Metody probabilistyczne

11. Twierdzenia graniczne

Wojciech Kotłowski

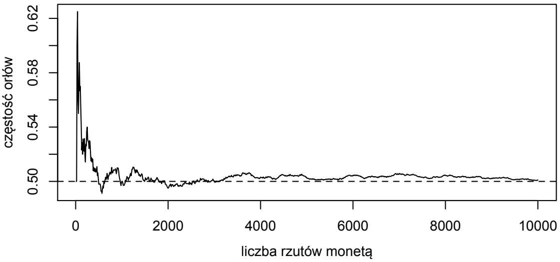
Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

20.01.2021

Motywacja

Rzucamy wielokrotnie uczciwą monetą i zliczamy częstość orłów: $\frac{\#\text{orłów}}{\#\text{rzutów}}$.

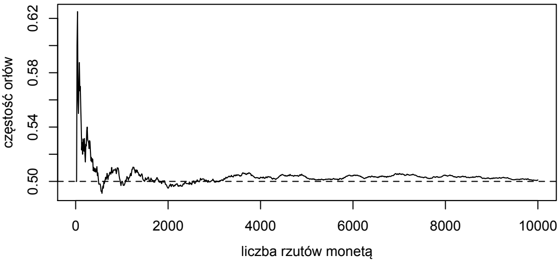
Obserwujemy zmiany tej częstości w miarę zwiększania liczby rzutów:



Motywacja

Rzucamy wielokrotnie uczciwą monetą i zliczamy częstość orłów: $\frac{\#\text{orłów}}{\#\text{rzutów}}$.

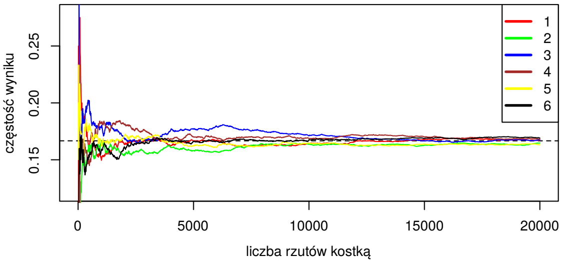
Obserwujemy zmiany tej częstości w miarę zwiększania liczby rzutów:



Wniosek: Częstość orłów zbiega do $\frac{1}{2}$, czyli prawdopodobieństwa wyrzucenia orła!

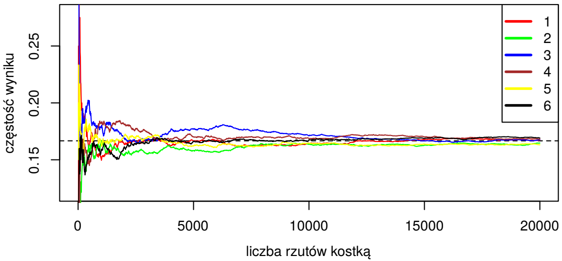
Motywacja

Podobna obserwacja dla wyników rzutu kostką (zliczamy częstość każdego wyniku $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



Motywacja

Podobna obserwacja dla wyników rzutu kostką (zliczamy częstość każdego wyniku $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



Częstość każdego wyniku zbiega do jego prawdopodobieństwa $\frac{1}{6} \simeq 0.167$.

Prawo wielkich liczb (nieformalnie)

Sformułowane przez Jakuba Bernoulliego w wydanej pośmiertnie *Ars Conjectandi* (1713):

Przy dostatecznie dużej liczbie powtórzeń doświadczenia losowego częstość zajścia danego zdarzenia losowego będzie dowolnie blisko jego prawdopodobieństwu

Jakub Bernoulli
(1654-1705)

Prawo wielkich liczb (nieformalnie)

Sformułowane przez Jakuba Bernoulliego w wydanej pośmiertnie *Ars Conjectandi* (1713):

Przy dostatecznie dużej liczbie powtórzeń doświadczenia losowego częstość zajścia danego zdarzenia losowego będzie dowolnie blisko jego prawdopodobieństwu

Jakub Bernoulli
(1654-1705)

Często myślimy o prawie wielkich liczb jako metodzie definiowania prawdopodobieństw!

