Imię i nazwisko: .... Nr indeksu: ....

Metody probabilistyczne – egzamin poprawkowy

Data: 13.02.2019 Godzina: 09:00

Zadanie 1 [8pkt]

Podaj aksjomaty Kołmogorowa dla miary prawdopodobieństwa P zdefiniowanej na σ-ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Odpowiedz zwięźle, bez rozpisywania się. Odpowiedź: wykład 2, slajd 13

Zadanie 2 [18pkt]

W Leśnym Pałacu kupuje się w beczkach nie tylko jabłka. Przypływa w nich również, z dalekich krajów, specjalne, bardzo kosztowne wino przeznaczone wyłącznie dla Króla Elfów. Jedna beczka kosztuje aż 300 złotych monet, nie dziw więc, że elfowie kupili tylko 21 beczek. Ponieważ beczki musiały daleko podróżować w upale, więc wino miało dużo czasu, żeby zamienić się w ocet. Zawartość każdej beczki, niezależnie od innych, przefermentowała w ocet z prawdopodobieństwem $\frac{6}{11}$. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę beczek, w których zamiast wina znajduje się ocet, a Y wartość poniesionej w ten sposób straty (wartość uzyskanego octu jest pomijalnie mała).

(a) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. [2pkt]

$$P(X=k) = \binom{21}{k}\left(\frac{6}{11}\right)^{k}\left(\frac{5}{11}\right)^{21-k} \qquad k \in \{0,1,\ldots,21\}$$

(b) Oblicz wartość średnią i odchylenie standardowe zmiennej losowej X. [2pkt]

$$EX = \frac{21\cdot 6}{11} = \frac{126}{11} \approx 11{,}45 \qquad DX = \sqrt{21\cdot\frac{6}{11}\frac{5}{11}} = \frac{\sqrt{630}}{11} \approx 2{,}28$$

(c) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba beczek z octem? [4pkt] $(n+1)p = 12$ jest całkowite, zatem są dwie takie wartości: 11 oraz 12

(d) Podaj funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y. [2pkt]

$$P(Y = 300k) = P(X=k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,21\}$$

(e) Oblicz średnią wartość starty. [2pkt]

$$EY = 300EX = \frac{37800}{11} \approx 3436$$

(f) Oblicz wariancję zmiennej losowej Y. [4pkt]

$$D^2Y = 300^2 D^2X = \frac{300^2\cdot 630}{11^2} = \frac{56\,700\,000}{121} \approx 468595$$

(g) Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość straty? [2pkt] To jest przeskalowany rozkład dwumianowy, wystarczy zatem pomnożyć najbardziej prawdopodobną liczbę beczek z octem przez wartość beczki: $11\cdot 300 = 3300$ oraz $12\cdot 300 = 3600$

Zadanie 3 [18pkt]

Niezadowoleni z olbrzymich start elfowie w Leśnym Pałacu opracowali magiczną różdżkę, która zanurzona w beczce wina potrafi, z pewnym prawdopodobieństwem, przewidzieć czy wino fermentuje w ocet i niedługo stanie się niezdatne do spożycia. Mianowicie, obserwacje w jednym roku wykazały, że różdżka niepoprawnie określa fermentujące w ocet wino jako zdatne do dalszego przechowywania w trzech przypadkach na siedem, a zdatne do dalszego przechowywania wino jako fermentujące w ocet w czterech przypadkach na pięć. Zawartość każdej beczki, niezależnie od innych, fermentuje w ocet z prawdopodobieństwem $\frac{6}{11}$.

(a) Przypisz symbole następującym zdarzeniom i wykorzystaj podczas dalszego rozwiązywania zadania: [1pkt]

- zawartość beczki fermentuje w ocet; F
- beczka jest zdatna do dalszego przechowywania; F'
- różdżka wskazała, że zawartość beczki fermentuje w ocet. R

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *zawartość beczki fermentuje w ocet*, a jakie, że *beczka jest zdatna do dalszego przechowywania*? [1pkt]

$$P(F) = \frac{6}{11} \qquad P(F') = \frac{5}{11}$$

(c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *różdżka wskazała, że zawartość beczki fermentuje w ocet* pod warunkiem, że *zawartość beczki fermentuje w ocet*? [2pkt]

$$P(R|F) = 1 - P(R'|F) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

(d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *różdżka wskazała, że zawartość beczki fermentuje w ocet* pod warunkiem, że *beczka jest zdatna do dalszego przechowywania*? [2pkt]

$$P(R|F') = \frac{4}{5}$$

(e) Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia *różdżka wskazała, że zawartość beczki fermentuje w ocet*? [4pkt]

$$P(R) = P(R|F)P(F) + P(R|F')P(F') = \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{11} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{52}{77}$$

