Metody probabilistyczne

12. Twierdzenia graniczne II

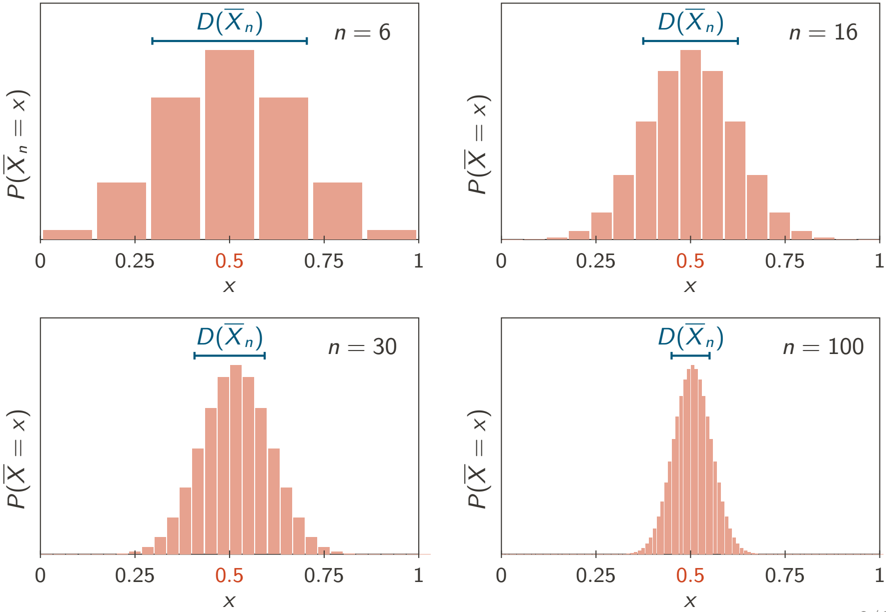
Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

20.01.2021

Centralne Twierdzenie Graniczne

Schemat Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$): rozkład zmiennej $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$



Standaryzacja zmiennej losowej

Zmienną X, dla której $EX = 0$ i $D^2(X) = 1$ nazywa się zmienną losową standaryzowaną

Standaryzacja zmiennej losowej

Zmienną X, dla której $EX = 0$ i $D^2(X) = 1$ nazywa się zmienną losową standaryzowaną

Standaryzacja zmiennej losowej:
Dla dowolnej zmiennej X, zmienna:

$$U = \frac{X - EX}{D(X)} \qquad \text{jest zmienną standaryzowaną}$$

Zadanie 1

Udowodnij to stwierdzenie korzystając ze znanych własności $E(aX + b) = aEX + b$ oraz $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$
U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}
$$

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}$$

Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$$

Interpretacja: patrzymy na S_n (lub $\overline{X}_n$) dobierając zawsze skalę i przesunięcie początku układu współrzędnych tak, aby wartość oczekiwana znajdowała się w punkcie 0, a odchylenie standardowe było jednostkowe.

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

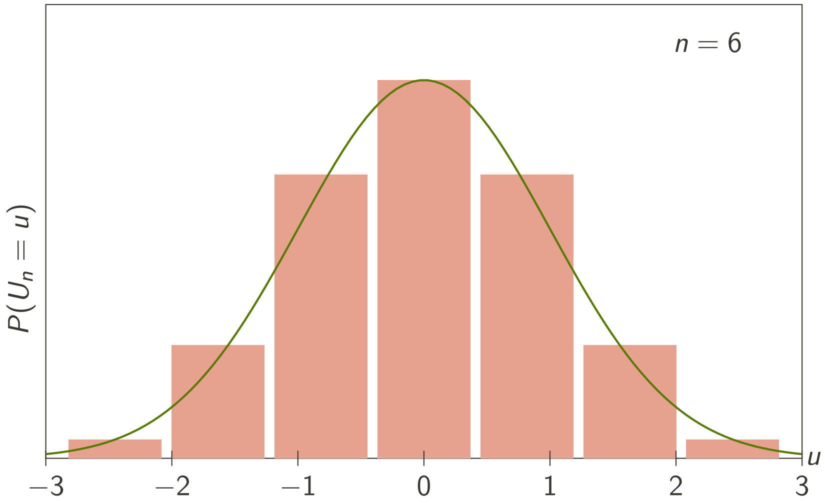
Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$
U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}
$$

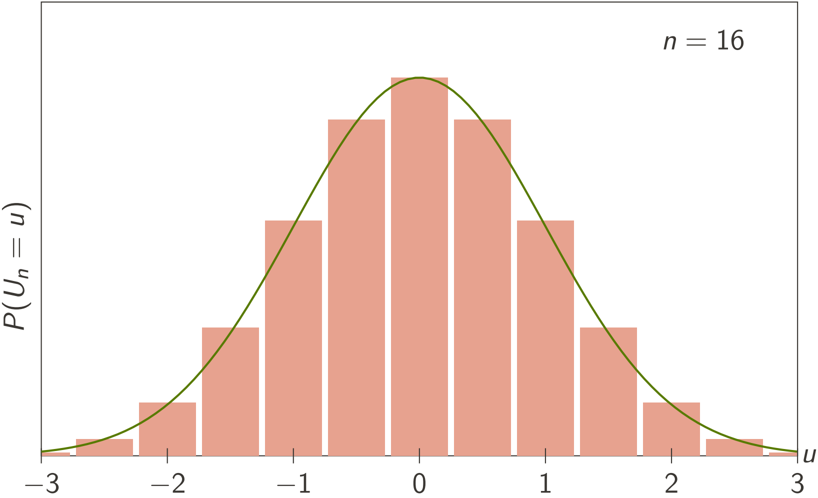
Interpretacja: patrzymy na S_n (lub $\overline{X}_n$) dobierając zawsze skalę i przesunięcie początku układu współrzędnych tak, aby wartość oczekiwana znajdowała się w punkcie 0, a odchylenie standardowe było jednostkowe.

Ciąg U_n nie zbiega teraz do liczby, ponieważ ma stale jednostkowe odchylenie standardowe!

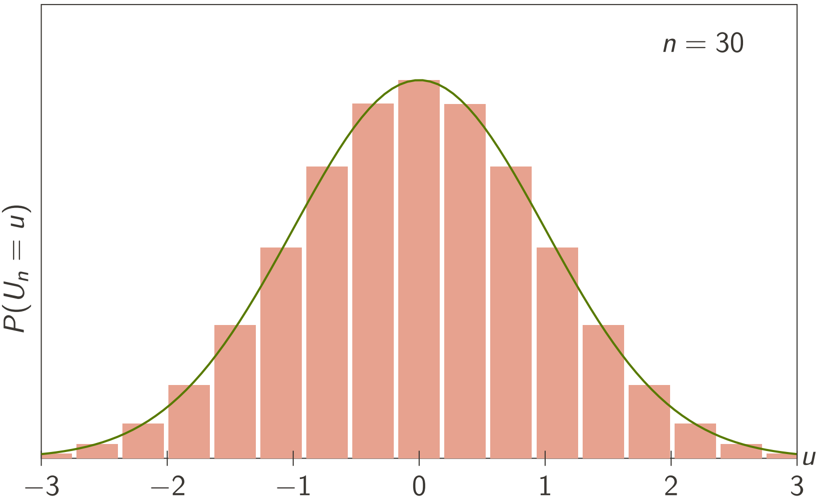
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



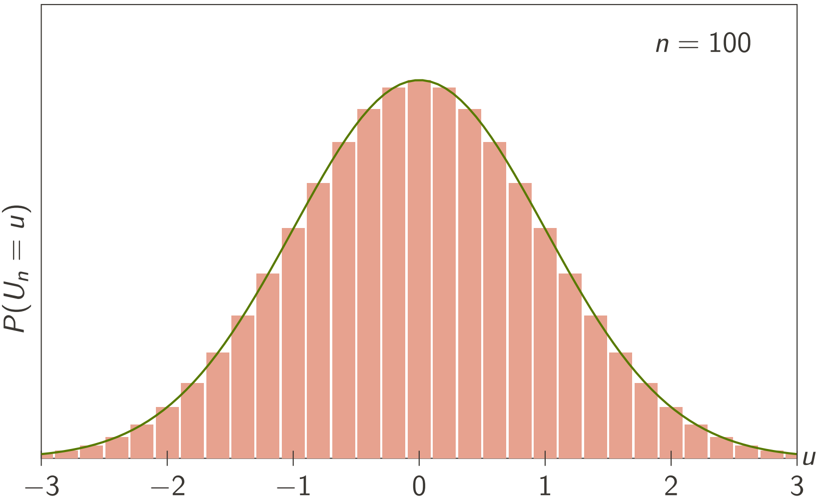
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



