, $\gamma_{1b} = 0.01$, $\gamma_{2a} = 10$, $\gamma_{2b} = 0.1$, $\kappa = 1$ oraz $\omega = 0$. Należy zwrócić uwagę, że w tym przypadku zerowa wartość częstości oznacza częstość taką samą, jak naturalna częstość w rezonatorze, ponieważ operatory są już w obrazie oddziaływania, czyli układzie rotującym z naturalną częstością znajdującą się w hamiltonianie.

Parametry zostały dobrane w ten sposób przede wszystkim po to, aby móc porównać się z pracą [21].

Wyniki zostają przedstawione dla różnych wartości zewnętrznych pól, przy czym przedstawione zostały one po unormowaniu względem wartości krytycznych, tzn. jeśli ϵ_1 , ϵ_2 są polami zewnętrznymi w równaniach ruchu, my będziemy się posługiwać wielkościami α_1^d i α_2^d , które wyznacza się następująco:

$$\alpha_1^d = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1^c} \quad (4.73)$$

$$\alpha_2^d = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2^c} \quad (4.74)$$

gdzie:

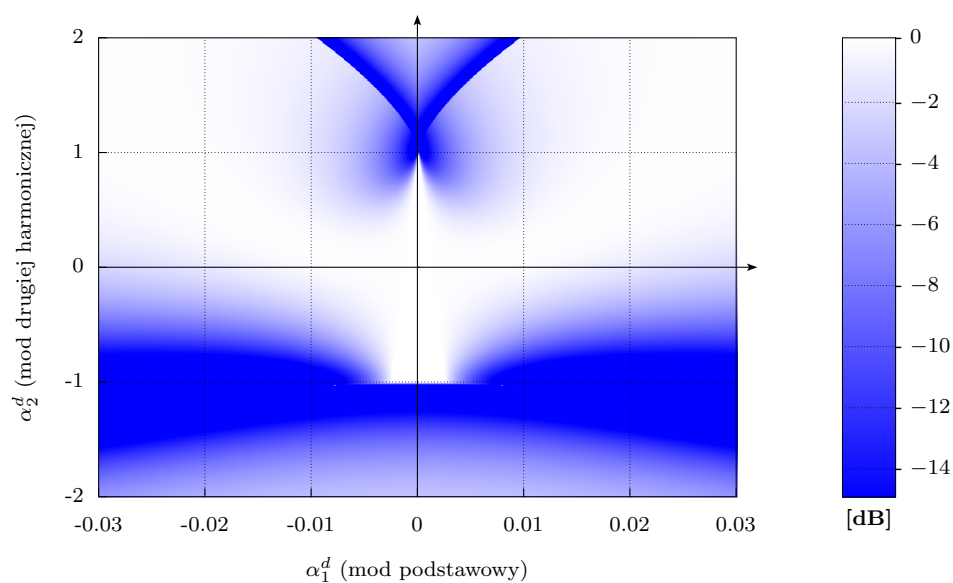
$$\alpha_1^c = \frac{(2\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{2\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)}}{\kappa\sqrt{2\gamma_{1a}}} \quad (4.75)$$

$$\alpha_2^c = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\kappa\sqrt{2\gamma_{2b}}} \quad (4.76)$$

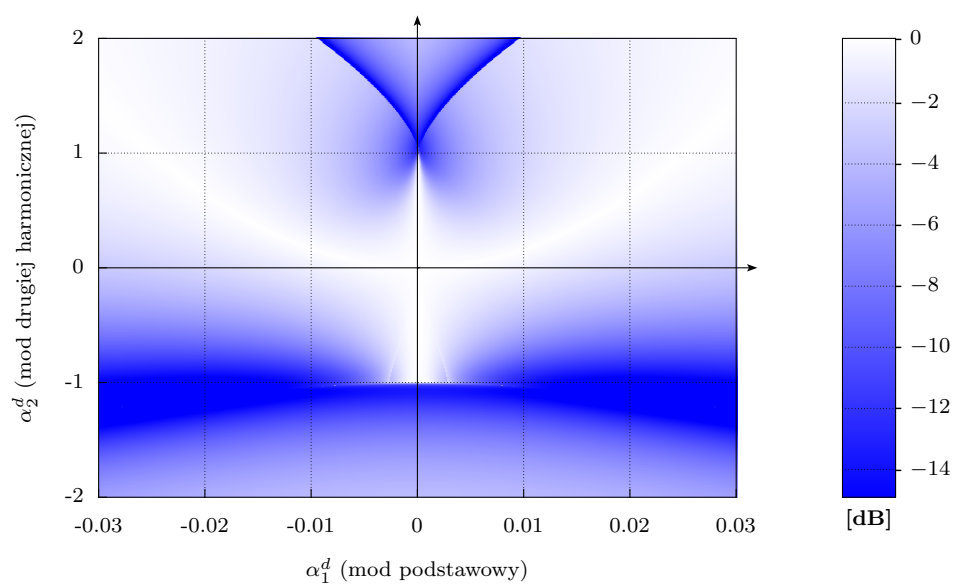
są wartościami krytycznymi pól, występującymi również przy okazji analizowania stabilności w równaniach klasycznych.

Wyniki przedstawione są dla $\alpha_1^d \in [-0.03, 0.03]$ oraz $\alpha_2^d \in [-2, 2]$. Na rysunku 4.2 znajdują się wartości stopnia EPR, przy czym im ciemniejszy punkt, tym silniejsze splątanie (punkty opisujące stany separowalne mają kolor całkowicie biały), przy czym miara zaciemnienia jest logarytmiczna. Z kolei, na rysunku 4.3 widnieje ten sam wycinek przestrzeni parametrów, ale analizowaną miarą jest tutaj stopień nieseparowalności. Już z porównania tych dwóch rysunków widać, że obie miary nie zawsze zgadzają się co do wartości. Co więcej, stopień nieseparowalności wskazuje dla małych wartości splątania wyższą wartość od stopnia EPR, podczas gdy dla dużych wartości wydaje się być odwrotnie. Widać to dokładnie na rysunku 4.4, gdzie zostały umieszczone punkty zebrane z poprzednich dwóch rysunków, ale osie nie opisują już parametrów, tylko wartości obu miar splątania. Przykładowo, jeśli dla danych wartości α_1^d i α_2^d otrzymaliśmy np. $\mathcal{I} = 0.2$ oraz $\epsilon = 0.3$, to na wykresie pojawi się punkt $(0.3, 0.2)$. Z rysunku widać, obie miary są ze sobą silnie skorelowane, tym niemniej dla małych wartości stopnia EPR wykres nachylony jest bardziej w kierunku stopnia nieseparowalności (jest nad linią $\mathcal{I} = \epsilon$ nachyloną pod kątem $\frac{\pi}{2}$ do osi), podczas gdy w dalszej części następuje sytuacja odwrotna. Zaskakujące jest, że istnieją stany separowalne (co widać po wartości $\mathcal{I} < 1$) z dużymi wskazaniem ϵ (na rysunku widoczne jako poziome „warkocze” punktów). Istotnym wnioskiem z powyższych rozważań jest również spostrzeżenie, że w procesie generacji drugiej harmonicznej, przy odpowiednim doborze parametrów, może zostać utworzone praktycznie dowolnie silne splątanie. Szczególne silne jest ono na granicy rejonów, tzn. u góry rysunków 4.2 i 4.3 (granica między rejonem stabilnym i bistabilnym) oraz na dole (granica między rejonem „w fazie”, a „nie w fazie”).

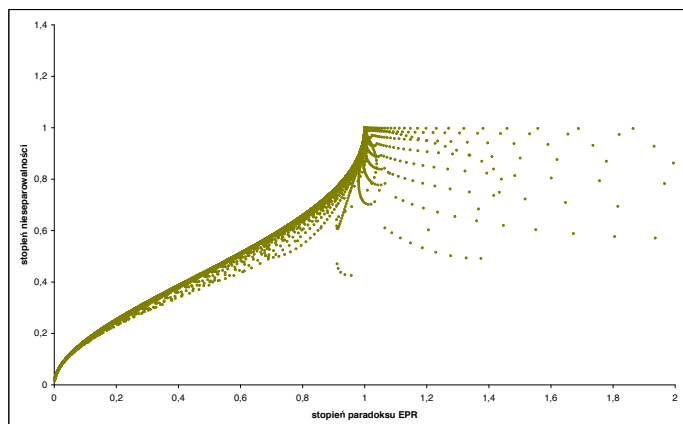
Dokładne różnice między oboma miarami można zbadać na rysunku 4.5. Przedstawia on ten sam obszar, ale tym razem zostały na nim zaznaczone stoki wskaźników obu miar. Kolor czerwony oznacza, że stopień nieseparowalności



Rysunek 4.2: Wartości stopnia EPR w zależności od wartości pól pompujących α_1^d i α_2^d . Skala zaciemnienia jest logarytmiczna (w decybelach). Im bardziej niebieski punkt, tym większe splątanie.



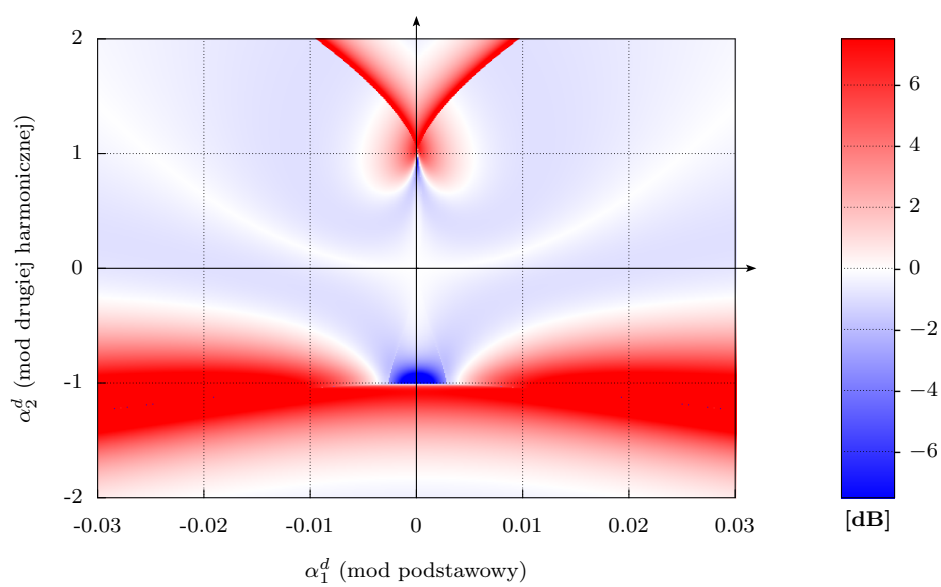
Rysunek 4.3: Wartości stopnia nieseparowalności w zależności od siły pól pompujących α_1^d i α_2^d .



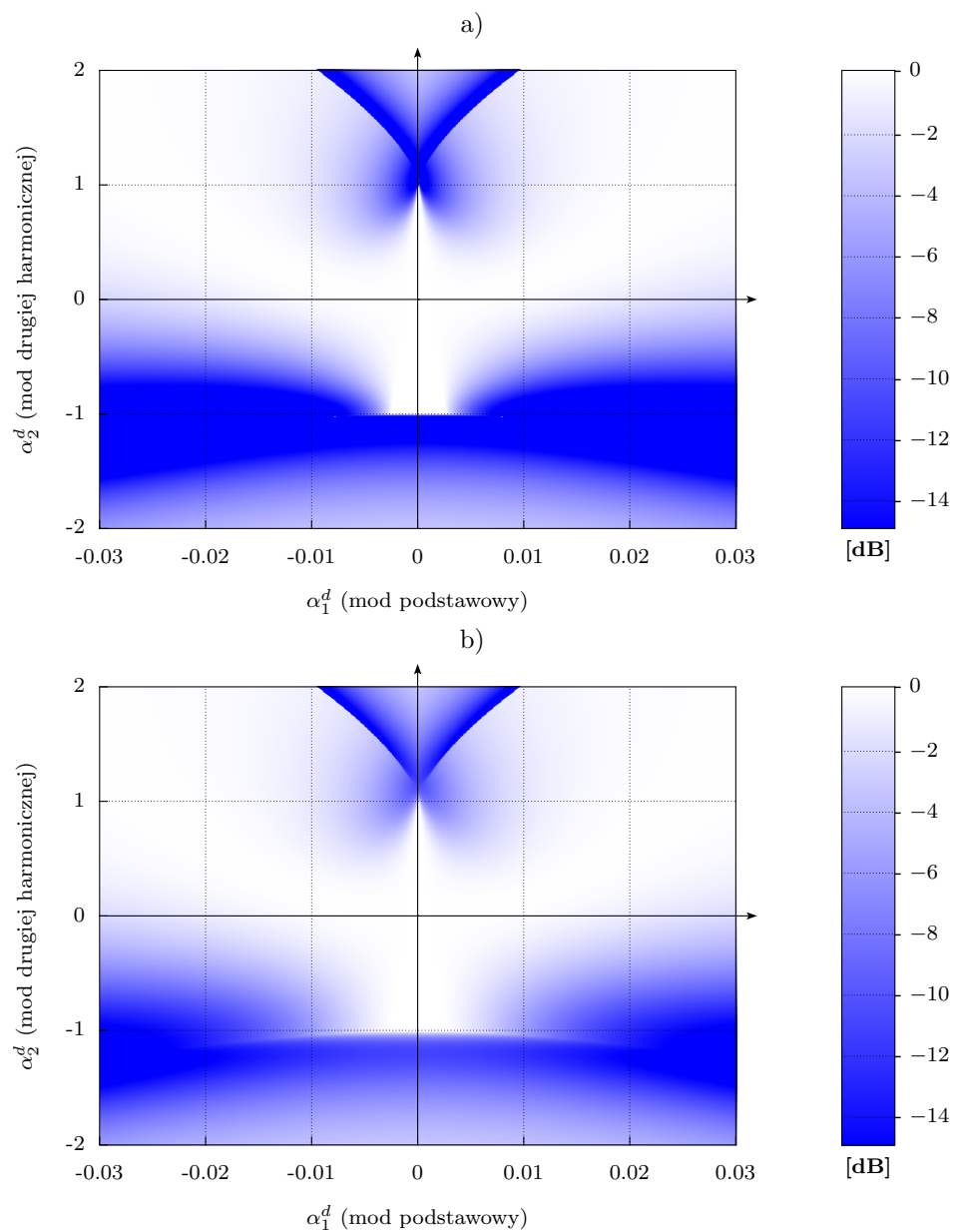
Rysunek 4.4: Wartości stopnia EPR i stopnia nieseparowalności. Każdy punkt na wykresie oznacza, że dla pewnych wartości α_1^d i α_2^d otrzymaliśmy równocześnie daną wartość stopnia EPR i stopnia nieseparowalności.

wskazuje silniejsze splątanie niż stopień EPR, kolor niebieski oznacza sytuację odwrotną.

