Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

12. Twierdzenia graniczne II

21.01.2021

Zadanie 1. *Pokaż, że dla dowolnej zmiennej losowej X, zmienna:*

$$U = \frac{X - EX}{D(X)},$$

jest zmienną standaryzowaną, tzn. $EU = 0$ oraz $D^2(U) = 1$.

Odpowiedź: Zgodnie ze wzorem $E(aX + b) = aEX + b$, dla $a = \frac{1}{D(X)}$ oraz $b = -\frac{EX}{D(X)}$ mamy:

$$EU = E\left(\frac{X}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)}\right) = \frac{EX}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)} = 0.$$

Podobnie, zgodnie ze wzorem $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$, dla a, b jak powyżej, mamy:

$$D^2(U) = D^2\left(\frac{X}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)}\right) = \frac{D^2(X)}{D^2(X)} = 1.$$

Zadanie 2. *Używając przybliżenia rozkładem normalnym oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie $B(n = 72, p = \frac{2}{3})$ przekroczy 55. Następnie wyznacz górne ograniczenie tego prawdopodobieństwa poprzez odpowiednie zastosowanie nierówności Czebyszewa i porównaj. Możesz również numerycznie wyznacz dokładną odpowiedź, aby sprawdzić jak dobre jest przybliżenie.*

Odpowiedź: Ponieważ $np = 48 \geqslant 5$ i $n(1-p) = 24 \geqslant 5$, możemy użyć przybliżenia rozkładem normalnym:

$$U_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1).$$

Stąd:

$$\begin{aligned} P(S_n > a) &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P\left(U_n > \frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= 1 - P\left(U_n \leqslant \frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \end{aligned}$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Aby zwiększyć dokładność, przyjmiemy $a = 55.5$. Mamy:

$$\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{55.5 - 48}{\sqrt{72 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{7.5}{4} = 1.875.$$

Tym samym:

$$P(S_n > 55.5) \simeq 1 - \Phi(1.875) \simeq 0.03$$

Aby zastosować nierówność Czebyszewa, policzmy wpierw:

$$ES_n = np = 48, \qquad D^2(S_n) = np(1-p) = 16.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} P(S_n > 55) &= P(S_n \geqslant 56) = P(S_n - EX_n \geqslant 56 - EX_n) = P(S_n - EX_n \geqslant 8) \\ &\leqslant P(|S_n - EX_n| \geqslant 8) \overset{(*)}{\leqslant} \frac{D^2(S_n)}{8^2} = \frac{16}{64} = 0.25, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ zastosowaliśmy nierówność Czebyszewa.

Na koniec policzymy rzeczone prawdopodobieństwo w sposób dokładny:

$$P(S_n > 55) = \sum_{k=56}^{72} P(S_n = k) = \sum_{k=56}^{72} \binom{72}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{72-k} = 0.027.$$

Jak widać, przybliżenie rozkładem normalnym daje bardzo dobre przybliżenie wartości szukanego prawdopodobieństwa, natomiast nierówność Czebyszewa daje bardzo kiepskie ograniczenie górne.

Zadanie 3. *Niech $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Pokaż, że:*

$$M_X(t) = \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}$$

Odpowiedź: Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ ma postać:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Z definicji funkcji tworzącej momenty:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^k}{k!} \overset{(*)}{=} e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)},$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy równość $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ z $x = \lambda e^t$.

Zadanie 4. *Niech $X \sim N(0, 1)$ ma standardowy rozkład normalny. Pokaż, że:*

$$M_X(t) = e^{t^2/2}$$

Odpowiedź: Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej $X \sim N(0, 1)$ ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Z definicji funkcji tworzącej momenty:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + tx}\,\mathrm{d}x.$$

Aby powyższe wyrażenie scałkować wykorzystamy następującą sztuczkę: zapiszemy wyrażenie w wykładniku jako:

$$-\frac{1}{2}x^2 + tx = -\frac{1}{2}(x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2.$$

Wyrażenie $e^{\frac{1}{2}t^2}$ możemy wyjąć przed całkę, stąd:

$$M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,\mathrm{d}x}_{=1} = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Dlaczego całka po prawej stronie jest równa 1? Ponieważ wyrażenie podcałkowe to gęstość zmiennej o rozkładzie normalnym $N(t, 1)$, a całka z gęstości po całej dziedzinie musi się równać jeden.

Zadanie 5. *Używając funkcji tworzącej momenty, wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję dla rozkładów: dwumianowego, Poissona i standardowego normalnego*

Odpowiedź:

- Rozkład dwumianowy $X \sim B(n,p)$: mamy $M_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$, a stąd:

$$M_X'(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t \qquad M_X'(0) = np,$$
$$M_X''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t \qquad M_X''(0) = n(n-1)p^2 + np.$$

  Tym samym:

$$EX = np, \qquad D^2(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

- Rozkład Poissona $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$: mamy $M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$, a stąd:

$$M_X'(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \qquad M_X'(0) = \lambda,$$
$$M_X''(t) = e^{\lambda(e^t-1)}(\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t \qquad M_X''(0) = \lambda^2 + \lambda.$$

  Tym samym:

$$EX = \lambda, \qquad D^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

- Rozkład Normalny $X \sim N(0,1)$: mamy $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$, a stąd:

$$M_X'(t) = te^{\frac{1}{2}t^2} \qquad M_X'(0) = 0,$$
$$M_X''(t) = t^2e^{\frac{1}{2}t^2} + e^{\frac{1}{2}t^2} \qquad M_X''(0) = 1.$$

  Tym samym $EX = 0$ i $D^2(X) = 1$.