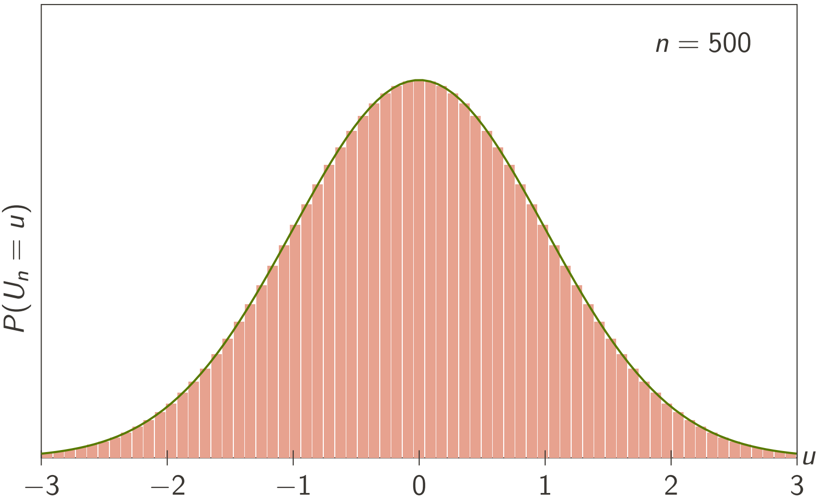
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



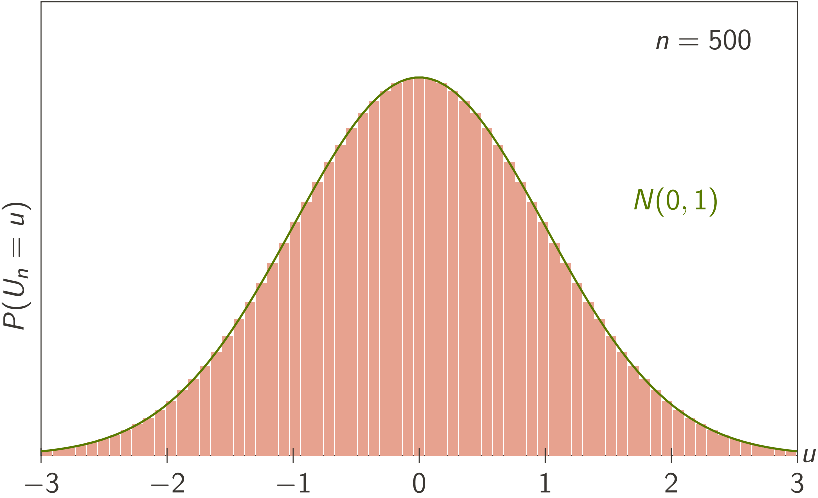
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a

Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$, gdzie $X_n \sim B(p)$ dla wszystkich n

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_n \sim B(n,p), \qquad U_n \;=\; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Dystrybuanta zmiennej U_n zbiega do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego:

$$\forall x \qquad \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(x) \;=\; \Phi(x)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \; = \; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \; \simeq \; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \;=\; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\simeq\; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n,p)$:

$$S_n \;\simeq\; \sqrt{np(1-p)}X + np \;\sim\; N\left(np, np(1-p)\right)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n,p)$:

$$S_n \simeq \sqrt{np(1-p)}X + np \sim N\left(np, np(1-p)\right)$$

- Wniosek: dla dużych n, rozkład dwumianowy $B(n,p)$ można przybliżać rozkładem normalnym $N\left(np, np(1-p)\right)$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0, 1)$:

$$U_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \simeq X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0, 1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n, p)$:

$$S_n \simeq \sqrt{np(1-p)}X + np \sim N(np, np(1-p))$$

- Wniosek: dla dużych n, rozkład dwumianowy $B(n, p)$ można przybliżać rozkładem normalnym $N(np, np(1-p))$
- Przybliżenie to można stosować już dla niewielkiego n: warunek stosowalności określa się zwykle na: $np \geqslant 5$ i $n(1-p) \geqslant 5$.

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź dokładna:

$$P(9 \leqslant S_n \leqslant 12) \;=\; \sum_{k=9}^{12} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k} \simeq 0.548$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) \quad = \quad P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) \quad = \quad P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (X \sim N(0,1))
\end{aligned}
$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad (X \sim N(0,1)) \\
&= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}
$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad (X \sim N(0,1)) \\
&= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}
$$

Aby zwiększyć dokładność, bierzemy $b = 12.5$, $a = 8.5$:

$$P(8.5 \leqslant S_n \leqslant 12.5) \simeq \Phi(0.968) - \Phi(-0.581) \simeq 0.553$$

(odpowiedź dokładna: 0.548)

Zadanie 2

Używając przybliżenia rozkładem normalnym oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie $B(n = 72, p = \frac{2}{3})$ przekroczy 55. Następnie wyznacz górne ograniczenie tego prawdopodobieństwa poprzez odpowiednie zastosowanie nierówności Czebyszewa i porównaj. Możesz również numerycznie wyznacz dokładną odpowiedź, aby sprawdzić jak dobre jest przybliżenie.

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

Pokazuje się, że dla dużych n, rozkład zmiennej $S_n \sim B(n, p)$ można przybliżyć rozkładem rozkładem zmiennej $X \sim N(np, np(1-p))$.

Innymi słowy:

$$P(S_n = k) = \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{B(n,p)} \quad \simeq \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}}_{N(np,np(1-p))} = f_X(k)$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

Pokazuje się, że dla dużych n, rozkład zmiennej $S_n \sim B(n, p)$ można przybliżyć rozkładem rozkładem zmiennej $X \sim N(np, np(1-p))$.

Innymi słowy:

$$P(S_n = k) = \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{B(n,p)} \quad \simeq \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}}_{N(np,np(1-p))} = f_X(k)$$

Główne narzędzia: wzór Stirlinga oraz rozwinięcie w szereg Taylora

Dowód pomijamy, ponieważ udowodnimy później ogólniejsze twierdzenie, którego to będzie szczególnym przypadkiem.

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, X_2, X_3 \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $EX_i = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, X_2, X_3 \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $EX_i = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Zgodnie z prawem wielkich liczb:

$$\overline{X}_n \; = \; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \; \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \; \mu$$

Możemy jednak ustandaryzować ciąg średnich:

$$U_n \; = \; \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} \; = \; \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

Do czego dąży U_n?

Centralne Twierdzenie Graniczne

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Niech:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad \text{gdzie } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wtedy:

$$\forall x \qquad \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(x) = \Phi(x),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Zjawisko zbiegania rozkładu standaryzowanej średniej do rozkładu normalnego jest uniwersalne!

Centralne Twierdzenie Graniczne

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Niech:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad \text{gdzie } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wtedy:

$$\forall x \qquad \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(x) = \Phi(x),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

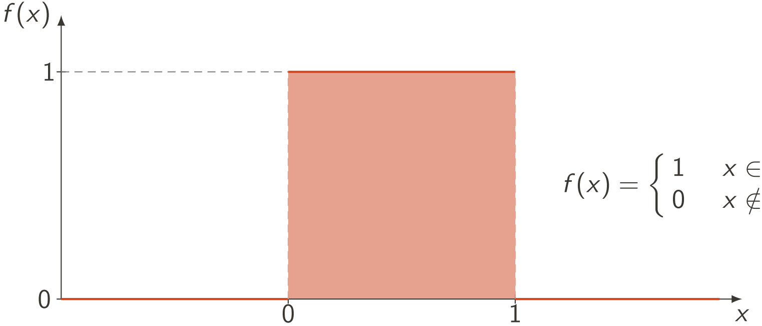
Zjawisko zbiegania rozkładu standaryzowanej średniej do rozkładu normalnego jest uniwersalne!

Rozkład normalny jest powszechny: powstaje ilekroć obserwowane zjawiska są wynikiem uśredniania wielu niezależnych losowych przyczynków.

Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim$ Unif$[0,1]$

$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$

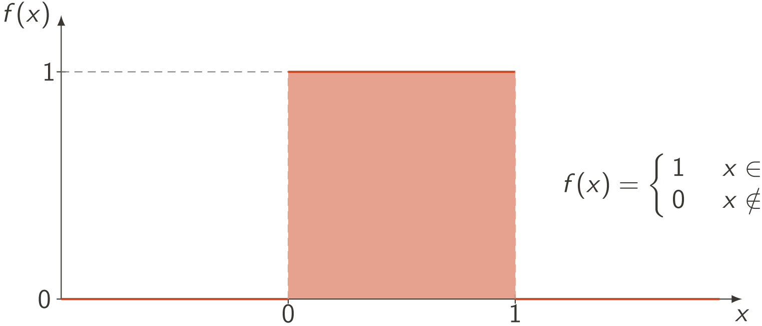


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim$ Unif$[0,1]$

$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$



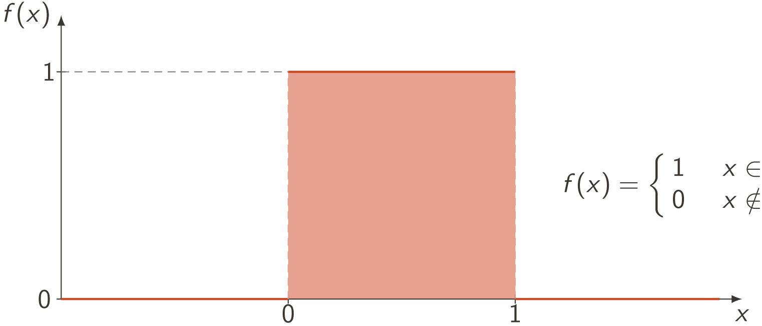
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} =$$

Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim$ Unif$[0,1]$

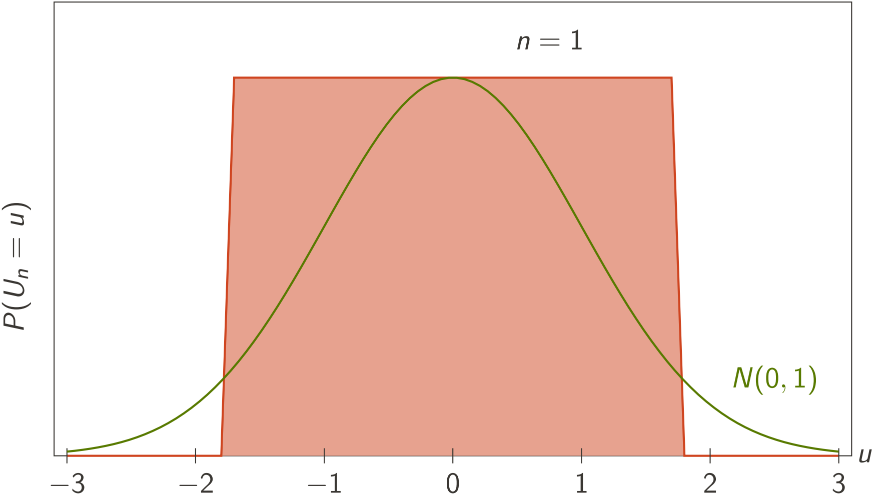
$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$



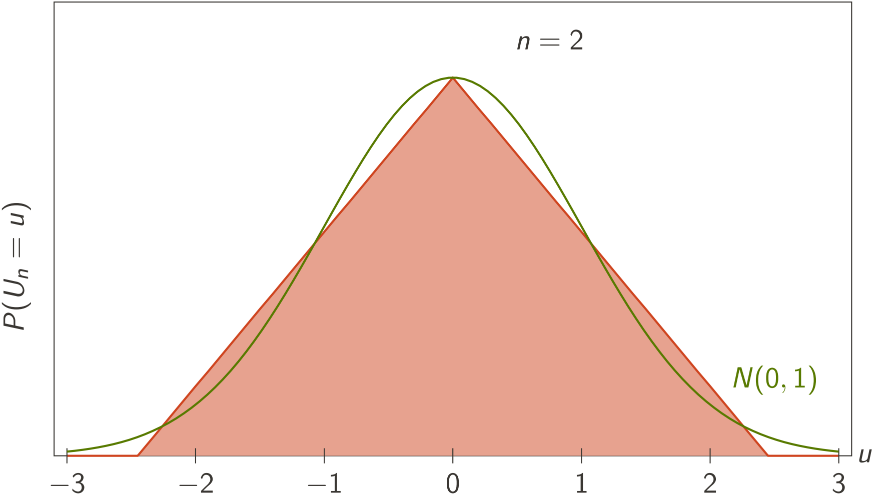
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

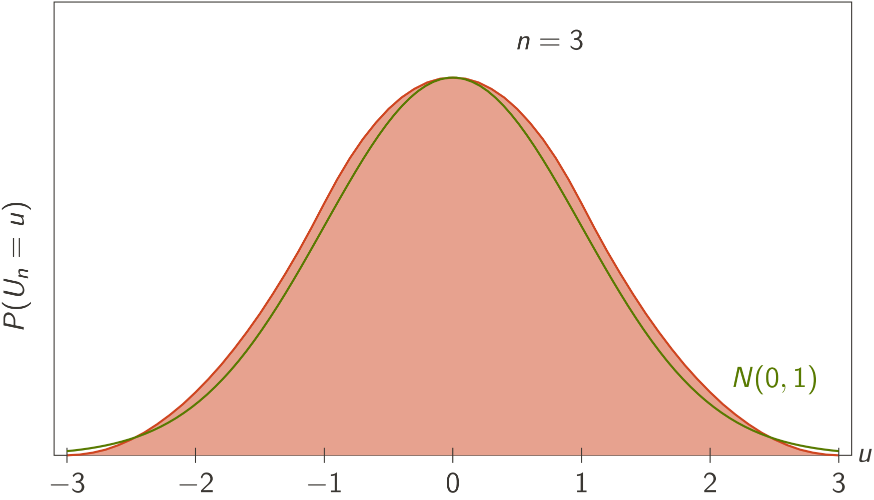
Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$



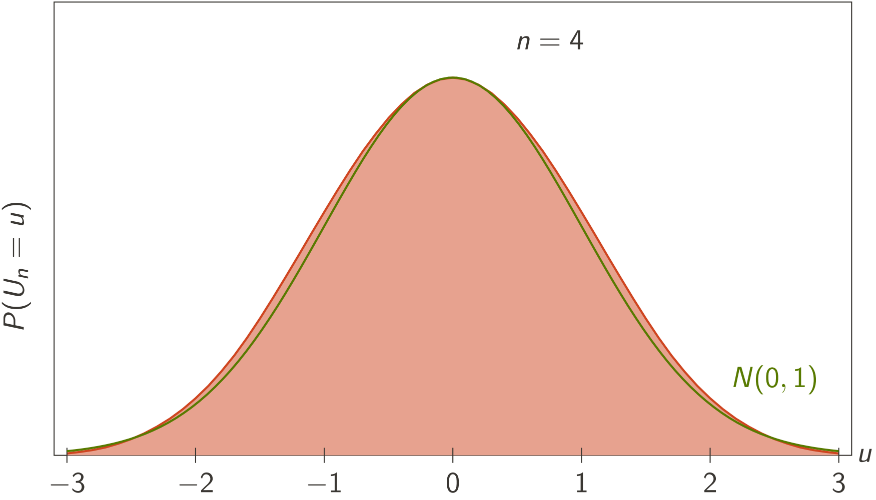
Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0, 1]$



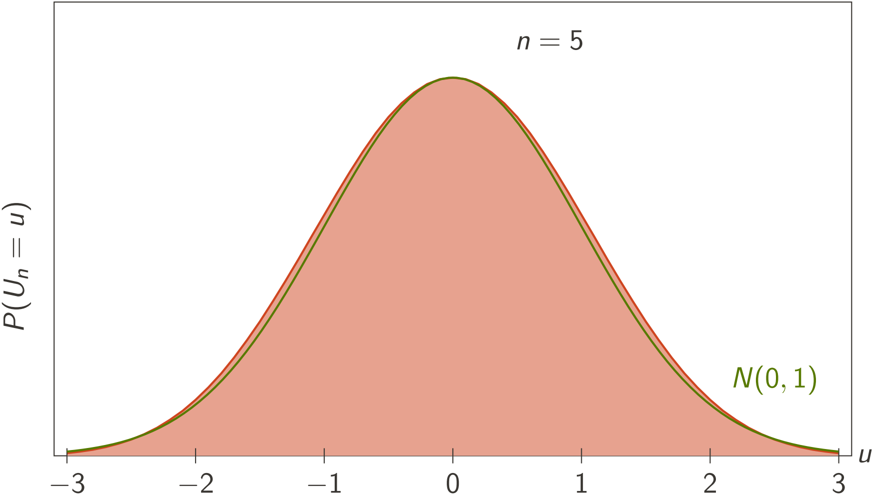
Przykład: rozkład jednostajny Unif[0, 1]