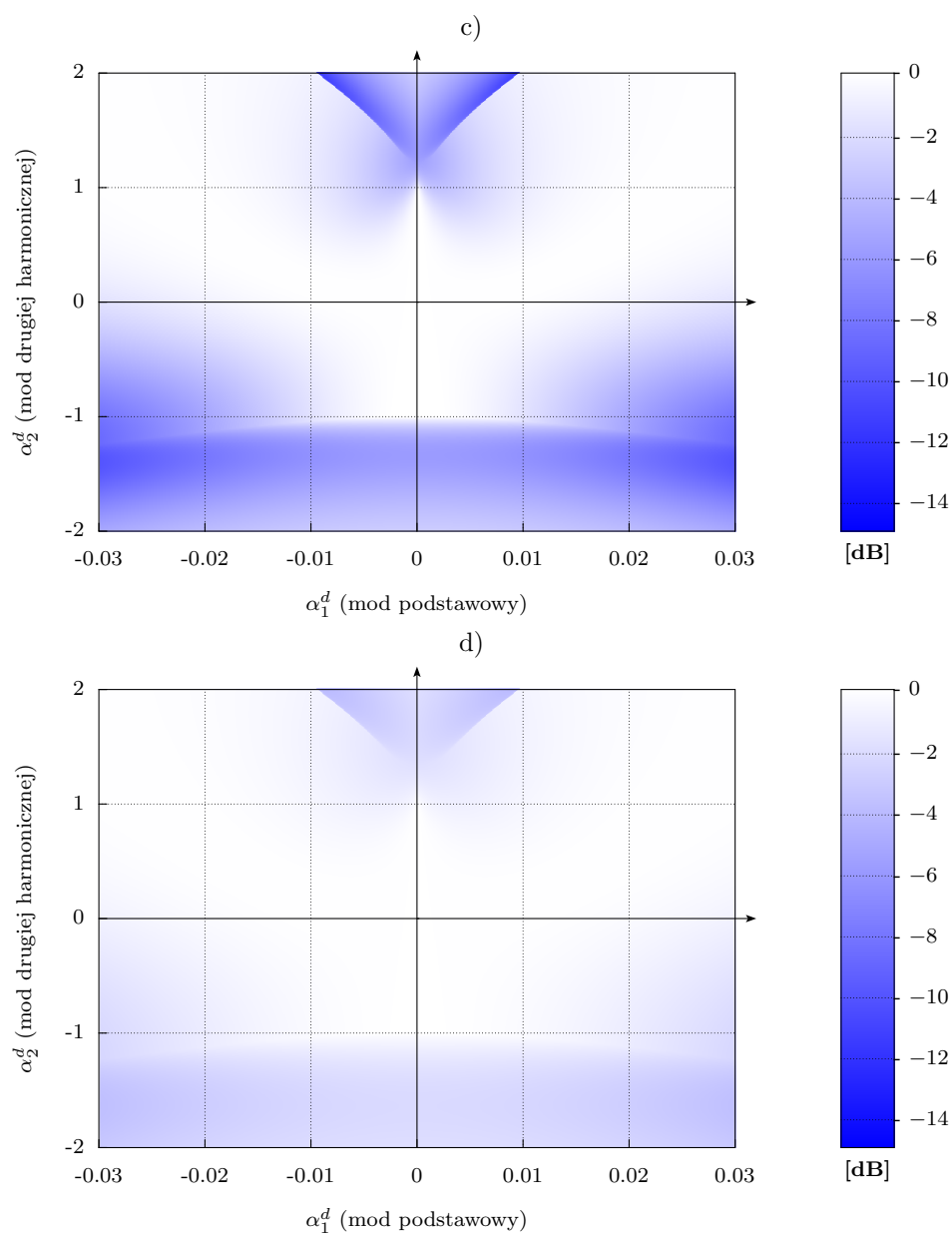
Prócz wykresu opisującego zależność między obiema miarami splątania, zostały jeszcze dodane rysunki, opisujące co się dzieje ze splątaniem w miarę odstrajania częstości od częstości rezonatora, czyli dla niezerowych wartości ω . Rysunki 4.6 i 4.7 przedstawiają taką sytuację dla czterech różnych wartości ω , przy czym badany jest tylko stopień EPR. Jak widać, przy zwiększaniu ω , splątanie zmniejsza się. Jest to zupełnie spodziewany wniosek, ponieważ zwykle odstrojeniu częstości towarzyszy osłabienie wszelkich efektów i procesów fizycznych.



Rysunek 4.5: Wartości stosunku obu miar (\mathcal{I} w stosunku do ϵ), podane w skali logarytmicznej. Kolor czerwony oznacza, że \mathcal{I} wskazuje na silniejsze splątanie, niebieski — ϵ wskazuje na silniejsze splątanie.



Rysunek 4.6: Wartości stopnia EPR przy różnych częstościach: a) $\omega = 0$; b) $\omega = 0.5$.



Rysunek 4.7: Wartości stopnia EPR przy różnych częstotliwościach (c.d. poprzedniego rysunku): c) $\omega = 1$; d) $\omega = 2$.

Rozdział 5

Splątanie przy obecności nieliniowości Kerra

W poprzednim rozdziale zbadano, w jaki sposób można tworzyć stany splątane przy użyciu hamiltonianu z nieliniowością odpowiadającą generacji drugiej harmonicznej. Naturalnym jest pytanie, jak kwestia splątania przedstawia się w przypadku innych procesów nieliniowych? Mieszanie więcej niż dwóch fal prowadziło do analizy większej ilości modów światła. Niestety, miary splątania i teoria splątania w ogólności nie są jeszcze wystarczająco dobrze poznane, aby w tej pracy pokusić się o taką analizę. Interesujący jest tutaj natomiast przypadek uwzględnienia innych nieliniowości dotyczących mniejszej ilości modów. W szczególności, dobrze znany efekt Kerra byłby ciekawym aspektem w przypadku analizy siły splątania. Niestety sam efekt Kerra nie wystarczy, ponieważ dotyczy on tylko jednego modu i nie opisuje żadnego oddziaływania (sprzężenia) między różnymi modami światła. Rozpatrywano natomiast liniowe sprzężenie między dwoma układami kerrowskimi (przykładowo w [26]). W tej pracy skupimy się jednak na efekcie Kerra występującym równocześnie z nieliniowością drugiego rzędu w postaci generacji drugiej harmonicznej. Pozwoli to odnieść się do rezultatów z poprzedniego rozdziału i odpowiedzieć na pytanie, czy w tym wypadku nieliniowość kerrowska zmniejsza, czy może wzmacnia splątanie? Warto zauważyć, że efekt Kerra jest nieliniowością wyższego rzędu (trzeciego), co niestety będzie prowadziło do trudniejszej analizy i posilkowania się w pewnym miejscu metodami numerycznymi.

5.1 Równania ruchu

Rozpatrywanym układem będzie, jak w poprzednim przypadku, nieliniowy ośrodek zamknięty w rezonatorze. Postać rezonatora pozostanie taka sama, natomiast sam ośrodek będzie także wykazywał nieliniowości trzeciego rzędu, w szczególności - efekt Kerra.

Aby wyprowadzić równania ruchu w tym przypadku, posłużymy się ponownie hamiltonianem (2.38) (włączając, jak poprzednio, koherentne światło wejściowe do rezerwuaru). Dodamy do hamiltonianu układu dodatkowy człon odpowiedzialny za efekt Kerra:

$$\mathcal{H}_{kerr} = \frac{\hbar\chi}{2} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^2 \quad (5.1)$$

Zwróćmy uwagę, że oznacza to rozpatrywanie członu kerrowskiego tylko w podstawowym modzie światła — zakładamy tutaj, że nieliniowości trzeciego rzędu w modzie o podwojonej częstości są zaniedbywalnie małe. Nie będziemy tutaj ponownie wyprowadzać równań ruchu, które są w dużej mierze podobne do tych związanych z generacją drugiej harmonicznej. Jedyny dodatkowy człon, jaki się w tym przypadku pojawia to, tylko dla podstawowego modu \hat{a}_1 , wyraz $-i\chi\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^2$ (analogicznie do równania Langevina (2.66) dla efektu Kerra). Możemy więc zapisać równania ruchu jako:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1(t) = -\gamma_1\hat{a}_1(t) + \kappa\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t) - i\chi\hat{a}_1^\dagger(t)(\hat{a}_1(t))^2 + \hat{A}_{1,in} \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_2(t) = -\gamma_2\hat{a}_2(t) - \frac{\kappa}{2}(\hat{a}_1(t))^2 + \hat{A}_{2,in} \quad (5.3)$$

Przede wszystkim, trudnością będzie tutaj fakt istnienia wyrazu zawierającego iloczyn trzech operatorów — sytuacja taka nie miała miejsca przy ograniczeniu się tylko do nieliniowości drugiego rzędu.

Formalizm wejścia-wyjścia pozostaje taki sam, jak w poprzednim przypadku, ponieważ nie ma na niego wpływu konkretna postać hamiltonianu zjawiska. Tym samym relacje (4.9) oraz (4.10)-(4.11) nadal obowiązują. Zachowamy również wszystkie oznaczenia na mody pola, parametry, pola wejściowe i wyjściowe tak, aby były w pełni zgodne z poprzednim rozdziałem. Analizując równania ruchu, postąpimy podobnie, dzieląc każdy operator na jego wartość średnią i fluktuację, tzn:

$$\hat{a}_i = \langle \hat{a}_i \rangle + \Delta \hat{a}_i = \alpha_i + \Delta \hat{a}_i \quad (5.4)$$

a następnie wykonując analizę osobno dla równań zaniedbujących szum kwantowy oraz równań zlinearyzowanych, zawierających szum w pierwszej potędze.

5.2 Analiza równań klasycznych

Zaniedbując szumy kwantowe, równania (5.2)-(5.3) można przekształcić do następujących równań klasycznych:

$$\dot{\alpha}_1 = -\gamma_1\alpha_1 + \kappa\alpha_1^*\alpha_2 - i\chi\alpha_1^*\alpha_1^2 + \epsilon_1 \quad (5.5)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -\gamma_2\alpha_2 - \frac{\kappa}{2}\alpha_1^2 + \epsilon_2 \quad (5.6)$$

W stosunku do poprzedniego rozdziału, pojawił się tutaj dodatkowy człon trzeciego rzędu, zawierający jednak wyłącznie zmienne dotyczące pierwszego z modów. Ponownie, skoncentrujemy się tylko na stanach ustalonych. Ogólna postać macierzy Jakobiego dla układu (5.5)-(5.6) ma następującą postać:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 - 2i\chi\alpha_1^*\alpha_1 & \kappa\alpha_2 - i\chi\alpha_1^2 & \kappa\alpha_1^* & 0 \\ \kappa\alpha_2^* + i\chi\alpha_1^{*2} & -\gamma_1 + 2i\chi\alpha_1^*\alpha_1 & 0 & \kappa\alpha_1 \\ -\kappa\alpha_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & -\kappa\alpha_1^* & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Zauważmy, że w przypadku $\chi = 0$ macierz (5.7) sprowadza się do (4.17). Co więcej, obie macierze różnią się od siebie tym, że w aktualnie rozpatrywanym przypadku możemy zdefiniować sobie nowy współczynnik tłumienia (zespolony):

$$\gamma_1' = \gamma_1 - 2i\chi\alpha_1^*\alpha_1 \quad (5.8)$$

oraz inną wartość α_2 :

$$\alpha_2' = \alpha_2 - i\frac{\chi}{\kappa}\alpha_1^2 \quad (5.9)$$

Wtedy obie macierze przyjmą tą samą postać. Obserwacja ta nie będzie wykorzystywana w trakcie analizy, pozwala jednak uprościć znajdowanie wartości własne macierzy (5.7). Są one następujące

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}(-\zeta + \gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-\zeta + \gamma_1 - \gamma_2)^2 - 4|\kappa\alpha_1|^2} \quad (5.10)$$

$$\lambda_3, \lambda_4 = -\frac{1}{2}(\zeta + \gamma_1 + \gamma_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\zeta + \gamma_1 - \gamma_2)^2 - 4|\kappa\alpha_1|^2} \quad (5.11)$$

gdzie:

$$\zeta = \sqrt{|\kappa\alpha_2 - i\chi\alpha_1^2|^2 - 4\chi^2|\alpha_1|^4} \quad (5.12)$$

Zauważmy, że ζ może być liczbą urojoną.

