# Optymalizacja ciągła

## 0. Wprowadzenie

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

28.02.2019

# Kontakt

wojciech.kotlowski@cs.put.poznan.pl
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/mp/

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
Pokój nr 2 (CW), domofon 2936
tel. (61)665-2936

Konsultacje: piątek 15:10-16:50

Laboratoria prowadzą:

Mateusz Lango (3 grupy)
Michał Kempka (2 grupy)

# Zasady zaliczenia

Pisemny sprawdzian na ostatnim wykładzie

| % punktów | ocena |
|---|---|
| [0,50] | 2.0 |
| (50,60] | 3.0 |
| (60,70] | 3.5 |
| (70,80] | 4.0 |
| (80,00] | 4.5 |
| (90,100] | 5.0 |

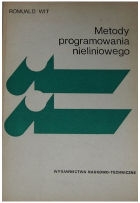
Wykłady nie są obowiązkowe i nie będzie sprawdzania obecności

Należy również zaliczyć laboratoria (obecność obowiązkowa!)

Wykład będzie silnie bazował na znajomości analizy matematycznej i algebry liniowej

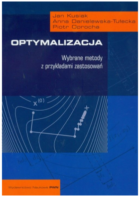
# Literatura

R. Wit
Metody Programowania Nieliniowego
WNT, 1986



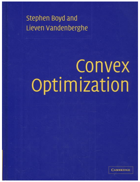

A. Stachurski
Wprowadzenie do optymalizacji
Oficyna Wyd. PW, 2009


J. Kusiak, A. Danielewska-Tułecka, P. Oprocha
Optymalizacja
PWN, 2009

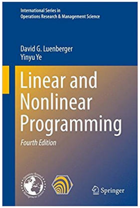


# Literatura

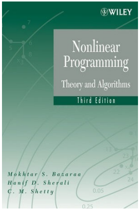
S. Boyd, L. Vandenberghe
Convex Optimization
Cambridge University Press, 2004




D. Luenberger, Y. Ye
Linear and Nonlinear Programming
Springer, 2016




M. Bazaraa, H. Sherali, C. Shetty
Nonlinear Programming: Theory and Algorithms
Willey, 2006



# Problem optymalizacji

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

# Problem optymalizacji

funkcja celu

$$\begin{aligned} &\text{minimalizuj} && f(\boldsymbol{x}) \\ &\text{przy ograniczeniach} && \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

wektor zmiennych decyzyjnych
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych

# Problem optymalizacji

funkcja celu

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{przy ograniczeniach} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

wektor zmiennych decyzyjnych
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych

- Minimalizacja bez straty ogólności, ponieważ:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \iff \max -f(\boldsymbol{x})$$

# Problem optymalizacji

funkcja celu

$$\begin{array}{rl} \text{minimalizuj} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{przy ograniczeniach} & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

wektor zmiennych decyzyjnych
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych

- Minimalizacja bez straty ogólności, ponieważ:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \iff \max -f(\boldsymbol{x})$$

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \implies$ problem optymalizacji bez ograniczeń

# Problem optymalizacji

funkcja celu

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

wektor zmiennych decyzyjnych
$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

zbiór rozwiązań dopuszczalnych

- Minimalizacja bez straty ogólności, ponieważ:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \max -f(\boldsymbol{x})$$

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n \implies$ problem optymalizacji bez ograniczeń
- $\mathcal{X}$ opisywany zwykle jako przecięcie ograniczeń równościowych i nierównościowych

# Problem optymalizacji

$$\begin{array}{rll} \text{minimalizuj} & f(\boldsymbol{x}) & \\ \text{przy ograniczeniach} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

# Problem optymalizacji

$$\begin{array}{rll} \text{minimalizuj} & f(\boldsymbol{x}) & \\ \text{przy ograniczeniach} & g_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(\boldsymbol{x}) = 0, & i = 1, \ldots, k \end{array}$$

- Bez straty ogólności nierówności typu „$\leqslant$"
- Bez straty ogólności prawe strony równe $0$

# Problem programowania liniowego

Wszystkie funkcje (celu i ograniczenia) są **liniowe**

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizuj} \quad & f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{przy ograniczeniach} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_j, && i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geqslant 0, && j = 1, \ldots, d
\end{aligned}
$$

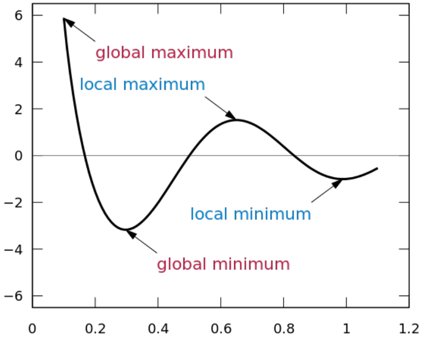
# Problem programowania liniowego

Wszystkie funkcje (celu i ograniczenia) są **liniowe**

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_j, & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geqslant 0, & j = 1, \ldots, d \end{aligned}$$

Poza zakresem wykładu

# Minima lokalne i globalne




(źródło: wikipedia)

Minima lokalne są zmorą problemów optymalizacji

Jeśli funkcja i zbiór ograniczeń są **wypukłe**, każde minimum lokalne jest minimum globalnym

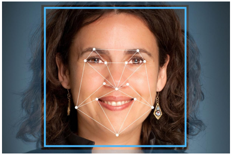
# Plan wykładu

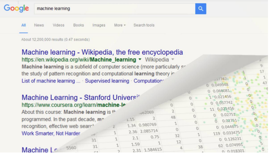
1. Optymalizacja funkcji jednej zmiennej
2. Podstawy matematyczne (algebra liniowa, wypukłość)
3. Problem optymalizacji, warunki optymalności
4. Algorytmy optymalizacji bez ograniczeń
5. Metoda stochastycznego spadku wzdłuż gradientu
6. Optymalizacja z ograniczeniami

# Do czego informatykom potrzebna optymalizacja ciągła?

Optymalizacja jest podstawą niemal wszystkich technik uczenia maszynowego i statystycznej analizy danych

# Sukcesy uczenia maszynowego


rozpoznawanie obrazów



wyszukiwanie informacji

autonomiczne pojazdy

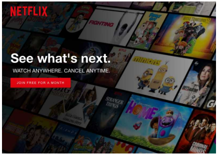
automatyczne tłumaczenie


rozpoznawanie mowy


nawigacja


inwestycje


medycyna



systemy rekomendacyjne