- „Szansa zachorowania na grypę w danym roku wynosi 15%"
- „Szansa awarii urządzenia w danym miesiącu wynosi 0.1%"
- „Szansa wygrania w tej grze wynosi 50%"
- „Szansa, że będzie jutro padać wynosi 80%"

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

- Rozważmy n niezależnych doświadczeń losowych, w których obserwujemy zajścia danego zdarzenia losowego A

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

- Rozważmy n niezależnych doświadczeń losowych, w których obserwujemy zajścia danego zdarzenia losowego A
- Zdefiniujmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \;\; \omega \in A \qquad (\text{„}A \text{ zaszło''}) \\ 0 & \text{jeśli} \;\; \omega \notin A \qquad (\text{„}A \text{ nie zaszło''}) \end{cases}$$

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

- Rozważmy n niezależnych doświadczeń losowych, w których obserwujemy zajścia danego zdarzenia losowego A
- Zdefiniujmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \;\; \omega \in A \qquad (\text{„}A \text{ zaszło''}) \\ 0 & \text{jeśli} \;\; \omega \notin A \qquad (\text{„}A \text{ nie zaszło''}) \end{cases}$$

- Zmienne te są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $B(p)$ z parametrem $p = P(X_i = 1) = P(A)$ (schemat Bernoulliego)
  - Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
  - Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

- Rozważmy n niezależnych doświadczeń losowych, w których obserwujemy zajścia danego zdarzenia losowego A
- Zdefiniujmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega \in A \qquad (\text{„}A \text{ zaszło"}) \\ 0 & \text{jeśli } \omega \notin A \qquad (\text{„}A \text{ nie zaszło"}) \end{cases}$$

- Zmienne te są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $B(p)$ z parametrem $p = P(X_i = 1) = P(A)$ (schemat Bernoulliego)
  - Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
  - Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)
- „Częstość zajścia zdarzenia A" = „częstość sukcesów" = $\frac{S_n}{n}$, gdzie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ to liczba sukcesów

Częstości zdarzeń a schemat Bernoulliego

Zajście/niezajście danego zdarzenia losowego można zakodować za pomocą zmiennej losowej o rozkładzie dwupunktowym:

- Rozważmy n niezależnych doświadczeń losowych, w których obserwujemy zajścia danego zdarzenia losowego A
- Zdefiniujmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 \quad \text{jeśli} \;\; \omega \in A & \text{(„}A\text{ zaszło”)} \\ 0 \quad \text{jeśli} \;\; \omega \notin A & \text{(„}A\text{ nie zaszło”)} \end{cases}$$

- Zmienne te są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $B(p)$ z parametrem $p = P(X_i = 1) = P(A)$ (schemat Bernoulliego)
  - Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
  - Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6” / „nie wypadło 6” ($p = \frac{1}{6}$)
- „Częstość zajścia zdarzenia A” = „częstość sukcesów” $= \frac{S_n}{n}$, gdzie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ to liczba sukcesów
- Prawo wielkich liczb: dla dostatecznie dużych n, $\frac{S_n}{n}$ (częstość zajścia A) będzie dowolnie blisko p (prawdopodobieństwu zajścia A)

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n =$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n \;=\; np, \qquad D^2(S_n) \;=$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

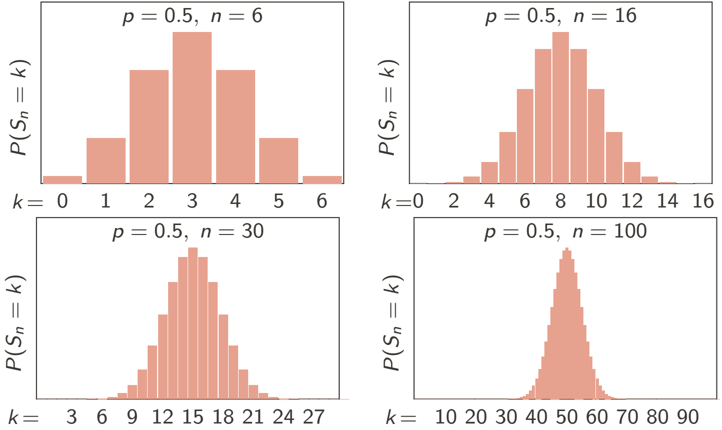
$$ES_n = np, \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n \;=\; np, \qquad D^2(S_n) \;=\; np(1-p)$$



Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n = np, \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n =$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n \; = \; np, \qquad D^2(S_n) \; = \; np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n \; = \; E\left(\frac{S_n}{n}\right) \; = \; \frac{ES_n}{n} \; = \; p$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n,p)$

$$ES_n \;=\; np, \qquad D^2(S_n) \;=\; np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n \;=\; E\left(\frac{S_n}{n}\right) \;=\; \frac{ES_n}{n} \;=\; p$$

$$D^2(\overline{X}_n)$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n = np, \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{ES_n}{n} = p$$

$$D^2(\overline{X}_n) = D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D^2(S_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n = np, \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