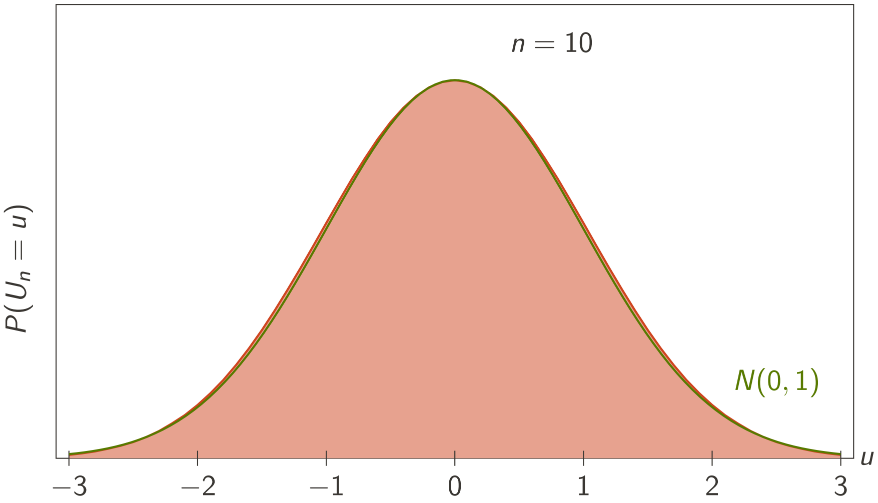
Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$



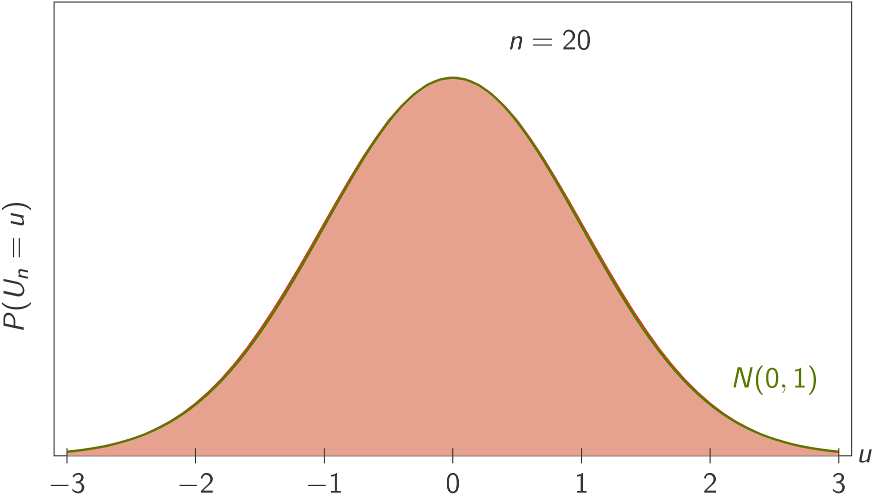
Przykład: rozkład jednostajny Unif[0, 1]



Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0, 1]$



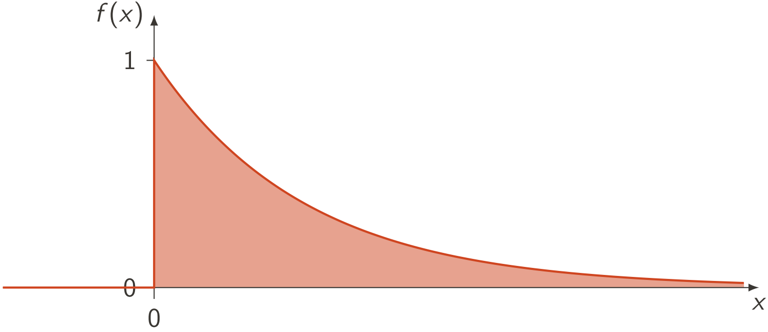
Przykład: rozkład jednostajny Unif$[0,1]$



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

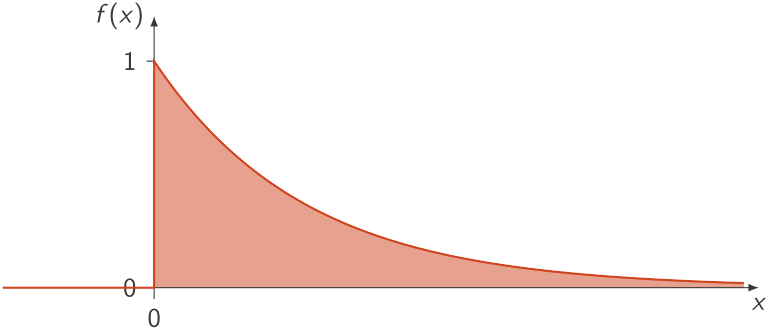
$$EX_i = \frac{1}{\lambda} = 1, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

$$EX_i = \frac{1}{\lambda} = 1, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

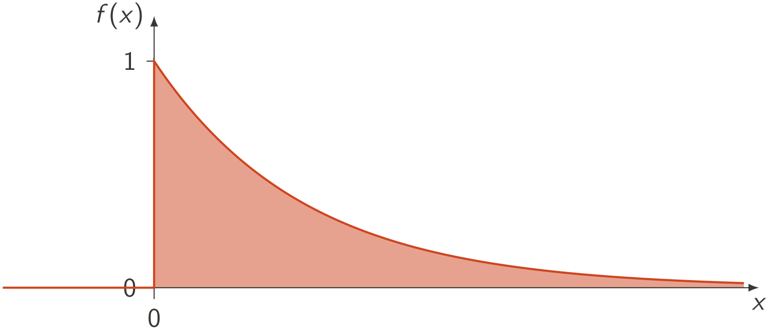


$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} =$$

Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

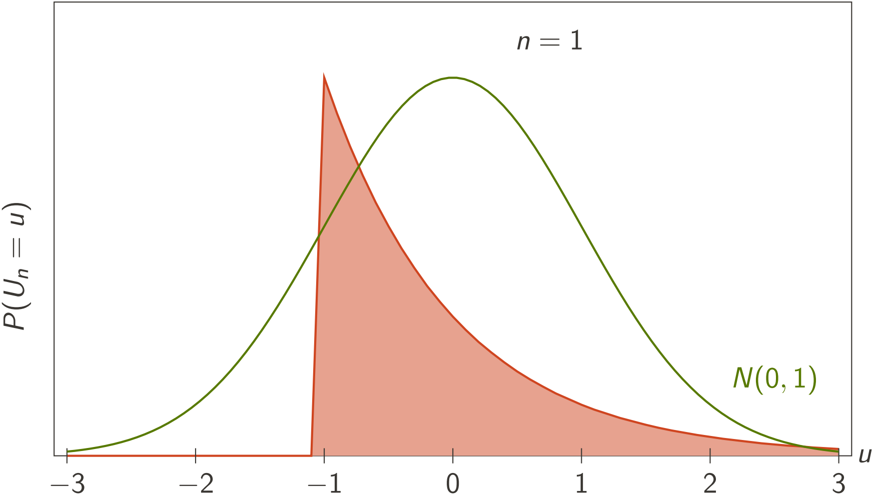
$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

$$EX_i \;=\; \frac{1}{\lambda} \;=\; 1, \qquad D^2(X_i) \;=\; \frac{1}{\lambda^2} \;=\; 1$$

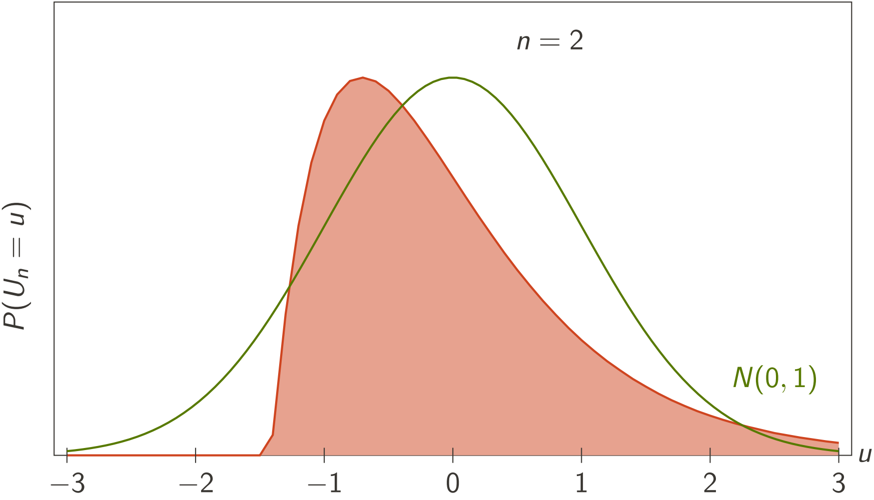


$$S_n \;=\; X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n \;=\; \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} \;=\; \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