Przyrównując pochodne $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ do zera w (5.5)-(5.6), otrzymujemy układ równań algebraicznych. Równanie drugie można natychmiast rozwiązać względem α_2 :

$$\alpha_2 = \frac{1}{\gamma_2} \left(\epsilon_2 - \frac{\kappa}{2}\alpha_1^2 \right) \quad (5.13)$$

tak samo, jak w przypadku generacji drugiej harmonicznej bez efektu Kerra. Podstawiając to do drugiego z równań, otrzymujemy, po niewielkich przekształceniach, wyrażenie na α_1 :

$$\alpha_1^2\alpha_1^* + i\frac{2\chi\gamma_2}{\kappa^2}\alpha_1^2\alpha_1^* + \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\kappa^2}\alpha_1 - \frac{2\epsilon_2}{\kappa}\alpha_1^* - \frac{2\gamma_2\epsilon_1}{\kappa^2} = 0 \quad (5.14)$$

Niestety, w tym przypadku zapisanie α_1 za pomocą modułu i fazy lub części rzeczywistej i urojonej nie pozwala na rozwiązanie tego równania w analityczny sposób. Postaramy się więc równanie to rozwiązać numerycznie. Tak naprawdę mamy do czynienia jednak z dwoma równaniami, przy czym drugie z nich powstaje poprzez sprzężenie (5.14). Celem znalezienia pierwiastków wielomianu, należy oba równania sprowadzić do jednego. Aby uprościć notację, wprowadzimy sobie następujące współczynniki:

$$A = \frac{2\epsilon_2}{\kappa} \quad (5.15)$$

$$B = \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\kappa^2} \quad (5.16)$$

$$C = \frac{2\gamma_2\epsilon_1}{\kappa^2} \quad (5.17)$$

$$K = 1 + i\frac{2\chi\gamma_2}{\kappa^2} \quad (5.18)$$

Wtedy równanie (5.14) da się zapisać jako:

$$K\alpha_1^2\alpha_1^* + B\alpha_1 - A\alpha_1^* - C = 0 \quad (5.19)$$

oraz równanie sprzężone:

$$K^*\alpha_1^{*2}\alpha_1 + B\alpha_1^* - A\alpha_1 - C = 0 \quad (5.20)$$

Należy z równania (5.19) wyznaczyć α_1^* :

$$\alpha_1^* = \frac{B\alpha_1 - C}{A - K\alpha_1^2} \quad (5.21)$$

i podstawić to do drugiego z równań (mianownik można zlikwidować przemnażając drugie z równań przez $(A - K\alpha_1^2)^2$, spowoduje to jednak wzrost stopnia wielomianu zawartego w równaniu). Po przekształceniach i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy wielomian piątego stopnia na α_1 :

$$\sum_{i=0}^5 c_i \alpha_1^i = 0 \quad (5.22)$$

gdzie:

$$c_0 = ABC + CA^2 \quad (5.23)$$

$$c_1 = -K^*C^2 - B^2A + A^3 \quad (5.24)$$

$$c_2 = -BCK + 2BCK^* - 2KAC \quad (5.25)$$

$$c_3 = B^2K - 2KA^2 - K^*B^2 \quad (5.26)$$

$$c_4 = K^2C \quad (5.27)$$

$$c_5 = K^2A \quad (5.28)$$

Następnie szukamy miejsc zerowych tego wielomianu, za każdym razem sprawdzając, czy spełniają one pierwotne równanie (5.19). Jeśli tak, wyznaczamy α_2 z równania (5.13). To jeszcze nie koniec, gdyż rozwiązania mogą być niestabilne. Sprawdzanie stabilności odbywa się w tym przypadku poprzez wyznaczenie wartości własnych dla każdego otrzymanych α_1, α_2 i pozostawieniu tylko tych rozwiązań, dla których wszystkie wartości własne są niedodatnie.

Okazuje się, że tak jak w przypadku bez efektu Kerra, otrzymujemy rejonny stabilne (jedno rozwiązanie) i bistabilne (trzy rozwiązania, z czego jedno niestabilne). Niestety, ponieważ nie udało się uzyskać analitycznych wzorów

na rozwiązania, nie jesteśmy również w stanie podać granicy rejonu bistabilnego. Zwróćmy również uwagę, że wszystkie rozwiązania z członem kerrowskim są „nie w fazie”. Najłatwiej się o tym przekonać przyglądając się równaniom (5.5)-(5.6), oczywiście z zerowymi wartościami pochodnych. Jeśli α_1 miałyby być rzeczywiste, wtedy zgodnie z drugim z równań, również α_2 musiałyby być rzeczywiste. To oznaczałoby jednak, że wszystkie wyrazy w pierwszym z równań są rzeczywiste za wyjątkiem członu zawierającego jednostkę urojona i . Ponieważ część urojona musi się również zerować, oznaczałoby to, że jedynym rozwiązaniem „w fazie” jest trywialne rozwiązanie $\alpha \equiv 0$.

5.3 Macierze korelacji

W celu dalszej analizy, musimy jak poprzednio uwzględnić szum kwantowy. Dokonujemy tego, podstawiając do równań ruchu wyrażenia postaci (5.4), a następnie pozostawiając wyłącznie wyrazy do pierwszego rzędu włącznie. Otrzymujemy następujące równania zlinearyzowane [21]:

$$\Delta \dot{\hat{a}}_1 = -\gamma_1 \Delta \hat{a}_1 - 2i\chi|\alpha_1|^2 \Delta \hat{a}_1 + \kappa(\alpha_1^* \Delta \hat{a}_2 + \alpha_2 \Delta \hat{a}_1^\dagger) - i\chi\alpha_1^2 \Delta \hat{a}_1^\dagger + \Delta \hat{A}_{1,in} \quad (5.29)$$

$$\Delta \dot{\hat{a}}_2 = -\gamma_2 \Delta \hat{a}_2 - \kappa\alpha_1 \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{A}_{2,in} \quad (5.30)$$

Wykonując transformatę Fouriera, otrzymujemy:

$$-i\omega \Delta \hat{a}_1 = -\gamma_1 \Delta \hat{a}_1 - 2i\chi|\alpha_1|^2 \Delta \hat{a}_1 + \kappa(\alpha_1^* \Delta \hat{a}_2 + \alpha_2 \Delta \hat{a}_1^\dagger) - i\chi\alpha_1^2 \Delta \hat{a}_1^\dagger + \Delta \hat{A}_{1,in} \quad (5.31)$$

$$-i\omega \Delta \hat{a}_2 = -\gamma_2 \Delta \hat{a}_2 - \kappa\alpha_1 \Delta \hat{a}_1 + \Delta \hat{A}_{2,in} \quad (5.32)$$

Dalszy ciąg obliczeń przebiega analogicznie, jak w poprzednim rozdziale. Znajdujemy dwie zmienne hermitowskie dla każdego modu (np. raz dodając i raz odejmując od siebie równania (5.31)-(5.32)), definiujemy wektory tych zmiennych w taki sam sposób jak w (4.43), (4.44) i (4.47)-(4.48). W ten sposób zapisujemy układ czterech równań na $\Delta \hat{\mathbf{X}}$ macierzowo:

$$(\Delta \hat{\mathbf{X}}_{in}) = \mathbf{A}_{kerr}(\Delta \hat{\mathbf{X}}) \quad (5.33)$$

gdzie macierz \mathbf{A}_{kerr} tym razem przedstawia się następująco:

$$\mathbf{A}_{kerr} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - i\omega - \kappa\text{Re}\alpha_2 - \chi\text{Im}\alpha_1^2 & -\kappa\text{Im}\alpha_2 + \chi\text{Re}\alpha_1^2 - 2\chi|\alpha_1|^2 & -\kappa\text{Re}\alpha_1 & -\kappa\text{Im}\alpha_1 \\ -\kappa\text{Im}\alpha_2 + \chi\text{Re}\alpha_1^2 + 2\chi|\alpha_1|^2 & \gamma_1 - i\omega + \kappa\text{Re}\alpha_2 + \chi\text{Im}\alpha_1^2 & \kappa\text{Im}\alpha_1 & -\kappa\text{Re}\alpha_1 \\ \kappa\text{Re}\alpha_1 & -\kappa\text{Im}\alpha_1 & \gamma_2 - i\omega & 0 \\ \kappa\text{Im}\alpha_1 & \kappa\text{Re}\alpha_1 & 0 & \gamma_2 - i\omega \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Dalsza analiza jest już zupełnie analogiczna, jak w poprzednim rozdziale, z tym że zamiast macierzy \mathbf{A} stosujemy macierz \mathbf{A}_{kerr} . Ostatecznie otrzymujemy więc równania:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out} \Delta \hat{\mathbf{X}}_{out}^\dagger \rangle &= \mathbf{S}_a \mathbf{S}_a^\dagger + \mathbf{S}_b \mathbf{S}_b^\dagger \\ &= (\mathbf{M}_a \mathbf{A}_{kerr}^{-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I})(\mathbf{M}_a \mathbf{A}_{kerr}^{\dagger-1} \mathbf{M}_a - \mathbf{I}) + \mathbf{M}_a \mathbf{A}_{kerr}^{-1} \mathbf{M}_b^2 \mathbf{A}_{kerr}^{\dagger-1} \mathbf{M}_a \end{aligned} \quad (5.35)$$

przy czym macierze \mathbf{S}_a , \mathbf{S}_b zdefiniowane są jak w (4.50) i (4.51). Macierz korelacji Σ wyznaczamy z (4.59). Podobnie, na podstawie elementów tej macierzy, wyznaczamy wartości stopnia nieseparowalności \mathcal{I} oraz stopnia paradoksu EPR ϵ , uprzednio sprowadzając je do postaci normalnej. Procedura ta niczym zupełnie nie różni się od przedstawionej pod koniec części 4.3.

5.4 Analiza wyników

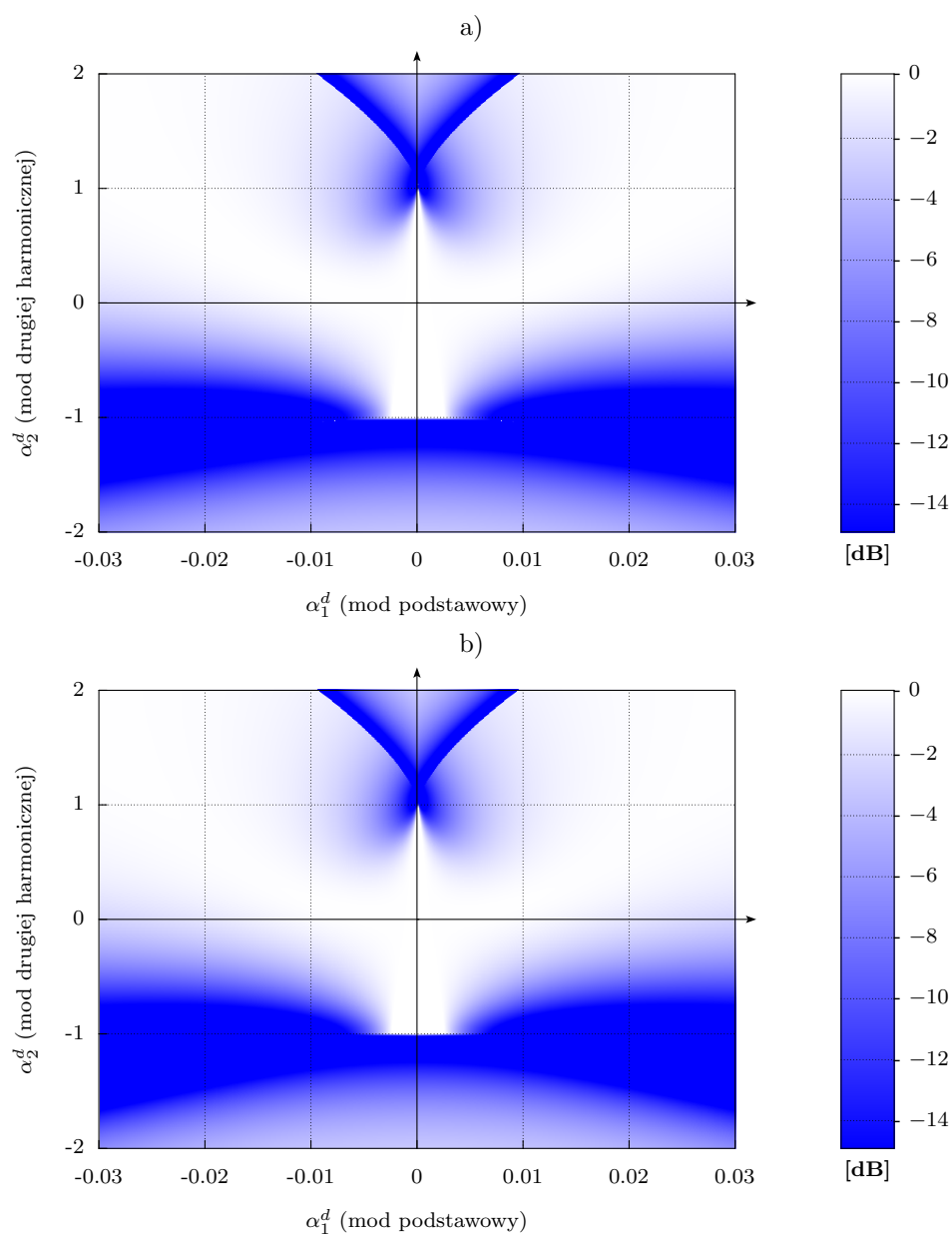
W celu porównania wyników w przypadkach obecności ($\chi \neq 0$) i nieobecności ($\chi = 0$) efektu Kerra, analiza została przeprowadzona dla tych samych wartości parametrów, co w przypadku generacji drugiej harmonicznej w rozdziale poprzednim. Dla wygody czytelnika, przepiszemy je w tym miejscu: $\gamma_{1a} = 1$, $\gamma_{1b} = 0.01$, $\gamma_{2a} = 10$, $\gamma_{2b} = 0.1$, $\kappa = 1$ oraz $\omega = 0$. Pola zewnętrzne zostały przedstawione w takich samych granicach, tzn. dla $\alpha_1^d \in [-0.03, 0.03]$ oraz $\alpha_2^d \in [-2, 2]$ (przy czym α_1^d, α_2^d oznaczają znormalizowane amplitudy tych pól - patrz równania (4.73)-(4.74), (4.75) i (4.76)).

