

# Metody Probabilistyczne: zagadnienia na egzamin

Wojciech Kotłowski

2019/2020

*Uwaga:* odnoszę się do numerów slajdów lub numerów zadania domowych w formacie *wykład typ numer*, gdzie *typ* to „s” (slajd) lub „z” (zadanie domowe); np., „2s10” oznacza „wykład nr 2, slajd nr 10”, a „7z4” oznacza „wykład nr 7, zadanie nr 4”.

Egzamin będzie się składał z **jednego zadania rozgrzewkowego** i **6 zadań głównych**. Będzie łącznie 100 punktów do zdobycia za wszystkie zadania, i od tej wartości liczone są progi zgodnie z poniższą tabelką:

punkty	ocena
91-100	5.0
81-90	4.5
71-80	4.0
61-70	3.5
51-60	3.0
0-50	2.0

Układ zadań będzie się przedstawiał następująco. **Uwaga: jedno z poniższych zadań nie wystąpi!**

1. Proste zadanie rozgrzewkowe, np. „podaj aksjomaty Kołmogorowa” albo „podaj aksjomaty Kołmogorowa”. Celem tego zadania jest polepszenie Państwa nastroju przy rozwiązywaniu dalszych zadań.
2. Zadanie przygotowywane przez dr. Jędrzeja Potońca, dotyczące tematyki prawdopodobieństw warunkowych, twierdzenia Bayesa, zliczenia prawdopodobieństw całkowitych, niezależności, być może również określenia przestrzeni probabilistycznej i zapisania pewnych zdarzeń.
3. Zadanie przygotowywane przez dr. Jędrzeja Potońca dotyczące zmiennych losowych *dyskretnych*, np. określenia rozkładu zmiennej, policzenia wartości oczekiwanej, wariancji, dystrybuanty, odpowiedzi na pytania o prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, itp.
4. Zadanie, które będzie obejmować elementy kombinatoryki oraz liczenie wartości oczekiwanych. Będzie to połączenie zadań typu 1z3, 1z4, 1z5 z zadaniami typu 8z3, 8z4, 8z5 (patrz również zadania w 8s5-8s10). Alternatywnie, zadanie może zawierać element dotyczący liczenia warunkowej wartości oczekiwanej, podobnie jak np. w zadaniach 7s15, 7s20, 7s21, 7z3, 7z4, lub przybliżenie rozkładem Poissona (jak w 5s37 lub 5z7). Istotne będzie wypisanie wszystkich zmiennych losowych i staranne wskazanie z jakiego prawa/wzoru się korzysta przy liczeniu! (np. z prawa 7s18 lub 8s4)
5. Udowodnienie któregoś z twierdzeń/własności przedstawionych na wykładzie (lub wydelegowanych do zrobienia w domu) z poniższej listy wybranych najciekawszych zagadnień:
  - Pokazanie, że  $\sigma$ -ciało jest zamknięte operacje teoriomnogościowe: 2s12, 2s13 i 2s14/2z2
  - Dowód wzoru na prawdopodobieństwo sumy (2s22) i wynikającej z niego nierówności 2s24 (i/lub 2z5)
  - Wyprowadzenie wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (3s18) i/lub twierdzenia Bayesa (3s24)
  - Wykazanie braku pamięci rozkładu geometrycznego (5s32) i/lub wykładniczego (9s12)
  - Udowodnienie wzoru na wartość oczekiwaną funkcji zmiennej losowej (6s23/6z4) i udowodnienie na jego podstawie własności liniowości wartości oczekiwanej (6s24)
  - Dowód nierówności Markowa (6s45) i udowodnienie na jej podstawie nierówności Czebyszewa (6s46)
  - Dowód addytywności wartości oczekiwanej dla dwóch zmiennych losowych (8s3) i rozszerzenie go na  $n$  zmiennych losowych (8s4, 8z2)
  - Wybrany dowód/dowody twierdzeń dotyczących wariancji: wzoru „skróconego mnożenia” (6s35), prawa skalowania wariancji (6s40), wzoru skróconego mnożenia dla kowariancji (s814), wzoru na wariancję sumy i różnicy zmiennych losowych (8s17), wzoru na wartość oczekiwaną iloczynu zmiennych niezależnych (8s27, 8s28/8z7 i wniosek 8s29), wariancję sumy/różnicy zmiennych niezależnych (8s30) z rozszerzeniem na  $n$  zmiennych (8s31/8z8). Należy rozumieć zależności między tymi faktami (co z czego wynika).

- Dowód słabego prawa wielkich liczb Chińczyzna (11s11-11s14) wychodząc z nierówności Czebyszewa
- Elementy dowodu Centralnego Twierdzenia Granicznego: 12s26 i/lub 12s27 i/lub 12s30-12s31

*Uwaga:* Aby zniechęcić Państwa do uczenia się dowodów na pamięć, może pojawić się pewna modyfikacja twierdzeń (wymagająca wprowadzenia odpowiedniej modyfikacji w dowodzie) lub dodatkowe pytanie sprawdzające zrozumienie.

- Zadanie dotyczące zmiennych losowych *ciągłych*, np. wyznaczenie rozkładu pewnej zmiennej losowej (być może korzystając z przekształcenia gęstości 9s18, 9s19, 9z4), obliczenie normalizacji gęstości (jak w 9z1), policzenia rozkładów brzegowych i warunkowych (jak w 10s6, 10s7, 10z1, 10z2), policzenia maksimum (jak w 10z17), wyznaczenie dystrybuanty z gęstości lub gęstości z dystrybuanty, lub policzenia czegoś w modelu geometrycznym (np. 1s29, 1z6, 1z7). Ponieważ w którymś momencie pojawi się zapewne całka, wzór na całkę zostanie wypisany w treści zadania jako przypomnienie.
- Zadanie dotyczące obliczenia prawdopodobieństw z rozkładu normalnego, ewentualnie używając uprzednio przybliżenia Centralnym Twierdzeniem Granicznym: 9z11 i 12s9/12z2 (proszę zwrócić uwagę, że wszystkie te zadania opierają się na jednym schemacie ustandaryzowania zmiennej losowej i zapisania wyniku w postaci dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego).
- Zadanie dotyczące statystyki matematycznej: może to być np. sprawdzenie cech estymatora (zgodność, nieobciążoność, minimalna wariancja z tw. Craméra-Rao, relacja efektywności – porównaj przykłady 13z2, 13s18, 13s25, 13z4, 13s28-13s29, 13s30) lub policzenie estymatora przedziałowego (jak np. w 14s10, 14s14, 14s21). W zadaniu pojawią się na pewno elementy testujące zrozumienie tematu.

Zadania nie będą punktowane równo, ponieważ będą różniły się pracochłonnością. W szczególności, zadania 2 i 3 (J. Potońca) będą najobszerniejsze. Czas pisania egzaminu to 2 godziny zegarowe.

*Uwaga:* Jeśli są Państwo ciekawi, jak wyglądał egzamin rok temu, przykładowy arkusz dla jednej z grup znajduje się [pod tym adresem](#). W zeszłym roku było zadanie rozgrzewkowe, 7 zadań podstawowych i jedno dodatkowe, co spowodowało znaczne przekroczenie czasu pisania. W tym roku zadań będzie więc mniej.