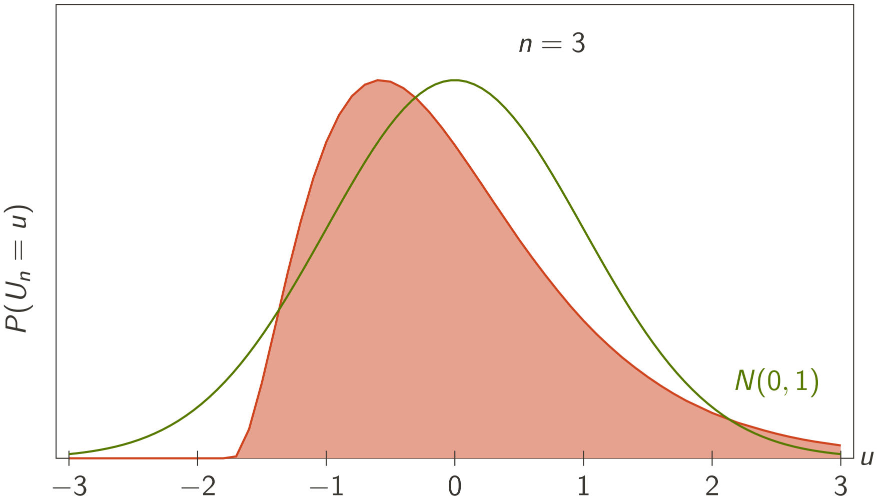
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



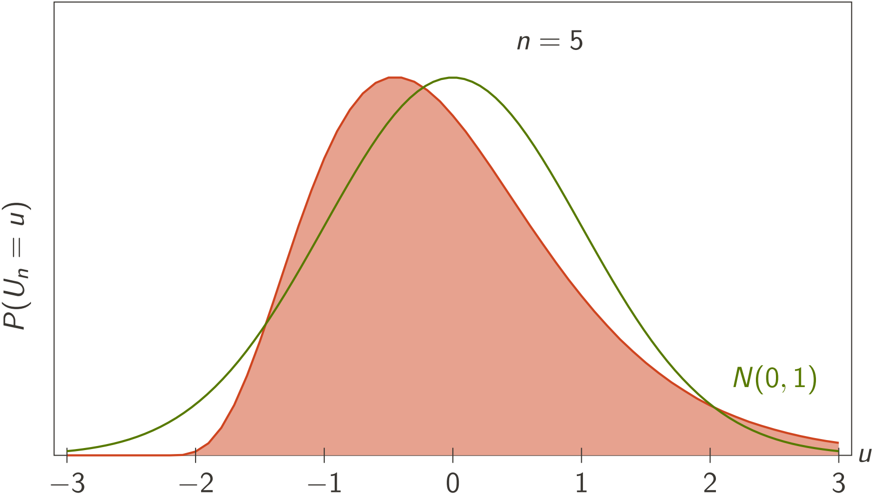
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



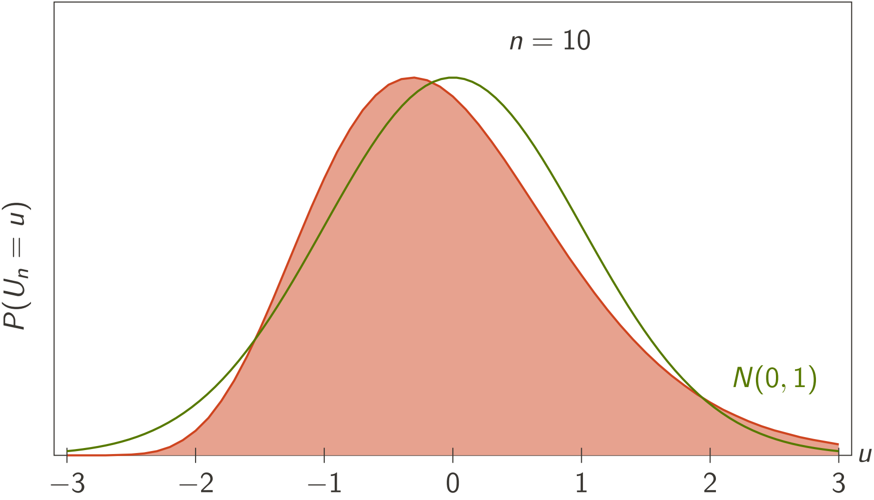
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



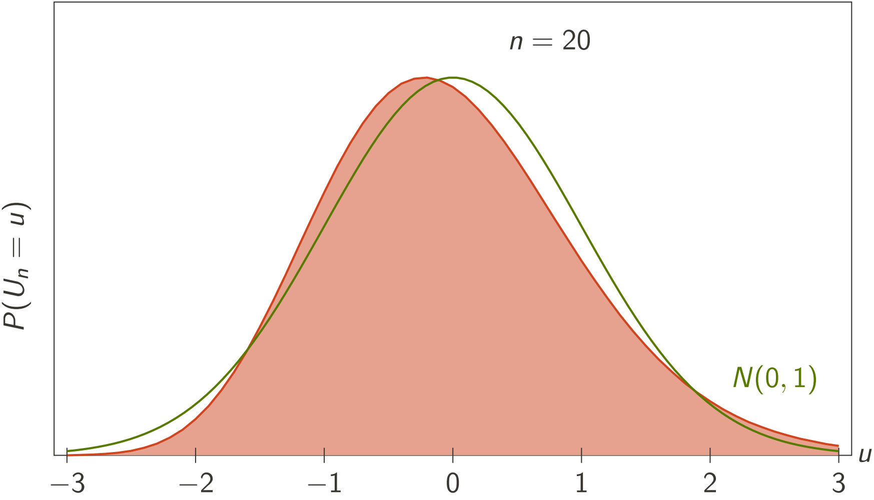
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



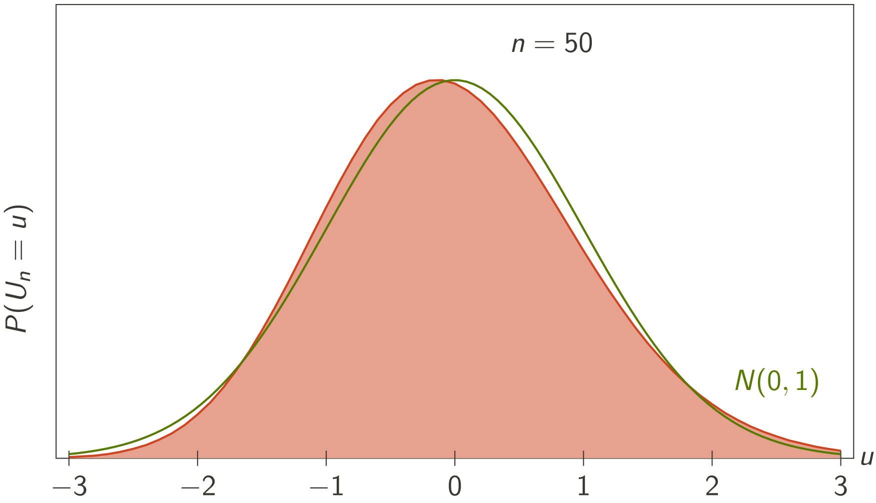
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



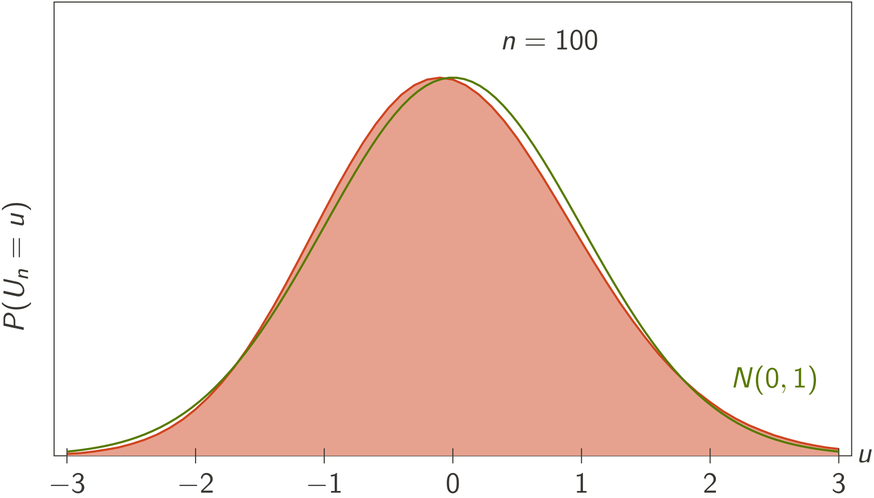
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



