Imię i nazwisko: .... Nr indeksu: ....

Metody probabilistyczne – egzamin

Data: 30.01.2019 Godzina: 13:00

Zadanie 1 [8pkt]

Podaj aksjomaty Kołmogorowa dla miary prawdopodobieństwa P zdefiniowanej na σ-ciele zdarzeń $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$. Odpowiedz zwięźle, bez rozpisywania się. Odpowiedź: wykład 2, slajd 18

Zadanie 2 [16pkt]

Świetnie prosperujące kasyno z Bree otworzyło filię w Staddle, w której wprowadziło zupełnie nową, nietypową grę. Gracz rozpoczyna grę z 1 punktem, a gra toczy się dokładnie 5 rund. W każdej rundzie gracz i krupier rzucają kostką: gracz zwykłą, uczciwą kostką sześciościenną, natomiast krupier uczciwą kostką sześciościenną na której dwa razy występuje cyfra 1, dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 3, nie ma natomiast cyfr od 4 w górę. Runda jest określana jako zwycięska, jeżeli gracz i krupier wyrzucą na kostkach tę samą wartość. W każdej zwycięskiej rundzie liczba punktów gracza jest podwajana. Kasyno wypłaca nagrody wg przelicznika: 1 punkt = 1 srebrna moneta. Niech zmienna losowa N oznacza liczbę zwycięski rund, a zmienna losowa W liczbę punktów gracza po rozegraniu wszystkich rund, tj. wysokość wypłaconej nagrody.

(a) W każdej rundzie, jakie jest prawdopodobieństwo, że runda okaże się zwycięska? [2pkt] $\frac{1}{6}$, bo takie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia takiej samej wartości jak ustalony wynik krupiera

(b) Podaj nazwę i parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej N. [2pkt] Rozkład dwumianowy $B(5, \frac{1}{6})$

(c) Oblicz średnią liczbę zwycięskich rund. [1pkt]

$$EN = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(d) Podaj, w formie funkcji prawdopodobieństwa, rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej W. [2pkt]

$$P(W = 2^k) = P(N = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{5-k} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

(e) Oblicz średnią liczbę punktów, które zdobędzie gracz w ciągu gry. [4pkt] To niestety jest trochę pracochłonne

$$EW = 1 \cdot \frac{5^5}{6^5} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{5^4}{6^5} + 4 \cdot 10 \cdot \frac{5^3}{6^5} + 8 \cdot 10 \cdot \frac{5^2}{6^5} + 16 \cdot 5 \cdot \frac{5}{6^5} + 32 \cdot \frac{1}{6^5} = \frac{16807}{6^5} \approx 2{,}1614$$

(f) Ile minimalnie srebrnych monet kasyno musi pobierać jako opłatę za przystąpienie do gry, żeby z prawdopodobieństwem przynajmniej 90% gracz stracił na grze? Odpowiedź uzasadnij. [3pkt] Wykorzystujemy prawdopodobieństwa obliczone w poprzednim punkcie i obserwujemy, że

$$P(W \leqslant 4) = P(N \leqslant 2) = \frac{5^5}{6^5} + \frac{5 \cdot 5^4}{6^5} + \frac{10 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{7500}{6^5} \approx 0{,}965$$

Podczas gdy

$$P(W \leqslant 2) = P(N \leqslant 1) = \frac{5^5}{6^5} + \frac{5 \cdot 5^4}{6^5} = \frac{6250}{6^5} \approx 0{,}804$$

Zatem kasyno musi pobierać przynajmniej 4 srebrne monety jako opłatę za grę

(g) Ile minimalnie srebrnych monet kasyno musi pobierać jako opłatę za przystąpienie do gry, żeby długoterminowo nie stracić na prowadzeniu gry? [2pkt] Co najmniej tyle co średnia wartość wygranej EW

Zadanie 3 [16pkt]

Niestety, kasyno w Staddle od samego początku ma duży problem: do szefa kasyna zgłosił się jeden z graczy, który twierdzi, że używane przez kasyno kostki są zaczarowane. Gracz mianowicie twierdzi, że na każdej z pięciu kostek sześciościennych (o standardowo numerowanych ściankach: 1, 2, ..., 6) 6-tka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{5}{6}$. Szef odpowiedział na to: *na 99% nasze kostki są uczciwe ...*

(a) Przypisz symbole następującym zdarzeniom i wykorzystaj podczas dalszego rozwiązywania zadania: [1pkt]