Elfowie zanurzyli różdżkę w jednej z beczek i stwierdzili, że *różdżka wskazała, że zawartość beczki fermentuje w ocet.*

(f) Biorąc pod uwagę wskazanie różdżki jakie jest prawdopodobieństwo, że *zawartość beczki fermentuje w ocet*? [4pkt]

$$P(F|R) = \frac{P(R|F)P(F)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{52}{77}} = \frac{24}{52}$$

(g) Biorąc pod uwagę wskazanie różdżki jakie jest prawdopodobieństwo, że *beczka jest zdatna do dalszego przechowywania*? [2pkt]

$$P(F'|R) = 1 - P(F|R) = \frac{28}{52}$$

(h) Czy elfowie powinni zostawić beczkę do dalszego przechowywania czy raczej przeznaczyć jej zawartość do bezpośredniego spożycia? Odpowiedź uzasadnij. [2pkt] Ze wskazań różdżki wynika, że zawartość raczej jest zdatna do dalszego przechowywania niż fermentuje ($P(F'|R) > P(F|R)$).

Zadanie 4 [14pkt]

W restauracji jest 5 dużych stolików (mieszczących dowolną liczbę gości). Do restauracji wchodzi 10 gości i siada przy losowo wybranych stolikach. Oblicz (uzasadniając wynik):

(a) Prawdopodobieństwo zdarzenia A, że dany (np. pierwszy) stolik będzie pusty [3pkt]

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich możliwych przydziałów (rozróżnialnych) gości do (rozróżnialnych) stolików. Mamy $|\Omega| = 5^{10}$, bo każdy z gości może wybrać jeden z 5 stolików (wariacja z powtórzeniami). Dostajemy też $|A| = 4^{10}$, bo każdy z gości może teraz wybrać dowolny stolik *poza pierwszym*. Czyli $P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$.

(b) Prawd. zdarzenia B, że wszyscy goście usiądą przy jednym stoliku [2pkt]

$|B| = 5$, bo tyle jest sposobów przydziału wszystkich pasażerów do jednego stolika (tyle, ile stolików). Czyli $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{5^9}$

(c) Prawd. zdarzenia C, że przy każdym stoliku usiądzie po 2 gości. [3pkt]

Możemy ustawić gości w dowolną permutację i przyporządkować im po kolei numerki stolików $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5$. Daje to $10!$ sposobów, ale ponieważ podmiana kolejności gości siedzących przy tym samym stoliku nie zmienia konfiguracji przydziału, musimy to jeszcze podzielić przez 2^5, czyli $|C| = \frac{10!}{2^5}$, a stąd: $P(C) = \frac{10!}{2^5 5^{10}}$

(d) Oczekiwaną liczbę pustych stolików. *Uwaga*: wykorzystaj addytywność wartości oczekiwanej, wyraźnie zdefiniuj odpowiednie zmienne losowe! [6pkt]

Niech zmienna losowa $X_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, 5$, określa czy i-ty stolik jest pusty. Z punktu (a) mamy $P(X_i = 1) = EX_i = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$. Zauważmy teraz, że zmienna $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_5$ jest sumaryczną liczbą pustych stolików.

$$EY = E(X_1 + X_2 + \dots + X_5) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_5 = 5\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

Zadanie 5 [14pkt]

Niech $X \sim G_0(p)$ określa *liczbę porażek do uzyskania pierwszego sukcesu*, $P(X = k) = (1-p)^k p$.

