Optymalizacja ciągła: zagadnienia na zaliczenie

- Termin: na wykładzie, w czwartek 18 kwietnia, godz. 13:30.
- Na zaliczeniu pojawią się zarówno pytania otwarte, jak i pytania zamknięte wielokrotnego wyboru.
- Proszę przynieść ze sobą kilka pustych kartek, ponieważ odpowiedzi mogą nie zmieścić się na kartce z zadaniami (oraz przydadzą się jako brudnopis)
- Można przynieść ze sobą „pomoc naukową" w postaci **jednej strony A4** zapisanej **własnoręcznie** czymkolwiek, co będzie pomocne w trakcie zaliczenia (wzory? wyprowadzenia? motywujące cytaty Paulo Coehlo?). Wielkość pisma na tej stronie nie powinna być mniesza niż jedna linijka na kratkę (0.5cm); „własnoręcznie" oznacza, że nie można nic drukować albo kopiować. Chodzi o to, abyście zapisali sobie rzeczy, których nie chcecie się uczyć na pamięć, a nie o to, abyście mikropismem przepisali treść wszystkich wykładów i laboratoriów.

Poniżej lista dowodów i wyprowadzeń, które trzeba znać na zaliczeniu (w nawiasie numer slajdu/ów):

1. **Optymalizacja funkcji jednej zmiennej**: własność funkcji jednomodalnych (17); poprawność działania metody bisekcji (32); wyprowadzenie metody Newtona (41-42).
2. **Podstawy matematyczne**: maksimum i minimum iloczynu skalarnego (8); wyprowadzenie wzoru na minimum funkcji kwadratowej (37); wielomian Taylora dla funkcji kwadratowej (41).
3. **Zbiory i funkcje wypukłe**: minimalizacja funkcji wypukłych (11-12); wypukłość maksimum (21); wypukłość funkcji kwadratowej (22); operacje zachowujące wypukłość (23-29).
4. **Metody kierunków poprawy (wykład I)**: warunki na kierunek poprawy (12); gradient jako kierunek największego wzrostu (15); gradient prostopadły do poziomic (16); twierdzenie „o zygzakowaniu" (21).
5. **Metody kierunków poprawy (wykład II)**: wyprowadzenie metody Newtona-Raphsona (6-7); metoda Newtona-Raphsona jako metoda spadkowa (13); wektory sprzężone są bazą (37); funkcja kwadratowa a wektory sprzężone (40); kierunki sprzężone kierunkami poprawy (51).
6. **Metoda stochastycznego spadku wzdłuż gradientu**: algorytm stochastycznego spadku wzdłuż gradientu dla regresji liniowej (13).

Prócz powyższych trzeba umieć:

- Liczyć pochodne cząstkowe, gradient i hesjan funkcji, mnożyć macierze, odwracać macierze małych wymiarów (lub diagonalne dowolnych wymiarów), rozumiem ideę wartości i wektorów własnych, rozumieć ortogonalność wektorów, normy wektorów, nierówność Cauchy'ego-Schwarza
- Znaleźć minimum różniczkowalnej funkcji jednej zmiennej na przedziale i sprawdzić jej wypukłość.
- Pokazać, że funkcja dwóch zmiennych jest wypukła poprzez sprawdzenie dodatniej półokreśloności hesjanu.
- Pokazać, że funkcja wielu zmiennych jest wypukła za pomocą operacji zachowujących wypukłość.
- Znać algorytmy optymalizacji jednej zmiennej: metodę przeszukiwania jednostajnego, dychotomicznego, złotego podziału, bisekcji, Newtona, rozumieć założenia i zakres ich stosowalności, zbieżności do minimum, zalety i wady, kryteria stopu.
- Wyznaczyć wielomiany Taylora dla funkcji jednej zmiennej oraz dla funkcji wielu zmiennych do 2. rzędu.
- Znać warunki konieczne i dostateczne na minimum.
- Rozumieć definicje zbioru wypukłego i funkcji wypukłej.
- Znać charakteryzację różniczkowalnych funkcji wypukłych ze względu na gradient (styczna pod wykresem) i hesjan (dodatnia półokreśloność).
- Rozumieć ideę rzędu zbieżności.
- Czytać i rozumieć wykresy konturowe.
- Rozumieć ideę metod spadkowych.
- Znać algorytmy optymalizacji wielu zmiennych: metodę spadku wzdłuż gradientu (Cauchy'ego i w wersji *backtracking*), metodę Newtona-Raphsona (klasyczną, ze zmienną długością kroku, Levenberga-Marquardta), metodę gradientów sprzężonych (w obu wersjach), rozumieć założenia i zakres ich stosowalności, zbieżności do minimum (np. poprzez wskaźnik uwarunkowania), zalety i wady.
- Znać i rozumieć algorytm stochastycznego spadku wzdłuż gradientu, w tym jego szczególną postać dla problemu regresji liniowej.