- kostki są uczciwe; H_1
- kostki są nieuczciwe; H_2
- wypadły cztery 6-tki i jeden inny wynik w jednoczesnym rzucie wszystkimi pięcioma kostkami. E

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *kostki są uczciwe*, a jakie, że *kostki są nieuczciwe*? [1pkt]

$$P(H_1) = \frac{99}{100} \qquad P(H_2) = \frac{1}{100}$$

(c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *wypadły cztery 6-tki i jeden inny wynik* pod warunkiem, że *kostki są uczciwe*? [2pkt]

$$P(E|H_1) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5^2}{6^5}$$

(d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że *wypadły cztery 6-tki i jeden inny wynik* pod warunkiem, że *kostki są nieuczciwe*? [2pkt]

$$P(E|H_2) = \binom{5}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{5^5}{6^5}$$

(e) Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia *wypadły cztery 6-tki i jeden inny wynik*? [3pkt]

$$P(E) = P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) = \frac{5^2}{6^5}\frac{99}{100} + \frac{5^5}{6^5}\frac{1}{100} = \frac{5^2 \cdot 224}{6^5 \cdot 100}$$

...po czym rzucił jednocześnie wszystkimi pięcioma kostkami i wyrzucił cztery 6-tki oraz jeden inny wynik.

(f) Biorąc pod uwagę wynik rzutu jakie jest prawdopodobieństwo, że *kostki są uczciwe*? [4pkt]

$$P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{P(E)} = \frac{5^2 \cdot 99}{5^2 \cdot 224} = \frac{99}{224} \approx 44\%$$

(g) Biorąc pod uwagę wynik rzutu jakie jest prawdopodobieństwo, że *kostki są nieuczciwe*? [1pkt]

$$P(H_2|E) = 1 - P(H_1|E) = \frac{125}{224} \approx 56\%$$

(h) Czy gracz powinien przyjąć do wiadomości zapewnienia szefa czy raczej drążyć temat? Odpowiedź uzasadnij. `[2pkt]` Raczej drążyć temat, ponieważ $P(H_2|E) > P(H_1|E)$, a więc dowody (słabo!) przemawiają za H_2.

Zadanie 4 `[13pkt]`

Rzucamy N razy kostką (załóż $N \geqslant 2$), uzyskując w ten sposób ciąg N cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia A, że żadne sąsiadujące cyfry się nie powtarzają (np. dla $N = 7$ ciąg $1, 4, 2, 5, 6, 4, 1$ ma taką własność, a ciąg $3, 4, 2, 2, 5, 6, 1$ nie ma). Zrób to starannie: zdefiniuj Ω, wyznacz $|\Omega|$, $|A|$ i oblicz prawdopodobieństwo z modelu klasycznego. `[6pkt]`

Ω można zdefiniować jakie wszystkie możliwe ciągi o długości N złożone z cyfr z $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, czyli $|\Omega| = 6^N$. Ciągi sprzyjające zdarzeniu A mają dowolną pierwszą cyfrę, a każda kolejna może zostać wybrana tylko z pięciu możliwych (ponieważ jedna – równa poprzedniej – jest zabroniona). Czyli $|A| = 6 \cdot 5^{N-1}$, a stąd $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}$.

(b) Oblicz wartość oczekiwaną liczby dwucyfrowych liczb (złożonych z sąsiadujących cyfr), które są podzielne przez 3. *Przykład*: przy $N = 5$ i ciągu $2, 4, 1, 5, 3$ dostajemy liczby $24, 41, 15, 53$, z których pierwsza i trzecia są podzielne przez 3. *Uwaga*: Wykorzystaj addytywność wartości oczekiwanej, wyraźnie zdefiniuj odpowiednie zmienne losowe! *Wskazówka*: liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3. `[7pkt]`

Niech zmienna losowa $X_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, N-1$, określa czy dwucyfrowa liczba zaczynająca się na pozycji i jest podzielna przez 3 ($X_i = 1$), czy nie jest podzielna przez 3 ($X_i = 0$). Na 36 możliwych dwucyfrowych liczb $11, 12, \ldots, 65, 66$ mamy 12 liczb podzielnych przez 3:
$12, 15, 21, 24, 33, 36, 42, 45, 51, 54, 63, 66$. Stąd otrzymujemy $EX_i = P(X_i = 1) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.
Zauważmy teraz, że zmienna $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N-1}$ jest sumaryczną liczbą dwucyfrowych liczb podzielnych przez 3. Tym samym:

$$EY = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{N-1}) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{N-1} = \frac{N-1}{3}$$

Zadanie 5 `[11pkt]`

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Niech $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ będzie średnią arytmetyczną z pierwszych n zmiennych.