Wyniki zostały przedstawione na kilku kolejnych rysunkach (patrz rysunki 5.1, 5.2, 5.3 i 5.4), osobno dla stopnia nieseparowalności, osobno dla stopnia paradoksu EPR. W każdym z przypadków wyznaczamy miary splątania dla różnych wartości parametru χ , czyli różnej siły efektu Kerra w stosunku do wartości sprzężenia drugiej harmonicznej κ . Pierwszy z rysunków jest zawsze powtórzeniem z poprzedniego rozdziału, ponieważ dla $\chi = 0$ wszystkie równania sprowadzają się do równań drugiej harmonicznej. Każdy kolejny przedstawia wartości miary splątania przy wzrastającym χ . Z rysunków można wysnuć następujące wnioski: dla małych wartości parametru χ splątanie wizualnie wzrasta w dolnej części rysunku. Wzrost ten jest niewielki i wynika z faktu, że zmienia się granica między obszarami „w fazie” i „nie w fazie” z analizy generacji drugiej harmonicznej (choć określenia te nie są już poprawne w przypadku obecności efektu Kerra, gdyż tam wszystkie rozwiązania są „nie w fazie”). Dalej, przy zwiększaniu χ , splątanie coraz bardziej zanika.

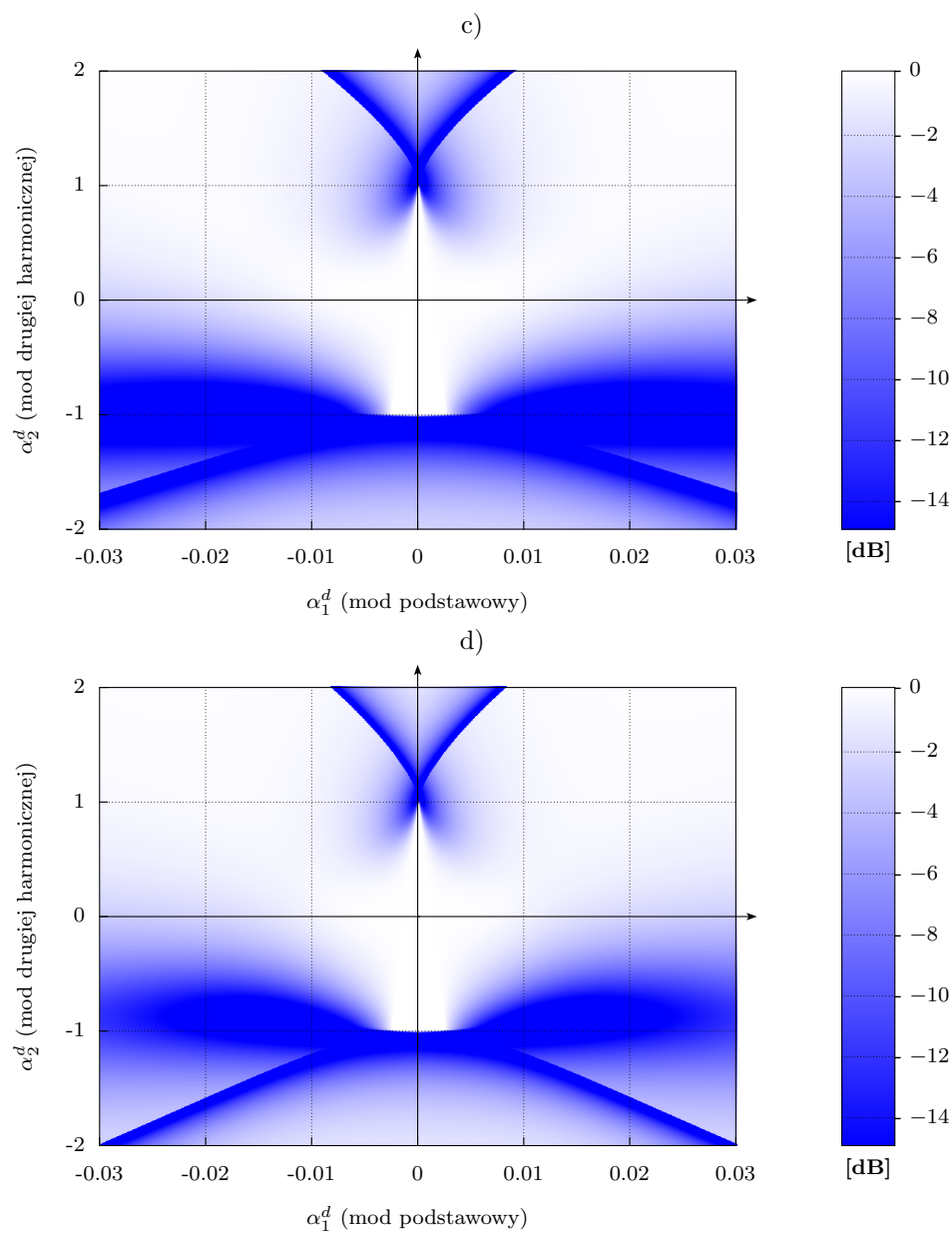
Nasuwa się pytanie, skąd efekt obniżania splątania przy obecności członu Kerrowskiego? Pewne bardzo heurystyczne wyjaśnienie można otrzymać rozważając prostszy model hamiltonianu Kerra bez rezerwuaru, drugiej harmonicznej i pól wejściowych, z jednym modem:

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\chi}{2} (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \quad (5.36)$$

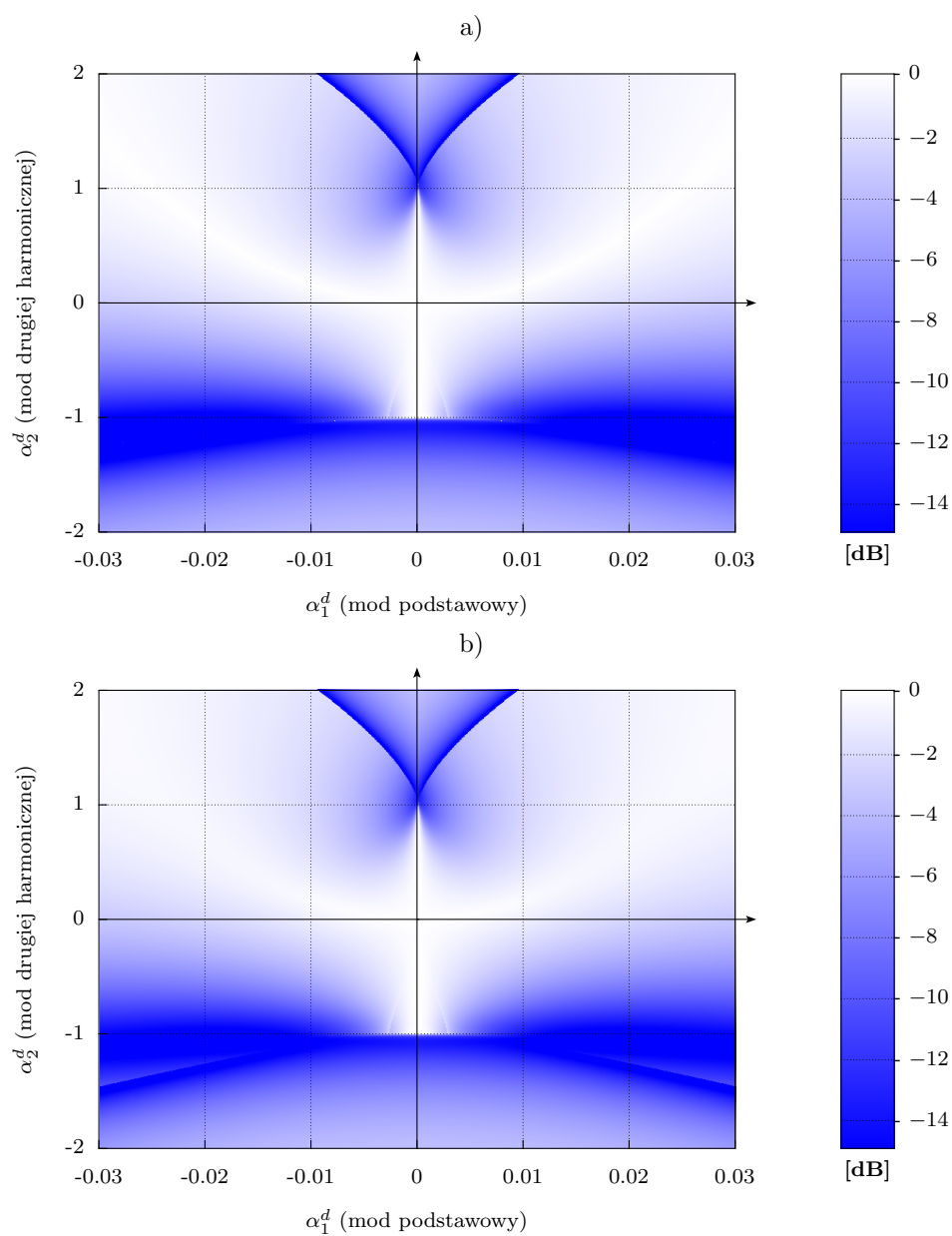
Wtedy równanie ruchu w obrazie Heisenberga będzie miało następującą postać:



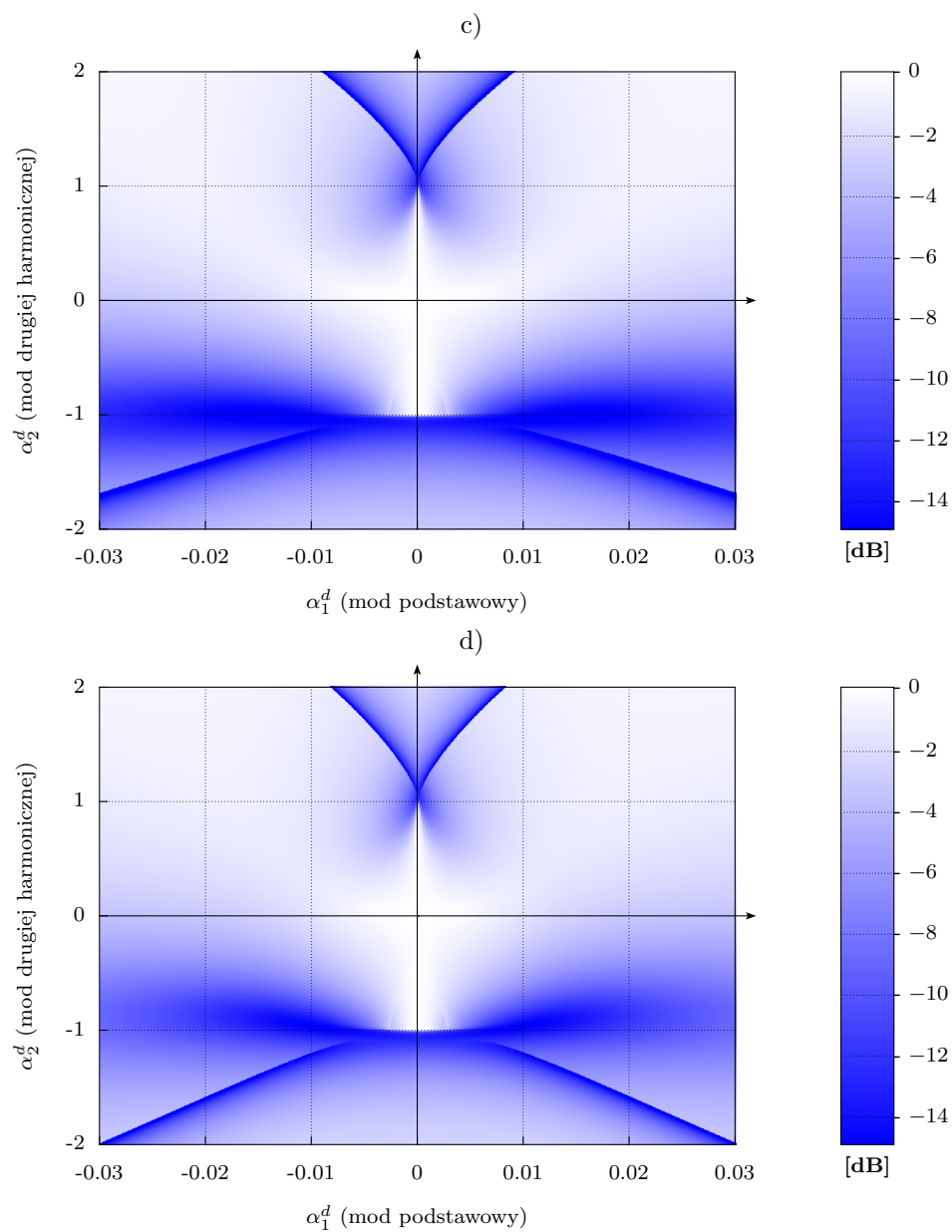
Rysunek 5.1: Wartości stopnia EPR w przypadku obecności efektu Kerra. Wyniki dla a) $\chi = 0$; b) $\chi = 0.02$