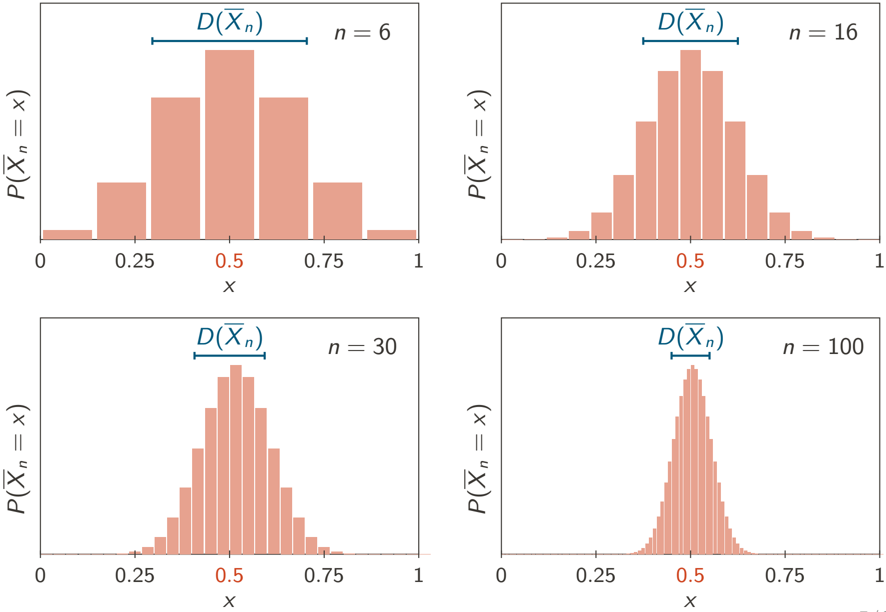
Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{ES_n}{n} = p$$

$$D^2(\overline{X}_n) = D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D^2(S_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$D(\overline{X}_n) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Rozkład zmiennej $\overline{X}_n$ (dla $p = \frac{1}{2}$)



Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P\left(|X - EX| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

$E\overline{X}_n = p$

$D^2(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Szansa odchylenia się częstości o więcej niż ϵ od prawdopodobieństwa sukcesu maleje z n

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P\big(|X - EX| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P\big(|\overline{X}_n - p| > \epsilon\big) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Szansa odchylenia się częstości o co najwyżej ϵ od prawdopodobieństwa sukcesu rośnie z n

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad P(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Dla dowolnego $\epsilon > 0$:

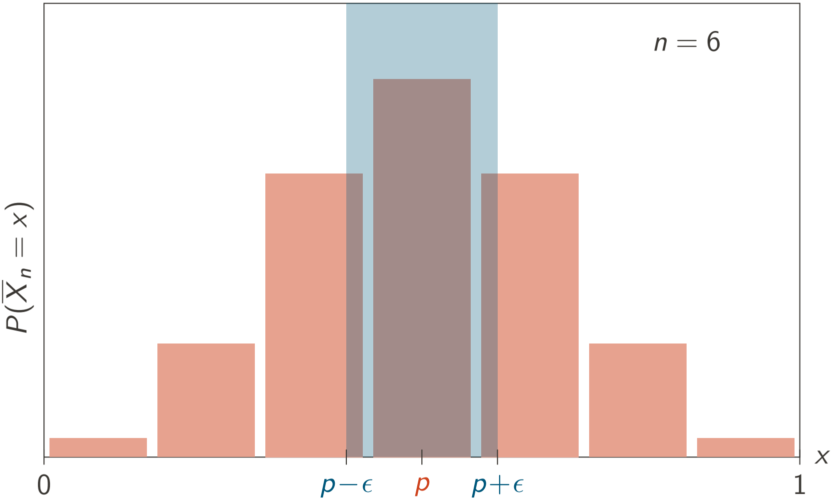
$$\lim_{n \to \infty} P(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon) \; = \; 1$$

Zmienna losowa $\overline{X}_n$ zbiega „według prawdopodobieństwa” do p.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = 1$$