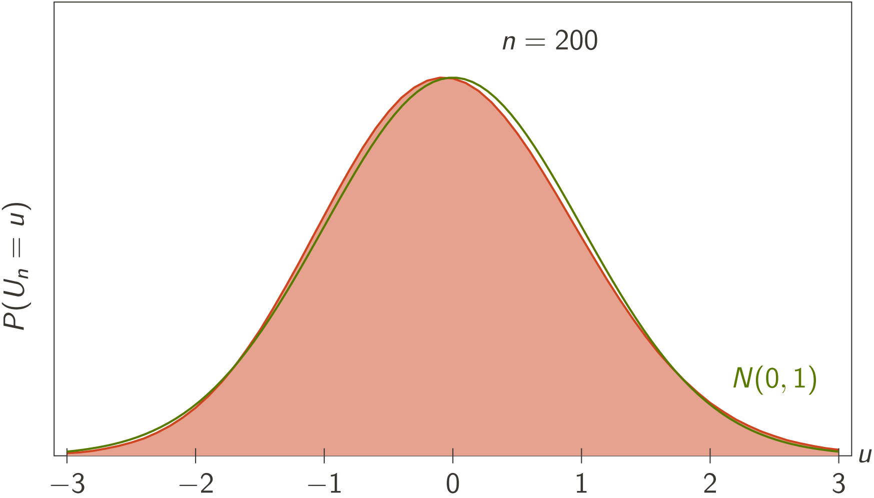
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



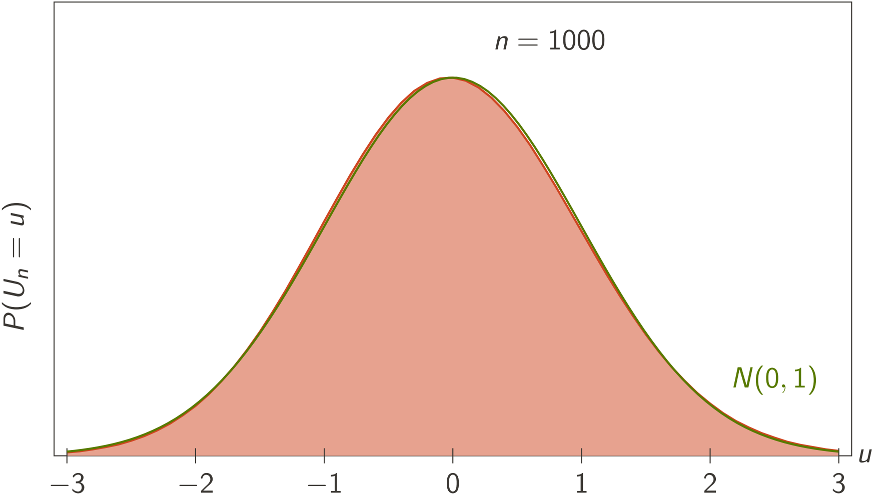
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



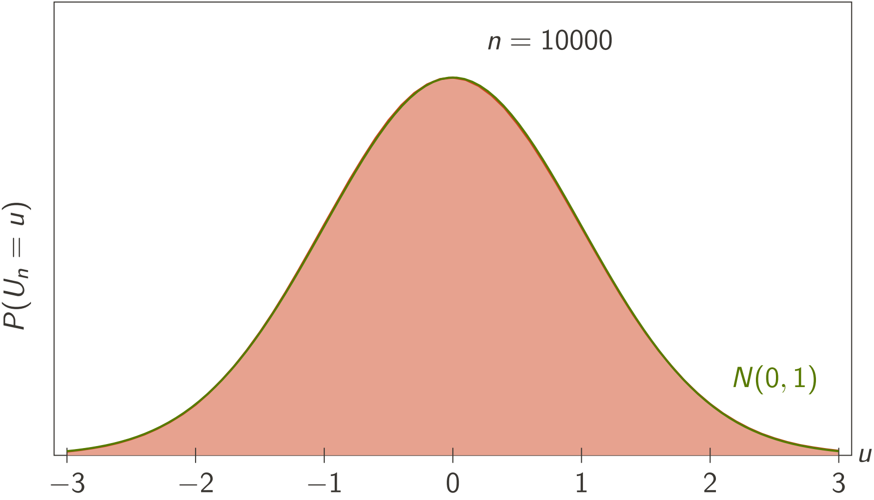
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \overset{P}{\rightarrow} X$), gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \stackrel{\text{z pr. } 1}{\longrightarrow} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \stackrel{P}{\to} X$), gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

- Według dystrybuant (ozn. $X_n \stackrel{D}{\to} X$), gdy:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{w każdym punkcie ciągłości } F_X$$

Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \stackrel{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \stackrel{P}{\to} X$), gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) \;=\; 0$$

- Według dystrybuant (ozn. $X_n \stackrel{D}{\to} X$), gdy:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \;=\; F_X(x) \quad \text{w każdym punkcie ciągłości } F_X$$

Zachodzi: $X_n \stackrel{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \quad \Rightarrow \quad X_n \stackrel{P}{\to} X \quad \Rightarrow \quad X_n \stackrel{D}{\to} X$,

czyli zbieżność według dystrybuant jest najsłabszym z typów zbieżności

Podsumowanie

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną $EX_i = \mu$ i wariancją $D^2(X_i) = \sigma^2$

$$\text{Definiujemy } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Prawo Wielkich Liczb

$$\overline{X}_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \mu$$

- Centralne Twierdzenie Graniczne

$$\frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} U \sim N(0,1)$$

Funkcja tworząca momenty

Funkcję tworzącą momenty zmiennej losowej X definiujemy jako:

$$M_X(t) \;=\; E\left(e^{tX}\right)$$

Dziedziną M_X jest zbiór $t \in \mathbb{R}$ dla których wyrażenie po prawej stronie istnieje (tzn. jest skończone)

Funkcja tworząca momenty

Funkcję tworzącą momenty zmiennej losowej X definiujemy jako:

$$M_X(t) \;=\; E\left(e^{tX}\right)$$

Dziedziną M_X jest zbiór $t \in \mathbb{R}$ dla których wyrażenie po prawej stronie istnieje (tzn. jest skończone)

- Dla dyskretnych zmiennych losowych:

$$M_X(t) \;=\; \sum_{x_i} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

- Dla ciągłych zmiennych losowych:

$$M_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx} \, \mathrm{d}x$$

Przykłady

- Rozkład dwupunktowy: dla $X \sim B(p)$

$$M_X(t) \ = \ E\left(e^{tX}\right) \ = \ pe^{t\cdot 1} + (1-p)e^{t\cdot 0} \ = \ pe^{t} + 1 - p$$

Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

Przykłady

- Rozkład dwupunktowy: dla $X \sim B(p)$

$$M_X(t) \; = \; E(e^{tX}) \; = \; pe^{t\cdot 1} + (1-p)e^{t\cdot 0} \; = \; pe^t + 1 - p$$

  Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

- Rozkład dwumianowy: dla $X \sim B(n, p)$

$$M_X(t) \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X = k) \; = \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk} p^k (1-p)^{n-k}$$

Przykłady

- Rozkład dwupunktowy: dla $X \sim B(p)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = pe^{t\cdot 1} + (1-p)e^{t\cdot 0} = pe^t + 1 - p$$

  Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

- Rozkład dwumianowy: dla $X \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Przykłady

- Rozkład dwupunktowy: dla $X \sim B(p)$

$$M_X(t) \;=\; E(e^{tX}) \;=\; pe^{t\cdot 1} + (1-p)e^{t\cdot 0} \;=\; pe^{t} + 1 - p$$

Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

- Rozkład dwumianowy: dla $X \sim B($

Wynika ze wzoru:
$(x+y)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$\begin{aligned} M_X(t) \;&=\; \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk} p^k (1-p)^{n-k} \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{t})^k (1-p)^{n-k} \;=\; (pe^{t} + 1 - p)^n \end{aligned}$$

Przykłady

- Rozkład dwupunktowy: dla $X \sim B(p)$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = pe^{t\cdot 1} + (1-p)e^{t\cdot 0} = pe^t + 1 - p$$

Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

- Rozkład dwumianowy: dla $X \sim B(n,p)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{tk} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n \end{aligned}$$