Rysunek 5.2: Wartości stopnia EPR w przypadku obecności efektu Kerr (c.d. poprzedniego rysunku). Wyniki dla c) $\chi = 0.05$; d) $\chi = 0.1$



Rysunek 5.3: Wartości stopnia nieseparowalności w przypadku obecności efektu Kerra. Wyniki dla a) $\chi = 0$; b) $\chi = 0.02$



Rysunek 5.4: Wartości stopnia nieseparalności w przypadku obecności efektu Kerra (c.d. poprzedniego rysunku). Wyniki dla c) $\chi = 0.05$; d) $\chi = 0.1$

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = -i\omega\hat{a} - i\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 \quad (5.37)$$

To równanie daje się scałkować. Można pokazać (najprościej poprzez podstawienie do równania) że jego rozwiązaniem jest:

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= e^{-i\omega t - i\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a}(0) \\ &= e^{-i\hat{\Omega}t}\hat{a}(0) \end{aligned} \quad (5.38)$$

gdzie

$$\hat{\Omega} = \omega - \chi\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad (5.39)$$

Otrzymujemy więc równanie z częstością w postaci operatorowej, jednak nie to jest najważniejsze. Zwróćmy uwagę, że przy przejściu do granicy klasycznej otrzymamy:

$$\Omega = \omega - \chi|\alpha|^2 \quad (5.40)$$

Oznacza to, że można interpretować obecność efektu Kerra w granicy klasycznej jako pojawienie się odstrojenia od częstości ω . Odstrojenie to nie jest stałe i zależy od wartości modułu α , tym niemniej w stanie ustalonym jest stałe i niezerowe. Ponieważ, jak już pisaliśmy, odstrojenie od częstości rezonatora zawsze wiąże się z osłabieniem efektów kwantowych, może być to powód zmniejszenia się stopnia splątania w obecności efektu Kerra.

Rozdział 6

Analiza splątania przy generacji drugiej harmonicznej w obrazie Schrödingera (równania Fokkera-Plancka)

Dotychczasowa analiza splątania w nieliniowym ośrodku generującym drugą harmoniczną przeprowadzana była przy użyciu obrazu Heisenberga i równań Langevina, czyli formalizmu, w którym operatory podlegają ewolucji czasowej, a wartości średnie i korelacje liczone są w stanie początkowym. Dzięki temu możliwe było zastosowanie następujących narzędzi obliczeniowych:

- Formalizmu wejścia-wyjścia — użyty został, aby znaleźć relację między polem zewnętrznym, a polem wewnątrz rezonatora; polegał na odpowiednim zdefiniowaniu operatorów wejściowych i wyjściowych, co później natchmiał prowadziło do relacji między nimi. Wykorzystano tutaj operatory szumu pojawiające się w równaniach Langevina, wiążąc je właśnie z działaniem pól zewnętrznych.
- Wyznaczenia macierzy spektralnej poprzez zastosowanie transformaty Fouriera do wszystkich operatorów. Warto zauważyć, że niejawnie zostały tutaj użyte dwuczasowe funkcje korelacji. Mianowicie, jeśli transformatę operatora $\hat{x}(t)$ zdefiniujemy jako:

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (6.1)$$

to iloczyn transformat dwóch operatorów przyjmie postać:

$$\hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int dt \int dt' \hat{x}(t)\hat{y}(t') e^{-i(\omega t + \omega' t')} \quad (6.2)$$

Wzięcie wartości średniej po lewej stronie spowoduje, przy wykorzystaniu liniowości operatorów całkowania, że po prawej stronie pod całką pojawiają się średnie postaci $\langle \hat{x}(t)\hat{y}(t') \rangle$, czyli dwuczasowe funkcje korelacji.

Naturalnym jest pytanie, czy podobnej analizy nie można by przeprowadzić również w obrazie Schrödingera, a jeśli tak — czy wniosłaby coś nowego. Spróbujemy w tym rozdziale pokazać, że na oba pytania da się odpowiedzieć pozytywnie. Będzie trzeba uporać się jednak z dwoma wymienionymi wyżej problemami — mianowicie, jak połączyć to co się dzieje wewnątrz rezonatora z polem wewnętrznym, skoro z równań w obrazie Schrödingera (równań *master* i Fokkera-Plancka) znikają operatory rezerwurowe (są „wyśladowane”), oraz jak liczyć dwuczasowe funkcje korelacji, skoro same operatory nie podlegają ewolucji czasowej.

6.1 Równania ruchu na kumulanty

Analiza będzie opierała się na równaniach ruchu opisujących kumulanty, tzn. korelacje między zmiennymi, w tym przypadku do drugiego rzędu włącznie [40]. Nie będziemy więc rozwiązywać równania Fokkera-Plancka celem uzyskania ewolucji funkcji rozkładu, spróbujemy natomiast wyznaczyć wartości korelacji, co faktycznie sprowadzi równanie cząstkowe do układ równań zupełnych. Oczywiście, możliwe byłoby użycie kumulant wyższych rzędów, tym niemniej skomplikuje to znacznie równania i opis układu [39].

Równania na kumulanty mogą zostać wyprowadzone zarówno z równania *master*, jak i z równania Fokkera-Plancka, jednak w obu przypadkach konieczne będzie dodatkowe założenie. W tym miejscu, dla wygody czytelnika, przytoczymy ponownie oba równania (2.41) i (2.44), przy czym założymy na potrzeby pracy, że pompujące pola koherentne ϵ_1, ϵ_2 są rzeczywiste, tzn. $\epsilon_1^* = \epsilon_1, \epsilon_2^* = \epsilon_2$, że stan rezerwuaru jest stanem próżni fotonowej ($n_1 = n_2 = 0$), pole pompujące jest dopasowane do częstości rezonatora ($\omega_p = \omega$) oraz że operatory są w obrazie oddziaływania:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} &= \frac{\kappa}{2} [\hat{a}_1^{\dagger 2} \hat{a}_2 - \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2^{\dagger}, \hat{\rho}] + \epsilon_1 [\hat{a}_1^{\dagger} - \hat{a}_1, \hat{\rho}] + \epsilon_2 [\hat{a}_2^{\dagger} - \hat{a}_2, \hat{\rho}] \\ &+ \gamma_1 (2\hat{a}_1 \hat{\rho} \hat{a}_1^{\dagger} - \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1) \\ &+ \gamma_2 (2\hat{a}_2 \hat{\rho} \hat{a}_2^{\dagger} - \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \{(\gamma_1 \alpha_1 - \epsilon_1 - \kappa \alpha_1^* \alpha_2) P(\alpha_1, \alpha_2)\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \{(\gamma_1 \alpha_1^* - \epsilon_1 - \kappa \alpha_1 \alpha_2^*) P(\alpha_1, \alpha_2)\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left\{ (\gamma_2 \alpha_2 - \epsilon_2 + \frac{\kappa}{2} \alpha_1^2) P(\alpha_1, \alpha_2) \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} \left\{ (\gamma_2 \alpha_2^* - \epsilon_2 + \frac{\kappa}{2} \alpha_1^{*2}) P(\alpha_1, \alpha_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \{ \kappa \alpha_2 P(\alpha_1, \alpha_2) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^{*2}} \{ \kappa \alpha_2^* P(\alpha_1, \alpha_2) \} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sposób wyznaczania równań na kumulanty pokażemy na przykładzie. Przyjmijmy, że chcemy np. wyznaczyć równanie na korelację $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2 \rangle$. Korzystając z definicji:

$$\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2 \rangle = \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2 \rangle \quad (6.5)$$

wyznaczamy pochodną czasową, używając wzoru na pochodną iloczynu, jako:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}_1, \hat{a}_2 \rangle = \frac{d}{dt} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \rangle \frac{d}{dt} \langle \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_2 \rangle \frac{d}{dt} \langle \hat{a}_1 \rangle \quad (6.6)$$

W zależności od tego, z jakiego równania chcemy wyznaczyć ewolucję czasową kumulant, postępujemy w dwojaki sposób:

- W przypadku równania *master* pochodne poszczególnych elementów wyznaczamy korzystając z definicji, tj.:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle = \frac{d}{dt} \text{Tr}\{\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{\rho}\} = \text{Tr}\{\hat{a}_1 \hat{a}_2 \dot{\hat{\rho}}\} \quad (6.7)$$

gdzie ostatnie równanie wynika z faktu, że operatory w obrazie Schrödingera są niezależne od czasu (jako symbolu pochodnej w ostatnim równaniu użyto kropki). Następnie w miejsce pochodnej macierzy gęstości $\dot{\hat{\rho}}$ wstawiamy prawą stronę równania (6.3) i przeprowadzamy stosowne uproszczenia używając reguł komutacji.

- W przypadku równań Fokkera-Plancka pochodne wyznaczamy przy pomocy reprezentacji stanów koherentnych, mianowicie:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle = \frac{d}{dt} \int \alpha_1 \alpha_2 P(\alpha_1, \alpha_2, t) d^2 \alpha_1 d^2 \alpha_2 = \int \alpha_1 \alpha_2 \frac{d}{dt} P(\alpha_1, \alpha_2, t) d^2 \alpha_1 d^2 \alpha_2 \quad (6.8)$$

Następnie w miejsce pochodnej funkcji $P(\alpha_1, \alpha_2, t)$ wstawiamy prawą stronę równania (6.4); z pochodnymi po α_1, α_2 radzimy sobie całkując te człony przez części.

Oczywiście, powyższe rozważania dotyczą wszystkich kumulant, również tych pierwszego rzędu, tzn. wartości średnich. Jakąkolwiek z tych metod zastosujemy, dojdziemy do następującego zbioru równań:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1\rangle = -\gamma_1\langle\hat{a}_1\rangle + \epsilon_1 + \chi\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\rangle \quad (6.9)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_2\rangle = -\gamma_2\langle\hat{a}_2\rangle + \epsilon_2 - \frac{\chi}{2}\langle\hat{a}_1^2\rangle \quad (6.10)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rangle = -2\gamma_1\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\rangle + \chi(\langle\hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_2\rangle + \langle\hat{a}_1^2\hat{a}_2^\dagger\rangle) \quad (6.11)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\rangle = -2\gamma_2\langle\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\rangle - \frac{\chi}{2}(\langle\hat{a}_1^{\dagger 2}\hat{a}_2\rangle + \langle\hat{a}_1^2\hat{a}_2^\dagger\rangle) \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1\hat{a}_1\rangle = -2\gamma_1\langle\hat{a}_1\hat{a}_1\rangle + \chi(2\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1\hat{a}_2\rangle + \langle\hat{a}_2\rangle) \quad (6.13)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_2\hat{a}_2\rangle = -2\gamma_2\langle\hat{a}_2\hat{a}_2\rangle - \chi\langle\hat{a}_1^2\hat{a}_2\rangle \quad (6.14)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1\hat{a}_2\rangle = -(\gamma_1 + \gamma_2)\langle\hat{a}_1\hat{a}_2\rangle + \frac{\chi}{2}(2\langle\hat{a}_2^2\hat{a}_1^\dagger\rangle - \langle\hat{a}_1^3\rangle) \quad (6.15)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\rangle = -(\gamma_1 + \gamma_2)\langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\rangle + \frac{\chi}{2}(2\langle\hat{a}_1\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\rangle - \langle\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^2\rangle) \quad (6.16)$$

Równania na wszystkie pozostałe momenty drugiego rzędu da się otrzymać z powyższych równań poprzez sprzężenie równania lub użycie reguł komutacji operatorów kreacji i anihilacji. Niestety, po prawej stronie równań pojawiają się wyrazy trzeciego rzędu. Aby w pełni rozwiązać problem, należałoby również napisać równania na te momenty, ale wtedy po ich prawych stronach pojawiłyby się momenty czwartego rzędu. Ciąg ten jest nieskończony i musimy zdecydować się na ucięcie go na pewnym wyrazie. To jest właśnie element, który powoduje, że metoda ta jest metodą przybliżoną.