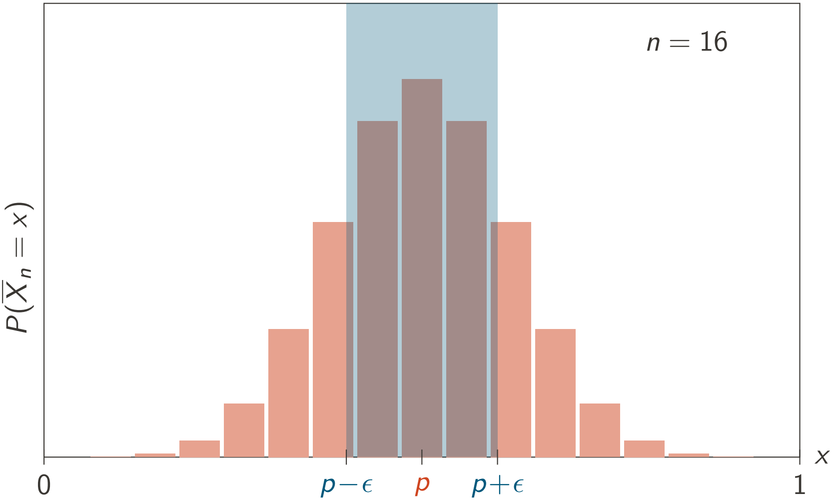
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; 1$$

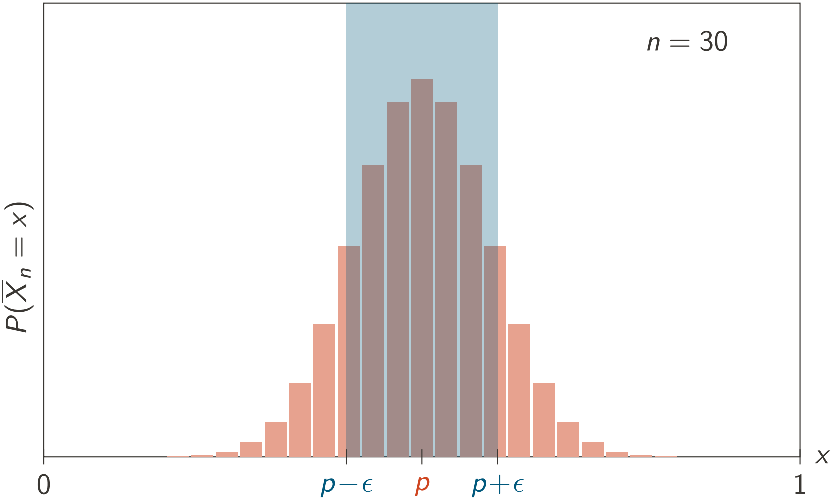
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = 1$$

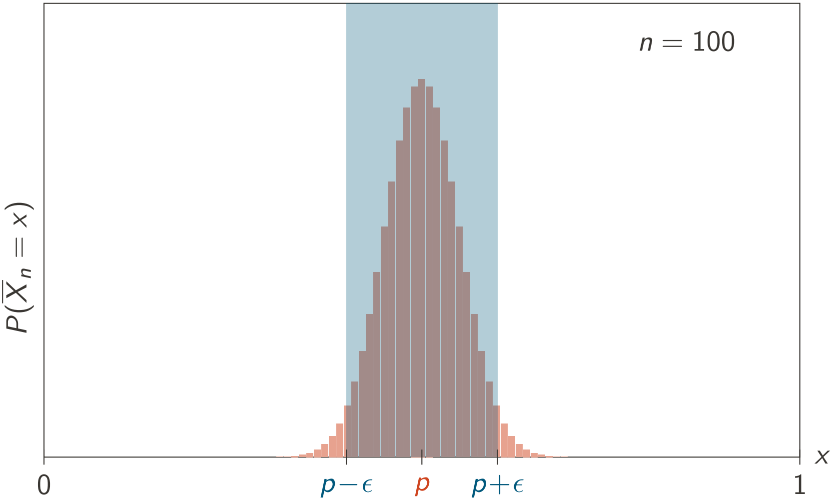
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; 1$$