(a) Udowodnij, że $E(\overline{X}_n) = \mu$ oraz $D^2(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, wyraźnie zaznaczając z jakich praw korzystasz `[6pkt]`.

(b) Na podstawie nierówności Czebyszewa i wyników z poprzedniego punktu udowodnij słabe prawo wielkich liczb Chińczyna, tzn. że dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \;=\; 1 \qquad\qquad \texttt{[5pkt]}$$

Odpowiedź znajduje się na slajdach 11-14 wykładu nr 11.

Zadanie 6 `[12pkt]`

Czas oczekiwania na wynik zapytania do bazy danych (w milisekundach) dobrze modelowany jest ciągłą zmienną losową X o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3} & \text{dla } x > 1 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 1 \end{cases}$$

(proszę zauważyć, że czas wynosi zawsze co najmniej 1ms, ale może być znacznie dłuższy)

(a) Wyznacz stałą normalizacyjną rozkładu c. `[3pkt]`

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} cx^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{-2}x^{-2}\Big|_1^{\infty} = \frac{c}{2},$$

stąd $c = 2$.

(b) Wyznacz wartość oczekiwaną EX. `[3pkt]`

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{\infty} xx^{-3}\,\mathrm{d}x = -2x^{-1}\Big|_1^{\infty} = 2.$$

(c) Wyznacz wariancję $D^2(X)$. *Wskazówka*: użyj wzoru skróconego mnożenia dla wariancji. `[3pkt]`

Ponieważ $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - 4$, pozostaje policzyć $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{1}^{\infty} x^2x^{-3}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x|\Big|_1^{\infty} = \infty$$

Czyli wariancja jest nieskończona.

(d) Oblicz prawdopodobieństwo, że czas zgłoszenia będzie dłuższy niż 10 milisekund. `[3pkt]`

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{10}^{\infty} x^{-3}\,\mathrm{d}x = -x^{-2}\Big|_{10}^{\infty} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

Wskazówka: do policzenia wszystkich punktów wystarczy znajomość jednej całki:

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x| & \text{dla } \alpha = -1 \\ \frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1} & \text{dla } \alpha \neq -1. \end{cases}$$

Zadanie 7 `[12pkt]`

Iloraz inteligencji (IQ) został zaprojektowany w ten sposób, aby rozkład tej cechy w całej populacji był rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej $\mu = 100$ i odchyleniu standardowym $\sigma = 15$. Czyli jeśli X to zmienna losowa opisująca IQ osoby wybranej losowo z populacji, to $X \sim N(100, 15^2)$. Odpowiedz na poniższe pytania, wyniki wpierw przedstawiając za pomocą wyrażeń zawierających dystrybuantę standardowego rozkład normalnego $\Phi(x)$, a następnie podaj konkretne wyniki liczbowe korzystając z (niektórych z) następujących wartości: $\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(2) = 0.977$, $\Phi(3) = 0.999$.

(a) Małgosia zrobiła test inteligencji uzyskując IQ $= 145$. Jaka część populacji jest bardziej inteligentna od Małgosi? Wpierw przedstaw „cześć populacji inteligentniejszą od Małgosi” jako prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia dotyczącego zmiennej losowej X, a następnie oblicz to prawdopodobieństwo.

Część populacji inteligentniejsza od Małgosi to dokładnie prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z populacji osoba będzie miała IQ wyższe, niż 145, tzn. $P(X > 145)$. Skoro $X \sim N(100, 15^2)$ to $Z = \frac{X-100}{15} \sim N(0,1)$, więc:

$$P(X > 145) = P\left(\frac{X-100}{15} > \frac{145-100}{15}\right) = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0.001$$

(b) Wyznacz jaka część populacji ma IQ pomiędzy 65 a 115.