Przybliżenia dokonuje się, zakładając, że stan układu jest stanem gaussowskim (patrz 1.4). Aby uprościć sobie zadanie, zapiszemy go w reprezentacji zmiennych $(\alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*)$, a nie — jak poprzednio — w reprezentacji $(\text{Re}\alpha_1, \text{Im}\alpha_1, \text{Re}\alpha_2, \text{Im}\alpha_2)$. Nowa reprezentacja pozwoli łatwiej uzyskać interesujące nas kumulanty. Nie pominiemy również wartości średnich przy zapisie stanu gaussowskiego, co więcej zapiszemy go od razu za pomocą funkcji charakterystycznej Wignera:

$$\chi^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2) = e^{-\frac{1}{2}\alpha^T \Sigma \alpha + i\mu^T \alpha} \quad (6.17)$$

gdzie:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_1^*, \alpha_2, \alpha_2^*) \quad (6.18)$$

jest wektorem zmiennych, a

$$\mu = (\langle\hat{a}_1\rangle, \langle\hat{a}_1^\dagger\rangle, \langle\hat{a}_2\rangle, \langle\hat{a}_2^\dagger\rangle) \quad (6.19)$$

jest wektorem wartości średnich. Macierz korelacji Σ w reprezentacji takich zmiennych przyjmuje następującą postać:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle\{\hat{a}_1, \hat{a}_1\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1, \hat{a}_2\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger\}\rangle \\ \langle\{\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2\}\rangle & \langle\{\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\}\rangle \\ \langle\{\hat{a}_2, \hat{a}_1\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2, \hat{a}_2\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\}\rangle \\ \langle\{\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_1^\dagger\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2\}\rangle & \langle\{\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2^\dagger\}\rangle \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

przy czym $\{\hat{x}, \hat{y}\} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\hat{x})$ oznacza symetryczny porządek operatorów. Momenty dowolnych rzędów można wyznaczyć korzystając z równości:

$$\left\langle \left\{ (\hat{a}_1^\dagger)^n \hat{a}_1^m (\hat{a}_2^\dagger)^p \hat{a}_2^q \right\} \right\rangle = \frac{\partial^{n+m+p+q}}{\partial (i\alpha_1^*)^n \partial (i\alpha_1)^m \partial (i\alpha_2^*)^p \partial (i\alpha_2)^q} \chi^{(s)}(\alpha_1, \alpha_2) \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} \quad (6.21)$$

Ponieważ w definicji funkcji charakterystycznej stanu gaussowskiego występują tylko momenty pierwszego (średnie) i drugiego rzędu (elementy macierzy kowariancji), wszystkie wyższe momenty można wyrazić poprzez momenty do drugiego rzędu włącznie. W ten sposób jesteśmy w stanie pozbyć się wszystkich momentów trzeciego rzędu z równań (6.9)-(6.16). Proces ten jest obliczeniowo żmudny, stąd przedstawiamy tylko końcowe rezultaty. Wprowadzając oznaczenia:

$$\xi_i = \langle \hat{a}_i \rangle \quad (6.22)$$

$$B_i = \langle \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i \rangle \quad (6.23)$$

$$B_{12} = \langle \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2 \rangle \quad (6.24)$$

$$C_i = \langle \hat{a}_i, \hat{a}_i \rangle \quad (6.25)$$

$$C_{12} = \langle \hat{a}_1, \hat{a}_2 \rangle \quad (6.26)$$

możemy układ równań (6.9)-(6.16), przy wyrażeniu momentów trzeciego rzędu za pomocą momentów rzędu drugiego, przedstawić w następującej postaci [40, 39]:

$$\dot{\xi}_1 = -\gamma_1 \xi_1 + \epsilon_1 + \chi(\xi_1^* \xi_2 + B_{12}) \quad (6.27)$$

$$\dot{\xi}_2 = -\gamma_2 \xi_2 + \epsilon_2 - \frac{\chi}{2}(\xi_1^2 + C_1) \quad (6.28)$$

$$\dot{B}_1 = -2\gamma_1 B_1 + \chi(B_{12}^* \xi_1 + B_{12} \xi_1^*) + \chi(C_1^* \xi_2 + C_1 \xi_2^*) \quad (6.29)$$

$$\dot{B}_2 = -2\gamma_2 B_2 - \chi(B_{12} \xi_1^* + B_{12}^* \xi_1) \quad (6.30)$$

$$\dot{C}_1 = -2\gamma_1 C_1 + 2\chi(C_{12} \xi_1^* + B_1 \xi_2) + \chi \xi_2 \quad (6.31)$$

$$\dot{C}_2 = -2\gamma_2 C_2 - 2\chi C_{12} \xi_1 \quad (6.32)$$

$$\dot{C}_{12} = -(\gamma_1 + \gamma_2) C_{12} + \chi(B_{12} \xi_2 - C_1 \xi_1 + C_2 \xi_1^*) \quad (6.33)$$

$$\dot{B}_{12} = -(\gamma_1 + \gamma_2) B_{12} + \chi(C_{12} \xi_2^* + \xi_1 B_2 - \xi_1 B_1) \quad (6.34)$$

Dzięki tym równaniom jesteśmy w stanie wyznaczyć wszystkie korelacje do drugiego rzędu. Dokonujemy tego, numerycznie całkując równania (metoda Runge-Kutty-Gilla). Analiza wyników [40] wskazuje różnego typu rozwiązania — punkty stałe, cykle graniczne, atraktory chaotyczne. Jednak przy doborze parametrów, dla których będzie testowana ta metoda, zmienne zawsze trafiają do punktu stałego odwzorowania. Można więc przyjąć, że od pewnego momentu wszystkie kumulanty pozostają stałe, a ich wartości jesteśmy w stanie numerycznie wyznaczyć.

6.2 Dwuczaskowe funkcje korelacji i macierz spektralna

Przyglądajmy się równaniu (6.2), opisującemu iloczyn transformat dwóch operatorów. Biorąc wartość średnią po obu stronach równości i odejmując iloczyn średnich, otrzymamy:

$$\langle \hat{x}(\omega), \hat{y}(\omega') \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dt \int dt' \langle \hat{x}(t), \hat{y}(t') \rangle e^{-i(\omega t + \omega' t')} \quad (6.35)$$

W szczególności, jeśli $\langle \hat{x}(t), \hat{y}(t') \rangle$ jest stacjonarne, tj. zależy tylko od $\tau = t' - t$, po modyfikacji zmiennych i wykonaniu jednej z całek (otrzymując deltę Diraca) dostaniemy:

$$\langle \hat{x}(\omega), \hat{y}(\omega') \rangle = \int \langle \hat{x}(t), \hat{y}(t + \tau) \rangle e^{-i\omega' \tau} d\tau \delta(\omega + \omega') \quad (6.36)$$

Jeśli pod \hat{x} i \hat{y} podłożymy wszystkie kombinacje operatorów $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ (oznaczając je wspólnie jako wektor $\hat{\mathbf{a}}$) i wycałkujemy równanie pozbywając się jednej z częstotści i delty Diraca, otrzymamy ogólny wzór na *macierz korelacji spektralnej*:

$$\mathbf{S}(\omega) = \int \langle \hat{\mathbf{a}}(t), \hat{\mathbf{a}}^T(t + \tau) \rangle e^{-i\omega \tau} d\tau \quad (6.37)$$

Istotnym elementem dalszej analizy będzie wprowadzenie różniczkowych równań stochastycznych. Można pokazać [18, 31], że równanie Fokkera-Plancka o ogólnej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(\mathbf{x}, t) = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{B}^T(\mathbf{x}, t) \right)_{ij} P(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (6.38)$$

można sprowadzić do stochastycznego równania różniczkowego:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \mathbf{E}(t) \quad (6.39)$$

przy czym $\mathbf{E}(t)$ to zmienne losowe (fluktuujące siły) spełniające warunek:

$$\langle E_i(t) E_j(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (6.40)$$

Równania te nie będą tutaj wyprowadzone, gdyż wykracza to poza temat tej pracy. Wyprowadzenie to opiera się o zastosowanie tzw. reguł Ito. Zainteresowanych odsyłamy do [18].

Oczywiście, równanie (6.39) jest niezwykle trudne do rozwiązania z uwagi na dowolną postać wektorów $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ oraz $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$. W pracy tej zastosujemy powyższe równania do bardzo szczególnego przypadku problemu generacji drugiej harmonicznej. Korzystając z równania Fokkera-Plancka (6.4) jesteśmy w stanie otrzymać odpowiednie równania stochastyczne:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \epsilon_1 + \kappa\alpha_1^\dagger\alpha_2 - \gamma_1\alpha_1 + \sqrt{\kappa\alpha_2}E_1(t) \quad (6.41)$$

$$\frac{d\alpha_1^\dagger}{dt} = \epsilon_1 + \kappa\alpha_1\alpha_2^\dagger - \gamma_1\alpha_1^\dagger + \sqrt{\kappa\alpha_2^\dagger}E_1(t) \quad (6.42)$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \epsilon_2 - \frac{\kappa}{2}\alpha_1^2 - \gamma_2\alpha_2 \quad (6.43)$$

$$\frac{d\alpha_2^\dagger}{dt} = \epsilon_2 - \frac{\kappa}{2}\alpha_1^{\dagger 2} - \gamma_2\alpha_2^\dagger \quad (6.44)$$

przy czym $\alpha_i, \alpha_i^\dagger$ nie są sprzężone zespolono, ale są to dwie niezależne zespolone zmienne losowe. Oczywiście, nieprzypadkowo równania te są bardzo podobne do równań Langevina. Aby rozwiązać interesujący nas problem, dokonamy linearyzacji tych równań:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}\mathbf{E} \quad (6.45)$$

przy czym $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_1^\dagger, \alpha_2, \alpha_2^\dagger)$ oraz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \kappa\alpha_2 & \kappa\alpha_1^* & 0 \\ \kappa\alpha_2^* & -\gamma_1 & 0 & \kappa\alpha_1 \\ -\kappa\alpha_1 & 0 & -\gamma_2 & 0 \\ 0 & -\kappa\alpha_1^* & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

jest macierzą dyfuzji, zaś:

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} \kappa\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa\alpha_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

jest macierzą dryftu. W tym przypadku można pokazać [31, 18], że dwuczasowe funkcje korelacji w stanie stacjonarnym, $\langle \boldsymbol{\alpha}(t)\boldsymbol{\alpha}^T(t+\tau) \rangle$, spełniają następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{d\tau}\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}^T(t+\tau) \rangle = -\mathbf{A}\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}^T(t+\tau) \rangle \quad (6.48)$$

Używając tego równania, można pokazać, że normalnie uporządkowana macierz korelacji spektralnej (6.37) wyraża się następującym wzorem [31]:

$$: (S) : (\omega) = (\mathbf{A} + i\omega)^{-1}(\mathbf{A}\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}^T(t) \rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}^T(t) \rangle \mathbf{A}^T)(\mathbf{A}^T - i\omega)^{-1} \quad (6.49)$$

Zauważmy, że w ten sposób, jeśli znamy początkową wartość macierzy $\langle \boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}^T(t) \rangle$, linearyzując proces, jesteśmy w stanie wyznaczyć macierz spektralną. Początkową wartość tej macierzy możemy wziąć z wyników wyliczeń z

poprzedniego podrozdziału (wyznaczanie wartości kumulant), gdyż jest to po prostu macierz korelacji w dziedzinie czasowej.

Pozostaje jeszcze jeden problem — w jaki sposób wyrazić macierz korelacji spektralnej zewnętrznych modów pola? Dotychczas udało się ją wyznaczyć dla modów wewnątrz rezonatora. Z pomocą przychodzi tutaj formalizm wejścia-wyjścia [9, 31]. Można pokazać, że między dwuczasowymi korelacjami modów wewnątrz i na zewnątrz zachodzą następujące relacje:

$$\langle \hat{a}_{i,out}^\dagger(t), \hat{a}_{j,out}(t') \rangle = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} \langle \hat{a}_i^\dagger(t), \hat{a}_j(t') \rangle \quad (6.50)$$

$$\langle \hat{a}_{i,out}(t), \hat{a}_{j,out}(t') \rangle = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} \langle \hat{a}_i(t), \hat{a}_j(t') \rangle \quad i \neq j \quad (6.51)$$

$$\langle \hat{a}_{i,out}(t), \hat{a}_{j,out}(t') \rangle = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} \langle \hat{a}_i(\max(t, t')), \hat{a}_j(\min(t, t')) \rangle \quad i = j \quad (6.52)$$

Wszystkie pozostałe korelacje można uzyskać z powyższych poprzez sprzężenie i relacje komutacji. Powyższe relacje nie będą dowiedzione, gdyż wymagają uprzedniej analizy formalizmu wejścia-wyjścia. Czytelny dowód znajduje się w [31]. Przy wyprowadzaniu tych równań używa się założenia, że pole wejściowe jest w stanie koherentnym.