Dziedzina funkcji: $\mathbb{R}$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$:

$$M_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x$$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \text{Unif}[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \int_0^1 e^0\,\mathrm{d}x = 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ & \end{cases}
\end{aligned}
$$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \int_0^1 e^0\,\mathrm{d}x = 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t}e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dziedzina: $\mathbb{R}$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \int_0^1 e^0\,\mathrm{d}x = 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t} e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  Dziedzina: $\mathbb{R}$

- Rozkład wykładniczy: dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{tx}$$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases} \int_0^1 e^0\,\mathrm{d}x = 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t} e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

  Dziedzina: $\mathbb{R}$

- Rozkład wykładniczy: dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{tx}\,\mathrm{d}x &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{tx} \\
= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} &= \lambda \frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty}
\end{aligned}
$$

Przykłady

- Rozkład jednostajny: dla $X \sim \text{Unif}[0,1]$:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \int_0^1 e^0\,\mathrm{d}x = 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t}e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  Dziedzina: $\mathbb{R}$

- Rozkład wykładniczy: dla $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$\begin{aligned} M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}e^{tx} \\ = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} = \lambda \frac{1}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

  Powyższe wyrażenie istnieje tylko dla $t < \lambda$, wtedy $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
  Dziedzina: $(-\infty, \lambda)$

Zadania

Zadanie 3

Niech $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ ma rozkład Poissona z parametrem λ. Pokaż, że:

$$M_X(t) \ = \ \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}$$

Zadanie 4

Niech $X \sim N(0, 1)$ ma standardowy rozkład normalny. Pokaż, że:

$$M_X(t) \ = \ e^{t^2/2}$$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right)$$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right)$$

Wchodzimy z pochodną do środka wartości oczekiwanej, co wynika z liniowości wartości oczekiwanej:

$$\left(E(e^{Xt})\right)' = \left(\sum_{x_i} e^{x_i t} P(X = x_i)\right)' = \sum_{x_i} (e^{x_i t})' P(X = x_i)$$

Dla zmiennych ciągłych również zachodzi (przy założeniach)

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(Xe^{Xt}\right)$$

Stąd $M'_X(0) = E(Xe^0) = E(X)$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \; = \; \left(E(e^{Xt})\right)' \; = \; E\left((e^{Xt})'\right) \; = \; E\left(Xe^{Xt}\right)$$

Stąd $M'_X(0) = E(Xe^0) = E(X)$

- Wyznaczamy drugą pochodną:

$$M''_X(t) \; = \; \left(E(Xe^{Xt})\right)' \; = \; E\left(X(e^{Xt})'\right) \; = \; E\left(X^2e^{Xt}\right)$$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(Xe^{Xt}\right)$$

  Stąd $M'_X(0) = E(Xe^0) = E(X)$
- Wyznaczamy drugą pochodną:

$$M''_X(t) \;=\; \left(E(Xe^{Xt})\right)' \;=\; E\left(X(e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(X^2e^{Xt}\right)$$

Stąd $M''_X(0) = E(X^2e^0) = E(X^2)$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(Xe^{Xt}\right)$$

  Stąd $M'_X(0) = E(Xe^0) = E(X)$

- Wyznaczamy drugą pochodną:

$$M''_X(t) \;=\; \left(E(Xe^{Xt})\right)' \;=\; E\left(X(e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(X^2 e^{Xt}\right)$$

  Stąd $M''_X(0) = E(X^2 e^0) = E(X^2)$

- Ogólniej: k-ta pochodna w zerze $M_X^{(k)}(0)$ daje k-ty moment $E(X^k)$

Funkcja tworząca momenty tworzy momenty

- $M_X(0) = E(e^{0X}) = E(1) = 1$
- Wyznaczmy pierwszą pochodną:

$$M'_X(t) \;=\; \left(E(e^{Xt})\right)' \;=\; E\left((e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(Xe^{Xt}\right)$$

  Stąd $M'_X(0) = E(Xe^0) = E(X)$
- Wyznaczamy drugą pochodną:

$$M''_X(t) \;=\; \left(E(Xe^{Xt})\right)' \;=\; E\left(X(e^{Xt})'\right) \;=\; E\left(X^2e^{Xt}\right)$$

  Stąd $M''_X(0) = E(X^2e^0) = E(X^2)$
- Ogólniej: k-ta pochodna w zerze $M_X^{(k)}(0)$ daje k-ty moment $E(X^k)$
- Jeśli $M_X(t)$ istnieje w okolicy zera (tzn na przedziale $(-\epsilon, \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$), to wszystkie momenty zmiennej X są skończone ($E(|X|^k) < \infty$ dla $k = 1, 2, \ldots$)

Przykład

- Rozkład dwupunktowy $X \sim B(p)$: $M_X(t) = pe^t + 1 - p$

$$M_X'(t) = pe^t, \quad M_X'(0) = p, \qquad M_X''(t) = pe^t, \quad M_X''(0) = p$$

Przykład

- Rozkład dwupunktowy $X \sim B(p)$: $M_X(t) = pe^t + 1 - p$

  $$M'_X(t) = pe^t, \quad M'_X(0) = p, \qquad M''_X(t) = pe^t, \quad M''_X(0) = p$$

  Stąd $EX = p$ oraz $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Przykład

- Rozkład dwupunktowy $X \sim B(p)$: $M_X(t) = pe^t + 1 - p$

$$M'_X(t) = pe^t, \quad M'_X(0) = p, \qquad M''_X(t) = pe^t, \quad M''_X(0) = p$$

Stąd $EX = p$ oraz $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

- Rozkład wykładniczy $X \sim \text{Exp}(\lambda)$: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad M''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad M''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Przykład

- Rozkład dwupunktowy $X \sim B(p)$: $M_X(t) = pe^t + 1 - p$

  $$M_X'(t) = pe^t, \quad M_X'(0) = p, \qquad M_X''(t) = pe^t, \quad M_X''(0) = p$$

  Stąd $EX = p$ oraz $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- Rozkład wykładniczy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

  $$M_X'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad M_X''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

  Stąd $EX = \frac{1}{\lambda}$ oraz $D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Przykład

- Rozkład dwupunktowy $X \sim B(p)$: $M_X(t) = pe^t + 1 - p$

$$M'_X(t) = pe^t, \quad M'_X(0) = p, \qquad M''_X(t) = pe^t, \quad M''_X(0) = p$$

Stąd $EX = p$ oraz $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

- Rozkład wykładniczy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$: $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$M'_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \quad M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad M''_X(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad M''_X(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Stąd $EX = \frac{1}{\lambda}$ oraz $D^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Zadanie 5

Wyznacz w ten sposób wartość oczekiwaną i wariancję dla rozkładów: dwumianowego, Poissona i standardowego normalnego

Funkcje tworzące momenty sumy niezależne zmiennych

Niech X i Y – niezależne, oraz $Z = X + Y$. Wtedy:

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Funkcje tworzące momenty sumy niezależne zmiennych

Niech X i Y – niezależne, oraz $Z = X + Y$. Wtedy:

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Dowód:

$$M_Z(t) \;=\; E\left(e^{tZ}\right) \;=\; E\left(e^{t(X+Y)}\right) \;=\; E\left(e^{tX}e^{tY}\right)$$

Funkcje tworzące momenty sumy niezależne zmiennych

Niech X i Y – niezależne, oraz $Z = X + Y$. Wtedy:

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) \\ &= E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \cdot M_Y(t) \end{aligned}$$

Jeśli X_1 i X_2 są niezależne
to $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$
Podstaw $X_1 = e^{tX}$ i $X_2 = e^{tY}$

Funkcje tworzące momenty sumy niezależne zmiennych

Niech X i Y – niezależne, oraz $Z = X + Y$. Wtedy:

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) \\ &= E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \cdot M_Y(t) \end{aligned}$$

Funkcja tworząca sumy zmiennych niezależnych jest iloczynem funkcji tworzących poszczególnych zmiennych
(splot rozkładów $\iff$ mnożenie funkcji tworzących)

Funkcje tworzące momenty sumy niezależne zmiennych

Niech X i Y – niezależne, oraz $Z = X + Y$. Wtedy:

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

Dowód:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) \\ &= E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right) = M_X(t) \cdot M_Y(t) \end{aligned}$$

Funkcja tworząca sumy zmiennych niezależnych jest iloczynem funkcji tworzących poszczególnych zmiennych
(splot rozkładów $\iff$ mnożenie funkcji tworzących)