(a) Oblicz prawdopodobieństwo $P(X \geqslant k)$ dla dowolnego $k = 0, 1, 2, \dots$. [7pkt]

$$P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{\infty} P(X = k) = \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i p = (1-p)^k p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = (1-p)^k p \frac{1}{p} = (1-p)^k$$

(b) Wykaż własność braku pamięci tego rozkładu, tzn. pokaż że $P(X \geqslant k + \ell | X \geqslant k) = P(X \geqslant \ell)$ dla dowolnych $k, \ell = 0, 1, 2, \dots$ [7pkt].

$$P(X \geqslant k+\ell | X \geqslant k) = \frac{P(\{X \geqslant k+\ell\} \cap \{X \geqslant k\})}{P(\{X \geqslant k\})} = \frac{P(\{X \geqslant k+\ell\})}{P(\{X \geqslant k\})}$$
$$= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = P(X \geqslant \ell)$$

Zadanie 6 `[14pkt]`

Profesor Kowalski ocenia egzaminy używając ciągłej skali od 0 do 1. Okazuje się, że wynik losowego egzaminu jest dobrze modelowany ciągłą zmienną losową $X \in [0,1]$ o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,1] \end{cases}$$

(a) Wyznacz stałą normalizacyjną rozkładu c. `[3pkt]`

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx(1-x)\,\mathrm{d}x = c\left(\int_0^1 x - \int_0^1 x^2\right) = c\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{c}{6},$$

stąd $c = 6$.

(b) Wyznacz wartość oczekiwaną EX. `[4pkt]`

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 6\int_0^1 x^2 - 6\int_0^1 x^3 = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 6\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(c) Wyznacz wariancję $D^2(X)$. *Wskazówka*: użyj wzoru skróconego mnożenia dla wariancji. `[4pkt]`

Ponieważ $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - \frac{1}{4}$, pozostaje policzyć $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6\int_1^{\infty} x^3(1-x)\,\mathrm{d}x = 6\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - 6\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{6}{20}$$

Czyli wariancja wynosi $\frac{1}{20}$.

(d) Ocenę niedostateczną otrzymuje się przy punktacji poniżej 0.5. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania takiej oceny `[3pkt]`

Bezpośrednio z symetrii rozkładu można zauważyć, że $P(X < 0.5) = P(X > 0.5)$, co oznacza, że $P(X < 0.5) = \frac{1}{2}$. Można to też policzyć:

$$P(X < 0.5) = 6\int_0^{0.5} x(1-x)\,\mathrm{d}x = 6\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.5} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0.5}\right) = 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = 6\frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Wskazówka: do policzenia wszystkich punktów wystarczy znajomość jednej całki:

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x| & \text{dla } \alpha = -1 \\ \frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1} & \text{dla } \alpha \neq -1. \end{cases}$$

Zadanie 7 `[14pkt]`

Oficjalna waga popularnego telefonu o nazwie iNorm wynosi 205 gramów. Z powodu drobnych różnic gęstości materiałów użytych w produkcji, faktyczna waga tego urządzenia różni się nieznacznie od tej wartości i może być modelowana jako zmienna losowa X o rozkład normalnym z wartością oczekiwaną 205 g i odchyleniem standardowym 1.5 g. Odpowiedz na poniższe pytania, wyniki wpierw przedstawiając za pomocą wyrażeń zawierających dystrybuantę standardowego rozkład normalnego $\Phi(x)$, a następnie podaj konkretne wyniki liczbowe korzystając z (niektórych z) następujących wartości: $\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(2) = 0.977$, $\Phi(3) = 0.999$, $\Phi(4) = 0.99996$. **Uwaga:** w obliczeniach użyj symbolu $Z \sim N(0, 1)$ na oznaczenie zmiennej o rozkładzie standardowym normalnym.

(a) Jaka jest szansa, że waga losowo wybranego telefonu iNorm będzie różniła się od oficjalnej o *mniej niż 3 gramy*? `[7pkt]`

Trzeba policzyć prawdopodobieństwo zdarzenia $\{205 - 3 < X < 205 + 3\}$. Ponieważ $X \sim N(205, 1.5^2)$ to $Z = \frac{X-205}{1.5} \sim N(0, 1)$. Mamy:

$$P(202 < X < 208) = P\left(\frac{202-205}{1.5} < \frac{X-205}{1.5} < \frac{208-205}{1.5}\right) = P(-2 < Z < 2)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0.977 - 1 = 0.954$$

(b) Jasio kupił telefon iNorm z niepewnego źródła i stwierdził, że jego waga wynosi tylko 199 g. Zaniepokojony, czy telefon jest na pewno oryginalną produkcją, chciałby poznać prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowy wybrany (oryginalny) iNorm będzie miał wagę *mniejszą bądź równą od 199 g*. Pomóż Jasiowi to policzyć. `[7pkt]`

$$P(X \leqslant 199) = P\left(\frac{X-205}{1.5} \leqslant \frac{199-205}{1.5}\right) = P(Z \leqslant -3) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 0.00004$$