Tu wkradł się błąd: powinno być 70 zamiast 65. Wtedy część populacji z IQ pomiędzy 70 a 115 jest równa $P(70 \leqslant X \leqslant 115)$. Przekształcając

$$P(70 \leqslant X \leqslant 115) = P\left(\frac{70-100}{15} \leqslant \frac{X-100}{15} \leqslant \frac{115-100}{15}\right) = P(-2 \leqslant Z \leqslant 1)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) = 0.841 - 0.023 = 0.818$$

Można było też zostawić 65, ale wtedy w wyniku otrzymujemy $P(-\frac{35}{15} \leqslant Z \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(-\frac{7}{3})$, i tego drugiego wyniku nie ma wśród wymienionych, więc trzeba to tak zostawić. **Oczywiście uznam oba podejścia**.

Zadanie 8 [12pkt]

Jaś staje przed zadaniem estymacji nieznanej wartości oczekiwanej $\mu = EX$ czasu życia baterii montowanej w samochodach elektrycznych z próby $X_1, \ldots, X_n$. Ponieważ słyszał wcześniej, że czas życia takich baterii wynosi ok. 8 lat, postanawia użyć następującego estymatora:

$$\widehat{\mu} \;=\; \alpha \cdot 8 \;+\; (1-\alpha) \cdot \overline{X}_n, \qquad \text{dla } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

gdzie $\alpha \in [0,1]$ jest współczynnikiem określającym przetarg między tym, co Jasiu uzyska z próby, a tym co wiedział wcześniej. W szczególności, $\alpha = 0$ daje standardowy estymator wartości oczekiwanej.

(a) Wyznacz obciążenie estymatora $\widehat{\mu}$, tzn. $E\widehat{\mu} - \mu$. Czy estymator jest obciążony? [5pkt]

Policzymy wartość oczekiwaną:

$$E[\widehat{\mu}] = 8\alpha + (1-\alpha)E[\overline{X}_n] = 8\alpha + \mu(1-\alpha)$$

Obciążenie wynosi więc $E[\widehat{\mu}] - \mu = (8-\mu)\alpha$.

(b) Wyznacz wariancję tego estymatora, $D^2(\widehat{\mu})$. W obrębie wyniku powinna się pojawić wariancja rozkładu $\sigma^2 = D^2(X)$. [5pkt]

Zgodnie z prawem skalowania wariancji $D^2(aY+b) = a^2 D^2(Y)$. Przyjmując za $Y = \overline{X}_n$, $b = 8\alpha$ i $a = 1-\alpha$ mamy:

$$D^2(\widehat{\mu}) = (1-\alpha)^2 D^2(\overline{X}_n) = (1-\alpha)^2 \frac{\sigma^2}{n}.$$

(c) Jakość estymatorów, również tych obciążonych, można ogólnie mierzyć za pomocą tzw. błędu kwadratowego estymatora, zdefiniowanego jako:

$$\text{błąd kwadratowy } = (\text{obciążenie})^2 \;+\; \text{wariancja}.$$

Na podstawie poprzednich wyników wyznacz błąd kwadratowy estymatora $\widehat{\mu}$ i określ czy poszczególne człony (kwadrat obciążenia i wariancja) rosną czy maleją z wartością α? W jakiej sytuacji duża wartość parametru α (znacząco większa od zera) byłaby wskazana? [2pkt]

Błąd wynosi $\alpha^2(8-\mu)^2 + (1-\alpha)^2\frac{\sigma^2}{n}$. Kwadrat obciążenia rośnie więc z α (za wyjątkiem sytuacji gdy $\mu = 8$), natomiast wariancja maleje z α. Jeśli prawdziwa wartość μ jest blisko 8 (czyli Jasio trafiłby ze swoim początkowym oszacowaniem), to zapewne warto wziąć większą wartość α, ponieważ zmniejszy to wariancję, a obciążenie i tak jest małe. Oczywiście nie znamy prawdziwej wartości μ (bo po co byśmy ją wtedy estymowali), więc nie jesteśmy w stanie tego określić a priori.
Dla dociekliwych (ale nie trzeba było tego robić!): zakładając, że znamy μ i σ^2 możemy znaleźć minimum błędu, przyrównując jego pochodną po α do zera:

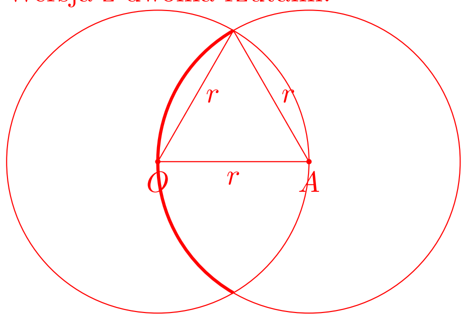
$$2\alpha(8-\mu)^2 - 2(1-\alpha)\frac{\sigma^2}{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n} + (8-\mu)^2}$$