Wniosek: Jeśli $X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie z funkcją tworzącą momenty $M_X(t)$, to dla $Y = X_1 + \ldots + X_n$:

$$M_Y(t) = (M_X(t))^n$$

Translacja i skalowanie

Dla zmiennej losowej X zdefiniujmy $Y = aX + b$. Wtedy:

$$M_Y(t) \;=\; e^{bt} M_X(at)$$

Translacja i skalowanie

Dla zmiennej losowej X zdefiniujmy $Y = aX + b$. Wtedy:

$$M_Y(t) \ = \ e^{bt} M_X(at)$$

Dowód:

$$M_Y(t) \ = \ E\left(e^{tY}\right) \ = \ E\left(e^{atX+bt}\right) \ = \ e^{bt} E\left(e^{(at)X}\right) \ = \ e^{bt} M_X(at)$$

Translacja i skalowanie

Dla zmiennej losowej X zdefiniujmy $Y = aX + b$. Wtedy:

$$M_Y(t) \ = \ e^{bt} M_X(at)$$

Dowód:

$$M_Y(t) \ = \ E\left(e^{tY}\right) \ = \ E\left(e^{atX+bt}\right) \ = \ e^{bt} E\left(e^{(at)X}\right) \ = \ e^{bt} M_X(at)$$

Wniosek: Funkcja tworząca momenty zmiennej $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ma postać:

$$M_Y(t) \ = \ e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Translacja i skalowanie

Dla zmiennej losowej X zdefiniujmy $Y = aX + b$. Wtedy:

$$M_Y(t) \;=\; e^{bt} M_X(at)$$

Dowód:

$$M_Y(t) \;=\; E\left(e^{tY}\right) \;=\; E\left(e^{atX+bt}\right) \;=\; e^{bt} E\left(e^{(at)X}\right) \;=\; e^{bt} M_X(at)$$

Wniosek: Funkcja tworząca momenty zmiennej $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ma postać:

$$M_Y(t) \;=\; e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Dowód: $Y = \sigma X + \mu$, gdzie $X \sim N(0,1)$ i $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$

Rozkład prawdopodobieństwa a funkcja tworząca

Z definicji funkcja tworząca momenty jest jednoznacznie zdefiniowana przez rozkład prawdopodobieństwa

Zachodzi również własność odwrotna: rozkład jest jednoznacznie zdefiniowany przez funkcję tworzącą momenty

Rozkład prawdopodobieństwa a funkcja tworząca

Z definicji funkcja tworząca momenty jest jednoznacznie zdefiniowana przez rozkład prawdopodobieństwa

Zachodzi również własność odwrotna: rozkład jest jednoznacznie zdefiniowany przez funkcję tworzącą momenty

Twierdzenie: Jeśli funkcję tworzące momenty zmiennych X i Y są równe w okolicy zera (tzn. na przedziale $(-\epsilon, \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$), to X i Y mają ten sam rozkład

Dowód pomijamy (zgrubnie: jeśli funkcje tworzące są równe, to wszystkie momenty dowolnego rzędu są równe, co determinuje rozkład)

Rozkład prawdopodobieństwa a funkcja tworząca

Z definicji funkcja tworząca momenty jest jednoznacznie zdefiniowana przez rozkład prawdopodobieństwa

Zachodzi również własność odwrotna: rozkład jest jednoznacznie zdefiniowany przez funkcję tworzącą momenty

Twierdzenie: Jeśli funkcję tworzące momenty zmiennych X i Y są równe w okolicy zera (tzn. na przedziale $(-\epsilon, \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$), to X i Y mają ten sam rozkład

Dowód pomijamy (zgrubnie: jeśli funkcje tworzące są równe, to wszystkie momenty dowolnego rzędu są równe, co determinuje rozkład)

Wniosek: Suma niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

Dowód: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ niezależne, $Z = X + Y$

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\mu_X t + \frac{1}{2}\sigma_X^2 t^2} e^{\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2} = e^{(\mu_X + \mu_Y)t + \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)t^2}$$

Jest to funkcja tworząca rozkładu $N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

Twierdzenie o zbieżności

Niech $X, X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych, których funkcje tworzące momenty są określone na przedziale $(-\epsilon, \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$.

$$\text{Jeśli} \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \quad \lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t), \qquad \text{to} \qquad X_n \xrightarrow{D} X$$

Zbieżność w sensie funkcji tworzącym momenty implikuje zbieżność w sensie rozkładów

(pozostawiamy bez dowodu)

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Wtedy:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$$

Uwaga: Dowód przy założeniu, że zmienne X_i mają funkcję tworzącą momenty zdefiniowaną w w pewnym otoczeniu zera $(-\epsilon, \epsilon)$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Wtedy:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$$

Uwaga: Dowód przy założeniu, że zmienne X_i mają funkcję tworzącą momenty zdefiniowaną w w pewnym otoczeniu zera $(-\epsilon, \epsilon)$

Dowód: Zdefiniujmy $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, a stąd $EZ_i = 0, D(Z_i) = 1$. Wtedy $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = \overline{Z}_n$, a więc musimy pokazać, że:

$$U_n = \overline{Z}_n\sqrt{n} = \frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} X \sim N(0,1)$$

Pokażemy, że ciąg funkcji tworzących $M_{U_n}(t)$ zbiega do funkcji tworzącej $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Z rozwinięcia w szereg Taylora wokół zera:

$$M_Z(t) \;=\; M_Z(0) + M_Z'(0)t + \frac{1}{2}M_Z''(0)t^2 + o(t^2)$$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Z rozwinięcia w szereg Taylora wokół zera:

$$M_Z(t) \;=\; \underbrace{M_Z(0)}_{=1} + \underbrace{M'_Z(0)}_{= EZ = 0}t + \frac{1}{2}\underbrace{M''_Z(0)}_{= E(Z^2) = D^2(Z) - (EZ)^2 = 1}t^2 + o(t^2) \;=\; 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Z rozwinięcia w szereg Taylora wokół zera:

$$M_Z(t) \; = \; M_Z(0) + M_Z'(0)t + \frac{1}{2}M_Z''(0)t^2 + o(t^2) \; = \; 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

Z niezależności i skalowania:

$$M_{Z_1+\ldots+Z_n}(t) = (M_Z(t))^n, \quad M_{U_n}(t) = M_{\frac{Z_1+\ldots+Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Z rozwinięcia w szereg Taylora wokół zera:

$$M_Z(t) \;=\; M_Z(0) + M'_Z(0)t + \frac{1}{2}M''_Z(0)t^2 + o(t^2) \;=\; 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

Z niezależności i skalowania:

$$M_{Z_1+\ldots+Z_n}(t) = (M_Z(t))^n, \quad M_{U_n}(t) = M_{\frac{Z_1+\ldots+Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Stąd:

$$M_{U_n}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right)^n$$

Dowód Centralnego Twierdzenia Granicznego

Niech $M_Z(t)$ będzie funkcją tworzącą momenty zmiennych $Z_1, Z_2, \ldots$

Z rozwinięcia w szereg Taylora wokół zera:

$$M_Z(t) \;=\; M_Z(0) + M_Z'(0)t + \frac{1}{2}M_Z''(0)t^2 + o(t^2) \;=\; 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

Z niezależności i skalowania:

$$M_{Z_1+\ldots+Z_n}(t) = (M_Z(t))^n, \quad M_{U_n}(t) = M_{\frac{Z_1+\ldots+Z_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Stąd:

$$M_{U_n}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{\frac{1}{2}t^2},$$

ponieważ $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^x$

Funkcje charakterystyczne

Funkcja tworząca momenty może nie istnieć w otoczeniu zera (gdy wyższe momenty zmiennej losowej są nieskończone)

Funkcje charakterystyczne

Funkcja tworząca momenty może nie istnieć w otoczeniu zera (gdy wyższe momenty zmiennej losowej są nieskończone)

Funkcja charakterystyczna: zamień t na liczbę urojoną $i \cdot t$ w definicji funkcji tworzącej momenty:

$$\psi_X(t) \;=\; E\left(e^{itX}\right)$$

Funkcje charakterystyczne

Funkcja tworząca momenty może nie istnieć w otoczeniu zera (gdy wyższe momenty zmiennej losowej są nieskończone)

Funkcja charakterystyczna: zamień t na liczbę urojoną $i \cdot t$ w definicji funkcji tworzącej momenty:

$$\psi_X(t) = E\left(e^{itX}\right)$$

Funkcja charakterystyczna ma zupełnie analogiczne własności do funkcji tworzącej momenty, a równocześnie jest określona dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$

Funkcja charakterystyczna jest transformatą Fouriera gęstości prawdpodobieństwa

W podręcznikach teorii prawdopodobieństwa udowadnia się Centralne Twierdzenie Graniczne za pomocą funkcji charakterystycznych (brak założenia o istnieniu wszystkich momentów)