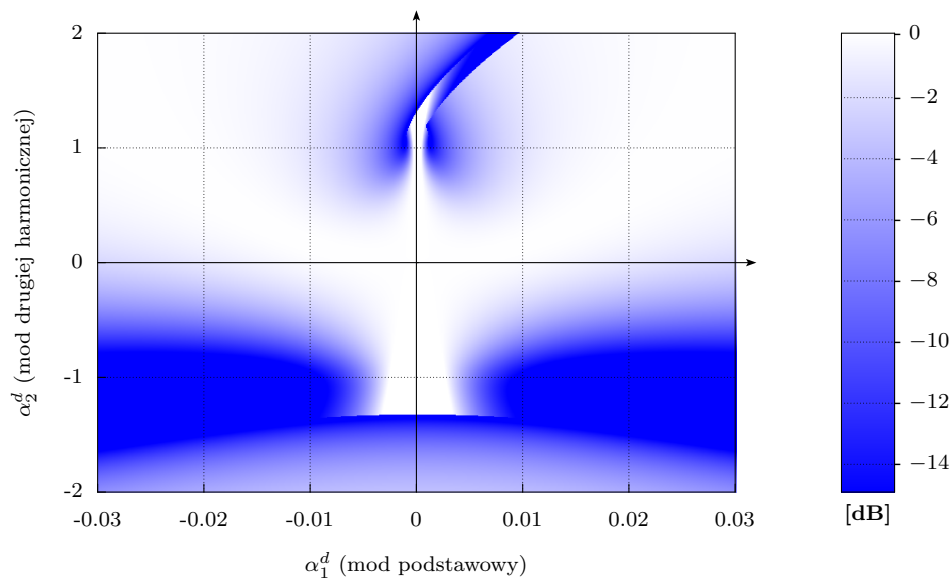
Używając (6.50)-(6.52) jesteśmy w stanie natychmiast podać sposób obliczenia normalnie uporządkowanej macierzy korelacji spektralnej pola wyjściowego $: \mathbf{S}_{out} :$

$$(: \mathbf{S}_{out} :)_{ij} = \sqrt{\gamma_i \gamma_j} (: \mathbf{S} :)_{ij} \quad (6.53)$$

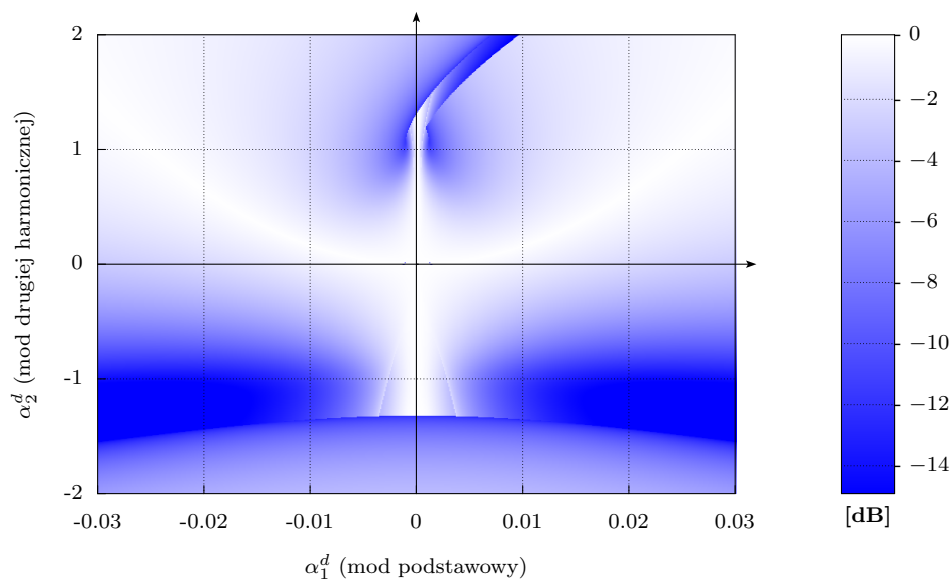
6.3 Porównanie wyników

Analizę przeprowadziliśmy dla takich samych parametrów, jak w rozdziałach poprzednich, które dla wygody przypomnimy: $\gamma_{1a} = 1$, $\gamma_{1b} = 0.01$, $\gamma_{2a} = 10$, $\gamma_{2b} = 0.1$, $\kappa = 1$ oraz $\omega = 0$. Pola zewnętrzne zostały przedstawione w takich samych granicach, tzn. dla $\alpha_1^d \in [-0.03, 0.03]$ oraz $\alpha_2^d \in [-2, 2]$ (przy czym α_1^d, α_2^d oznaczają znormalizowane amplitudy tych pól - patrz równania (4.73)-(4.74), (4.75) i (4.76)). Wyniki zostały przedstawione na rysunku 6.1 (stopień EPR) oraz na rysunku 6.2 (stopień niesaprowalności), wraz z wynikami z rozdziału (4), w celu porównania. Wnioski wypływające z rysunków są następujące:

- Udało się odtworzyć wyniki przy użyciu obrazu Schrödingera z dużą dokładnością. Pokazuje to, że różne metody doprowadziły do bardzo podobnych rezultatów, co zdaje się potwierdzać wiarygodność wyników.
- Różnice są spowodowane przede wszystkim innymi wartościami zmiennych α_1, α_2 w przypadku metody kumulant. Jest to spowodowane użyciem przybliżenia drugiego rzędu (gaussowskiego) w przeciwieństwie do metody z rozdziału 4, gdzie zostały one wyznaczone z równań klasycznych. Sugeruje to większą dokładność metody kumulant, tym niemniej:
- W przypadku metody kumulant użyte zostały dwa przybliżenia przy wyznaczaniu spektralnej macierzy korelacji: przyjęcie koherentnego stanu światła wejściowego oraz linearyzacja równań stochastycznych. Lepsze rezultaty dałoby rozwiązanie równań stochastycznych w sposób w pełni ogólny, numerycznie.



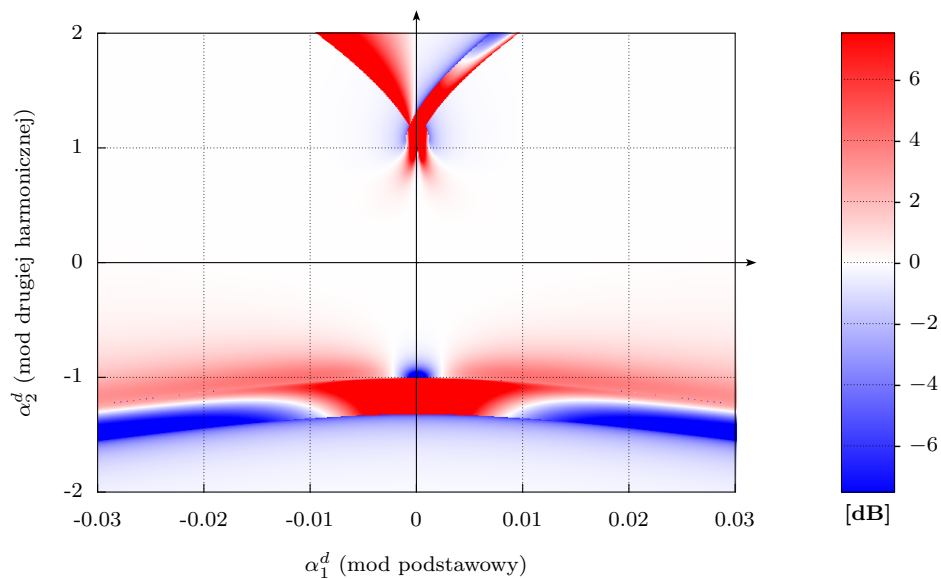
Rysunek 6.1: Wartości stopnia EPR w zależności od wartości pól pompujących α_1^d i α_2^d . Skala zaciemnienia jest logarytmiczna (w decybelach). Im bardziej niebieski punkt, tym większe splątanie.



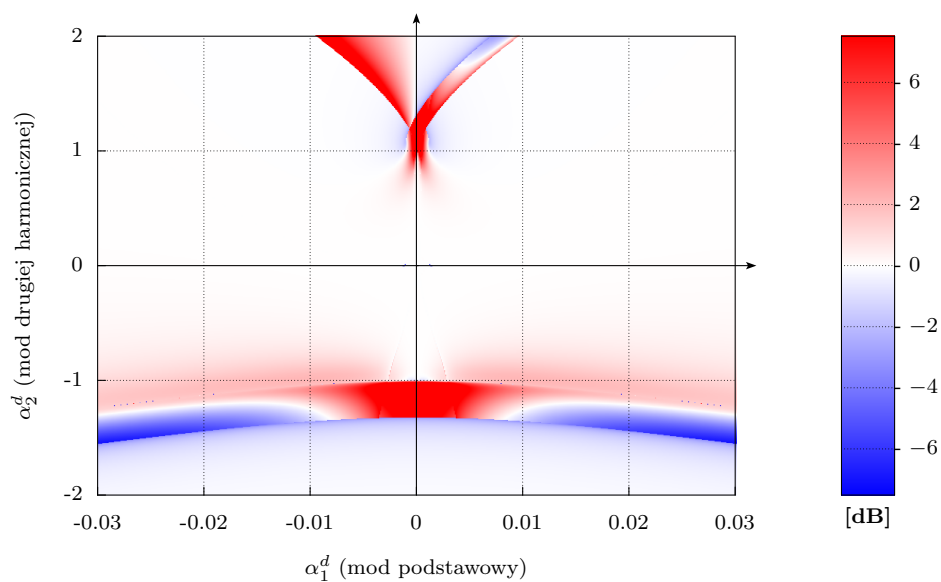
Rysunek 6.2: Wartości stopnia nieseparowalności w zależności od siły pól pompujących α_1^d i α_2^d .

Trudno więc jednoznacznie określić, która z metod dała wynik bliższy rzeczywistości. Z pewnością jednak ich podobieństwo w obu przypadkach sugeruje wiarygodność otrzymanych rezultatów.

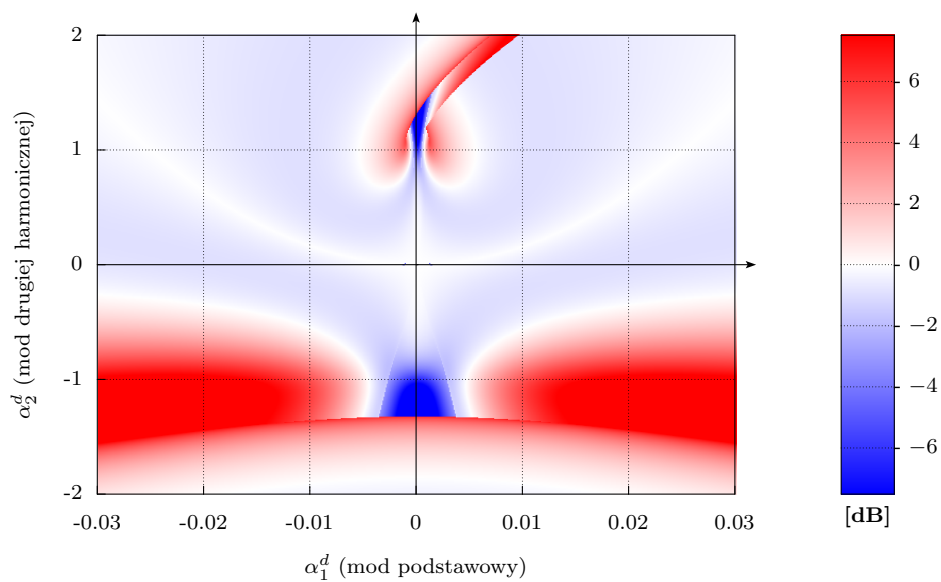
Dosyć interesującą analizę stanowią rysunki 6.3, 6.4 i 6.5. Wszystkie one są różnicami między dwoma innymi wykresami. Rysunek 6.5 wskazuje na różnice w ramach metody kumulant między dwoma rozpatrywanymi miarami. Taki rysunek już mieliśmy w przypadku metody w rozdziałach poprzednich. Nowością są natomiast rysunki 6.3 oraz 6.4. Pokazują one różnice dla danej miary, między dwoma podejściami, czyli dokładnie wskazują, co się zmieniło przy zastosowaniu podejścia opartego na kumulantach w obrazie Schrödingera. Kolor czerwony wskazuje, że metoda linearyzacji daje silniejsze splątanie, niż metoda kumulant, kolor niebieski — odwrotnie. Okazuje się, że największe różnice pojawiają się dla obszaru niestabilnego (u góry rysunków) oraz „nie w fazie” (na dole rysunków). Wynika to jednak przede wszystkim z faktu, że w tych obszarach mamy do czynienia z dwoma rozwiązaniami (dwa rozwiązania stabilne w obszarze bistabilnym, natomiast w obszarze na dole rysunku są to współistniejące rozwiązanie „w fazie” oraz „nie w fazie”). Różnice wynikają w znacznym stopniu z następującego powodu: w przypadku metody linearyzacji w obrazie Heisenberga (opisanej w rozdziałach wcześniejszych) zawsze wybieraliśmy rozwiązanie, które wskazywało największe splątanie (spośród dwóch współistniejących). W przypadku metody kumulant rozwiązanie zależy od przyjętych warunków początkowych (symulujemy je w końcu numerycznie), stąd w zależności od punktu układ zbiega do jednego z dwóch punktów stałych, nie zawsze do tego samego, co powoduje widoczne różnice, ponieważ drugie z rozwiązań wykazuje zwykle mniejszy stopień splątania. W przypadku środkowej części rysunku (dla $-1 \leq \alpha_2^d \leq 1$) różnice nie są już tak chaotycznie rozłożone i wydają się trochę mniejsze.