Zadanie 9* (nadobowiązkowe i bardzo trudne!!) `[15pkt]`

Pijany golfista jednym uderzeniem kija posyła piłeczkę w losowym kierunku (kąt wybrany jednostajnie na okręgu) na odległość 10 metrów. Oblicz prawdopodobieństwo, że po trzech uderzeniach piłeczka znajduje się nie dalej niż 10 metrów od pozycji startowej. *Uwaga:* możesz rozwiązać prostszą wersję zadania i policzyć prawdopodobieństwo zajścia powyższego po dwóch uderzeniach `[7pkt]`.

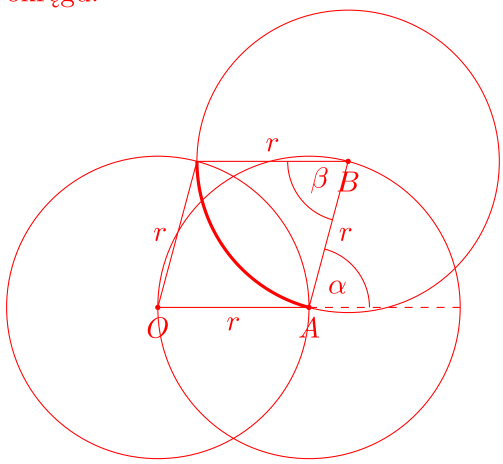
Niech pozycja startowa to punkt O, po pierwszym rzucie jesteśmy w punkcie A, po drugim w B, po trzecim w C. Niech $r = 10$ (odległość rzutu).

- Wersja z dwoma rzutami:



  Wystarczy zauważyć, że punkt B (miejsce piłeczki po dwóch rzutach) będzie w odległości nie dalszej niż r od punktu O wtedy i tylko wtedy, gdy znajdzie się na pogrubionym łuku. A więc prawdopodobieństwo tego zdarzenia to stosunek długości pogrubionego łuku do obwodu całego okręgu. Ponieważ długość kątowa łuku równa jest podwojonej długości kąta w narysowanym trójkącie równobocznym, mamy więc długość łuku równą $\frac{2}{3}\pi r$ (kąt 120). A więc prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$, bo obwód okręgu to $2\pi r$.

- Wersja z trzema rzutami: Niech α określa kąt pod jakim została rzucona piłka w drugim rzucie w stosunku do kąta w pierwszym rzucie. Z symetrii ten kąt został wybrany jednostajnie na okręgu.



  Punkt C (miejsce piłeczki po trzech rzutach) będzie w odległości nie dalszej niż r od punktu O wtedy i tylko wtedy, gdy znajdzie się na pogrubionym łuku. Trzeba więc tylko policzyć długość kątową tego łuku, czyli β. Przedstawiam wersję studenta Kamila Piechowiaka, która okazuje się prostsza niż moja własna. :) Wystarczy spojrzeć, że kąt β to jeden z kątów rombu o długości r. Ponieważ suma kątów w rombie musi być równa $360° = 2\pi$, a jeden z kątów rombu to $\pi - \alpha$, to wychodzi na to, że $\beta = \alpha$. Trzeba tylko uważać na to, że cały ten rysunek działa dopóki α jest pomiędzy 0 a π (ponieważ dla większych α otrzymujemy $\beta = 2\pi - \alpha$), ale na szczęście dla większych α mamy odbicie lustrzane względem osi X, więc wystarczy zliczyć prawdopodobieństwo po $\alpha \in [0, \pi]$ i podwoić. Niech S oznacza zdarzenie, że punkt C znajduje się na łuku. Właśnie doszliśmy do tego, że $P(S|\alpha) = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}$ dla $\alpha \in [0, \pi]$ oraz $P(S|\alpha) = P(S| - \alpha)$. Jeśli $f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$ jest gęstością rozkładu α, to:

$$P(S) = \int_0^{2\pi} P(S|\alpha) f(\alpha)\, d\alpha = 2\int_0^{\pi} P(S|\alpha)\frac{1}{2\pi}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} \alpha\, d\alpha = \frac{1}{2\pi^2}\frac{\alpha^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{4}$$