Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

11. Twierdzenia graniczne

20.01.2021

Zadanie 1. *(Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Pokaż, że:*

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$$

gdzie $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ oraz $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$.

Odpowiedź: Zgodnie z definicją zbieżności według prawdopodobieństwo, $\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$ oznacza, że dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \epsilon\big) \;=\; 0, \tag{1}$$

co musimy teraz udowodnić. Wyznaczamy wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $\overline{X}_n$:

$$\begin{aligned} E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{\mu}_n, \\ D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

przy czym przy liczeniu wariancji wykorzystaliśmy niezależność zmiennych $X_1, X_2, \ldots$. Stosujemy do $\overline{X}_n$ nierówność Czebyszewa:

$$P\big(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| > \epsilon\big) \;\leqslant\; \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2},$$

co po podstawieniu wartości oczekiwanej i wariancji daje:

$$P\big(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \epsilon\big) \;\leqslant\; \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

Biorą $n \to \infty$, prawa strona dąży do 0, co implikuje (1) i kończy dowód.

Zadanie 2*. *Pokaż, że zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:*

$$X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Odpowiedź: Zacznijmy od przypomnienia definicji zbieżności:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1 \qquad \left(X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X\right) \tag{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \;=\; 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right) \tag{3}$$

Musimy wykazać, że jeśli (2) jest spełnione, to również spełnione jest (3). Zbieżność (3) można przepisać w równoważny sposób jako:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leqslant \epsilon) \;=\; 1.$$

Rozważmy zdarzenie losowe:

$$A_n = \{\omega \in \Omega \colon |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon\}.$$

Aby udowodnić (3) wystarczy więc pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1, \tag{4}$$

W tym celu rozważymy jeszcze jeden rodzaj zdarzenia:

$$B_n = \{\omega \in \Omega \colon \forall m \geqslant n \, |X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon\}.$$

Zdarzenie B_n jest *silniejsze* od A_n, tzn. jeśli $\omega \in B_n$, to również $\omega \in A_n$, a więc $B_n \subseteq A_n$. Wynika to z faktu, że w zdarzeniu B_n warunek $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$ musi zajść nie tylko dla $m = n$ (jak w zdarzeniu A_n), ale również *dla wszystkich* $m > n$. Pokażemy, że zbieżność z prawdopodobieństwem jeden (2) implikuje:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1. \tag{5}$$

Ponieważ $B_n \subseteq A_n$, z monotoniczności miary prawdopodobieństwa mamy $P(B_n) \leqslant P(A_n)$, a więc skoro $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$, to również $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$; tym samym zajdzie (4) i udowodnimy (3). Pozostaje więc nam pokazać, że zachodzi (5).

W tym celu zauważmy, że ciąg zdarzeń $B_1, B_2, B_3, \ldots$ jest ciągiem *wstępującym*, tzn:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$$

Wynika to z tego, że jeśli np. $\omega \in B_1$ („dla wszystkich $m \geqslant 1$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$”), to również $\omega \in B_2$ („dla wszystkich $m \geqslant 2$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$”), itp. Definiując teraz zdarzenie:

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

z ciągłości miary prawdopodobieństwa dla ciągów wstępujących (patrz: wykład II o aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa) wynika, że:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B). \tag{6}$$

Czy jest zdarzenie B? Należą do niego zdarzenia elementarne ω, które znajdują się w *którymkolwiek* ze zdarzeń B_n (z definicji sumy zdarzeń). Innymi słowy $\omega \in B$, jeśli istnieje takie n, że dla wszystkich $m \geqslant n$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$. Ale z definicji granicy, to są *dokładnie te zdarzenia*, dla których mamy $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$:

$$B = \{\omega \in \Omega \colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}.$$

Ponieważ zbieżność z prawdopodobieństwem jeden (2) mówi, że $P(B) = 1$, z (6) wynika, że $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$, a więc pokazaliśmy, że zachodzi (5), co kończy dowód.

Zadanie 3. *Rozważ spacer losowy po prostej, w którym w każdym kroku idziemy o jeden w prawo z prawdopodobieństwem p lub o jeden w lewo z prawdopodobieństwem $1-p$, rozpoczynając od zera. Niech S_n oznacza położenie spacerowicza w chwili n ($S_0 = 0$). Innymi słowy, $S_n = X_1 + \ldots X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi z $P(X_i = 1) = p$ i $P(X_i = -1) = 1-p$. Udowodnij, że jeśli $p > \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, natomiast jeśli $p < \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.*

Odpowiedź: Dla każdego zmiennej $X_i, i = 1, \ldots, n$, obliczmy wartość oczekiwaną μ i wariancję σ^2:

$$\begin{aligned}
\mu &= EX_i = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1, \\
\sigma^2 &= D^2(X_i) = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = \big(p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot (-1)^2\big) - (2p-1)^2 = 1 - (2p-1)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Z mocnego prawa wielkich liczb (Chińczyna) wynika, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \;=\; \mu \;=\; 2p-1.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, a więc:

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(\overline{X}_n \cdot n\big) \;=\; \big(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n\big) \cdot \big(\lim_{n\to\infty} n\big) \;=\; (2p-1)\cdot\infty,$$

czyli granicą jest ∞ dla $2p-1>0 \iff p>\frac{1}{2}$, oraz $-\infty$ dla $2p-1<0 \iff p<\frac{1}{2}$.