Rysunek 6.3: Wartości stosunku stopnia EPR w przypadku wyznaczania w formalizmie Heisenberga i Schrödingera (metoda linearyzacji w stosunku do metody kumulant).



Rysunek 6.4: Wartości stosunku stopnia nieseparowalności w przypadku wyznaczania w formalizmie Heisenberga i Schrödingera.



Rysunek 6.5: Wartości stosunku obu miar (\mathcal{I} w stosunku do ϵ), podane w skali logarytmicznej. Kolor czerwony oznacza, że \mathcal{I} wskazuje na silniejsze splątanie, niebieski — ϵ wskazuje na silniejsze splątanie.

Podsumowanie

W niniejszej pracy porównano dwa rodzaje opisów oddziaływania światła z nieliniowym ośrodkiem znajdującym się w rezonatorze. Z jednej strony, kwantowe równania Langevina (obraz Heisenberga) pozwalają, przy linearyzacji równań, w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć spektralne macierze korelacji światła zarówno w rezonatorze, jak i wydostającego się na zewnątrz. Na tej podstawie jesteśmy już w stanie wyznaczyć miary splątania, takie jak stopień nieseparowalności czy stopień paradoksu EPR. Niebagatelną rolę odgrywa tutaj formalizm wejścia-wyjścia, pozwalający odnieść to co się dzieje w rezonatorze, do tego, co do rezonatora wpada i z rezonatora wychodzi.

Z drugiej strony, użycie równania *master* i Fokkera-Plancka (obraz Schrödingera) umożliwia dokładniejsze wyznaczenie korelacji pierwszego i drugiego rzędu poprzez zastosowanie przybliżenia gaussowskiego, czyli wykracza poza zwykłe wyznaczenie wartości średnich z równań klasycznych. Trudność pojawia się jednak w przypadku liczenia spektralnej macierzy korelacji, do której wyznaczenia potrzebne są dwuczasowe funkcje korelacji, łatwiejsze do operowania w obrazie Heisenberga. Udać się je jednak uzyskać, znajdując równanie ruchu, jakie spełniają przy linearyzacji macierzy dyfuzji, za macierz początkową obierając macierz powstałą w wyniku przybliżenia gaussowskiego. Co więcej, wyniki dotyczące światła wychodzącego z rezonatora otrzymane są przy założeniu, że światło wejściowe jest ciągle w stanie koherentnym.

Wyniki w obu przypadkach są do siebie zbliżone. Sugerują, że za pomocą procesu generacji drugiej harmonicznej da się uzyskać stany o dużym stopniu splątania, w szczególności na granicy obszarów różnego typu rozwiązań — na granicy tej rozwiązania równań klasycznych zmieniają swoje właściwości (pojawiają się bifurkacje i różnice w fazie między polem pompującym i generowanym w rezonatorze). Obie miary splątania w ogólności wskazują siłę splątania podobnie, chociaż przy dokładniejszej analizie różnią się nieznacznie od siebie w pewnych przypadkach. Analiza ta wymagałaby prawdopodobnie poświęcenia większej uwagi w przyszłości.

Pojawienie się efektu Kerra okazało się negatywnie działać na siłę splątania stanów w analizowanym obszarze przestrzeni parametrów. Niewielki jego wzrost obserwowany jest jedynie przy małej wartości stałej Kerra, prawdopodobnie na skutek zmiany granic jakościowo różnych rozwiązań. Przedstawiono pewne bardzo heurystyczne wyjaśnienie spadku siły splątania, choć trudno powiedzieć, czy oddaje ono pełnię powodów występowania tego zjawiska.

Praca jest tylko zalążkiem możliwej analizy. Widać szereg kierunków, w jakich analiza ta mogłaby się rozwinąć. Poniżej przedstawiamy możliwości dalszych badań:

- Znacznie dokładniejszą analizę umożliwiłoby pełne numeryczne rozwiązywanie stochastycznych równań różniczkowych. Pozwoliłoby ono na dokładne prześledzenie ewolucji zmiennych stochastycznych opisujących układ i umożliwiłoby dokładne wyznaczenie dwuczłonowej macierzy korelacji i macierzy spektralnej. Byłaby to dobra weryfikacja wyników uzyskanych w tej pracy za pomocą metod przybliżonych. Jest to chyba najważniejszy kierunek badań, jaki można by podjąć.
- Możliwe byłoby dokładniejsze zbadanie efektów zachodzących dla innych parametrów. Zestaw parametrów, którym posługiwano się w pracy, został, w celach porównawczych, wzięty z [21]. Odpowiedź na pytania, jak wyglądają miary splątania dla innych wartości tych parametrów, lub jak na nie wpływa w tym przypadku efekt Kerra, istotnie polepszyłaby naszą wiedzę o tych procesach. Dodatkowo, można by pokusić się o numeryczną optymalizację parametrów tak, aby otrzymać ostatecznie stany o największej sile splątania. Oczywiście, należałoby się w tym wypadku zastanowić nad odpowiednim kryterium optymalizacji — czy miałyby to być po prostu jak największa miara splątania (a jeśli tak — to która?), czy może średnia wartość splątania na pewnym obszarze? Możliwości technik optymalizacyjnych (takich jak klasyczne algorytmy gradientowe przy pozyskaniu gradientu optymalizowanej funkcji poprzez analizę równań, lub nowoczesne algorytmy takie jak np. algorytmy genetyczne) pozwoliłyby na wyznaczenie takich warunków, przy których uzyskalibyśmy stany najbardziej splątane.
- Potrzebne byłoby rozpatrzenie innych miar splątania dla zmiennych ciągłych, takich jak entropia splątania czy *negativity*. Pozwoliłoby to na szerszy wgląd w splątanie stanów i analizę porównawczą różnych miar, szczególnie ważną i istotną dla mało zbadanego przypadku zmiennych ciągłych.
- Dokładniejszej analizy wymagałyby także uzyskane już wyniki pod względem relacji między stopniem nieseparowalności i stopniem EPR. Częściowo na te pytania odpowiada praca [5], tym niemniej nadal istnieje tutaj pole do badań.
- W całej pracy, w celu uproszczenia analizy, rozważane były tylko stany ustalone (punkty stałe). W ogóle nie poruszono tematu rozwiązań niestabilnych, chaotycznych, choć wiadomo, że w przybliżeniu gaussowskim takie rozwiązania istnieją [39, 40]. Dużym wyzwaniem byłaby analiza splątania takich stanów i odniesienie wartości miar do współczynników znanych z dynamiki nieliniowej, takich jak np. wykładniki Lapunova.

Nieliniowe zjawiska optyczne, w szczególności generacja drugiej harmonicznej i efekt Kerra, okazały się być znakomitymi źródłami splątanych stanów pola. Możliwości generowania stanów o praktycznie dowolnie silnym splątaniu, przy odpowiednim doborze parametrów, czynią z tych zjawisk ważne narzędzie przy realizacji protokołów i algorytmów kwantowego przetwarzania informacji. Jest więc uzasadniona nadzieja, że nieliniowe efekty optyczne mogą grać istotną rolę przy konstrukcji komputera kwantowego.

Bibliografia

- [1] Bell, J. S., *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physica **1**, 195 (1964)
- [2] Bennet, C. H., Bernstein, H., Popescu, S., Schumacher, B., *Concentrating partial entanglement by local operations* Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996)
- [3] Armstrong, J. A., Bloembergen, N., Ducuing, J., Pershan, P. S., *Interaction between Light Waves in a Nonlinear Dielectric*, Phys.Rev. **127**, 1918 (1962)
- [4] Bloembergen, N., *Nonlinear Optics*, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam 1965
- [5] Bowen, W. P., Schnabel, R., Lam, P. K., Ralph, T. C., *Experimental characterization of continuous-variable entanglement*, Phys. Rev. A **69**, 012304 (2004)
- [6] Boyd, R. W., *Nonlinear optics*, Academic Press 2002.
- [7] Braunstein, S., *Squeezing as an irreducible resource*, Phys. Rev. A **71**, 055801 (2005)
- [8] Braunstein, S., Loock, van P., *Quantum information with continuous variables*, Rev. of Mod. Ph., **77** (2005).
- [9] Collett, M. J., Gardiner, C. W., *Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification*, Phys. Rev. A., **30**, 1386 (1984)
- [10] Deutsch, D., *Quantum theory, the Church-Turing Principle and the universal quantum computer*, Proc. R. Soc. Lond. A, 400 (1985)
- [11] Donald, M. J., Horodecki, M., Rudolph, O., *The uniqueness theorem for entanglement measures*, J. Math. Phys. **43**, 4252 (2002)
- [12] Drummond, P.D., Gardiner, C. W., *Generalized P-representations in quantum optics* 1980, *J. Phys. A*, **13**, 2353
- [13] Drummond, P. D., McNeil, K. J., Walls, D. F., *Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation. I. Semiclassical theory*, Opt. Acta **27**, 321 (1980)
- [14] Drummond, P. D., McNeil, K. J., Walls, D., F., *Non-equilibrium transitions in sub/second harmonic generation. II. Quantum theory*, Opt. Acta **28**, 211 (1981)

- [15] Duan, L., Giedke, G., Cirac, J. I., Zoller, P., *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000)
- [16] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., Phys. Rev. **47**, 777 (1935)
- [17] Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W., Weinreich, G., Phys. Rev. Lett. **7**, 118 (1961)
- [18] Gardiner, C. W., *Handbook of Stochastic Methods*, Springer 2005.
- [19] Gardiner, C. W., Collett, M. J., *Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and master equation*, Phys. Rev. A, **31**, 3761 (1985)
- [20] Griffiths, D. J., *Podstawy elektrodynamiki*, PWN, Warszawa 2005
- [21] Grosse, N. B., Bowen, W. P., McKenzie, K., Lam, P. K., *Harmonic Entanglement with Second-Order Nonlinearity*, Phys. Rev. Lett., **96**, 063601 (2006)
- [22] , P., *Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition*, Phys. Lett. A **232**, 333 (1997)
- [23] Jackson, J. D., *Elektrodynamika klasyczna*, PWN, Warszawa 1987
- [24] Kielich, S., *Molekularna optyka nieliniowa*, PWN, Warszawa 1986
- [25] Levin, R. B., Collett, M. J., Walls, D. F., *Second-harmonic generation inside a laser cavity with slowly decaying atoms*, Phys. Rev. A **47**, 2324 (1993)
- [26] Leoński, W., Miranowicz, A., *Kerr nonlinear coupler and entanglement*, J. Opt. B, **6**, S37 (2004)
- [27] Loudon, R., *The Quantum Theory of Light*, Oxford 1973
- [28] Meystre, P., Sargent III, M., *Elements of Quantum Optics*, Springer, Berlin, 1990
- [29] Milburn, G. J., *Coherence and chaos in a quantum optical system*, Phys. Rev. A **41**, 6567 (1990).
- [30] Milburn, G. J., Holmes, C. A., *Quantum coherence and classical chaos in a pulsed parametric oscillator with a Kerr nonlinearity*, Phys. Rev. A **44**, 4704 (1991)
- [31] Milburn, G. J., Walls, D. F., *Quantum Optics*, Springer, Berlin 1994
- [32] Nielsen, M. A., Chuang, I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge 2000
- [33] Peres, A., *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996)
- [34] Peřina, J., *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* D. Reidel Publishing Company, 1984.

- [35] Plenio, M. B., Virmani, S., *An introduction to entanglement measures*, arXiv:quant-ph/0504163 2006
- [36] Savage, C. M., Walls, D. F., *Optical chaos in second-harmonic generation*, Opt. Acta **30**, 557 (1983)
- [37] Serafini, A., *Decoherence & entanglement in continuous variable quantum information*, Ph.D. Thesis, University of Salerno, Italy, 2004.
- [38] Shen, Y. R., *The Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York 1985
- [39] Szlachetka, P., Grygiel, K., Bajer, J., *Chaos and order in a kicked anharmonic oscillator: Classical and quantum analysis*, Phys. Rev. E **48** (1993)
- [40] Szlachetka, P., Grygiel, K., *Chaos in Optical Systems*, in: Modern Nonlinear Optics, Part 2, vol. 119, John Wiley & Sons, 2001
- [41] Tanaś, R., *Quantum Noise in Nonlinear Optical Phenomena*, in: Modern Nonlinear Optics, Part 1, vol. 119, John Wiley & Sons, 2001
- [42] Tanaś, R., *Wykłady z optyki kwantowej*, <http://zon8.physd.amu.edu.pl/~tanas>
- [43] Tanaś, R., Ficek Z., *Entangling two atoms via spontaneous emission*, J. Opt. B **6**, S90 (2004)
- [44] Wootters, W. K., *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998)