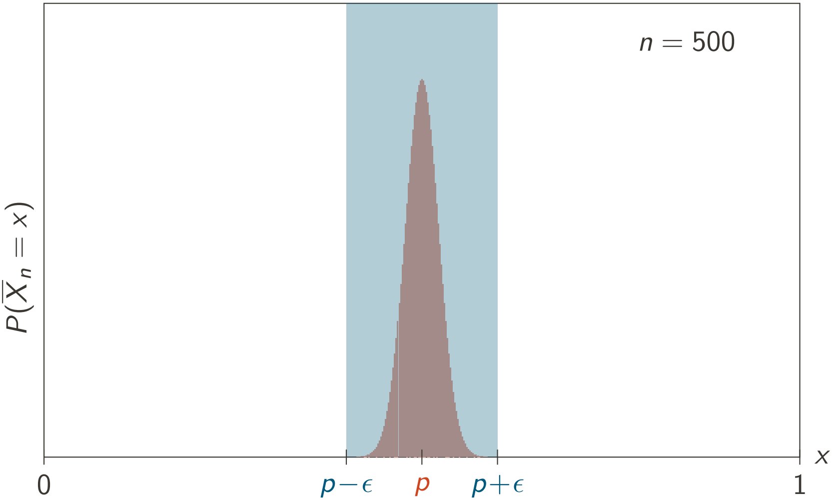
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) \ = \ 1$$

$$P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) \ = \ P\big(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\big)$$



Prawo wielkich liczb ogólniej

- Pokazaliśmy, że częstość zajścia zdarzenia losowego zbiega do jego prawdopodobieństwa
- Wykorzystaliśmy fakt, że z dużym prawdopodobieństwem średnia arytmetyczna z n zmiennych dwupunktowych („częstość sukcesów") jest bliska wartości oczekiwanej (prawdopodobieństwa sukcesu)...

Prawo wielkich liczb ogólniej

- Pokazaliśmy, że częstość zajścia zdarzenia losowego zbiega do jego prawdopodobieństwa
- Wykorzystaliśmy fakt, że z dużym prawdopodobieństwem średnia arytmetyczna z n zmiennych dwupunktowych („częstość sukcesów") jest bliska wartości oczekiwanej (prawdopodobieństwa sukcesu)...
  ...ale to zjawisko zachodzi również dla innych zmiennych losowych!
- Uogólnimy prawo wielkich liczb na stwierdzenie:
  „Dla dostatecznie dużych n, średnia arytmetyczna z n realizacji zmiennej losowej jest dowolnie blisko jej wartości oczekiwanej"

Prawo wielkich liczb ogólniej

- Pokazaliśmy, że częstość zajścia zdarzenia losowego zbiega do jego prawdopodobieństwa
- Wykorzystaliśmy fakt, że z dużym prawdopodobieństwem średnia arytmetyczna z n zmiennych dwupunktowych („częstość sukcesów") jest bliska wartości oczekiwanej (prawdopodobieństwa sukcesu)...
  ...ale to zjawisko zachodzi również dla innych zmiennych losowych!
- Uogólnimy prawo wielkich liczb na stwierdzenie:
  „Dla dostatecznie dużych n, średnia arytmetyczna z n realizacji zmiennej losowej jest dowolnie blisko jej wartości oczekiwanej"
  - Dla dużych n, średnia z n wyników rzutów kostką jest blisko 3.5
  - Dla dużych n, średnia wartość wygranej w n niezależnych grach jest blisko wartości oczekiwanej wygranej
  - Dla dużych n, średnia z n liczb wylosowanych z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$ jest blisko 0.5

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n \quad =$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

$$D^2(\overline{X}_n) =$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$
\begin{aligned}
E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu \\
D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\begin{aligned} E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu \\ D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Stosujemy nierówność Czebyszewa:

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\begin{aligned} E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu \\ D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Stosujemy nierówność Czebyszewa:

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leqslant \epsilon\right) = 1$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leqslant \epsilon\right) \;=\; 1$$

Prawo wielkich liczb Bernoulliego jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia, jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy.

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \; = \; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \;=\; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

W szczególności, jeśli X ma rozkład jednopunktowy, tzn. $P(X = c) = 1$, zapisujemy $X_n \xrightarrow{P} c$.

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \;=\; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

W szczególności, jeśli X ma rozkład jednopunktowy, tzn. $P(X = c) = 1$, zapisujemy $X_n \xrightarrow{P} c$.

Korzystając z powyższej równości możemy przepisać prawa wielkich liczb

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Wtedy

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$. Wtedy

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$$

Zadanie 1

Udowodnij to twierdzenie

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X$$

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\lim_{n\to\infty} X_n \;=\; X$$

Ta równość tyczy się zmiennych losowych,
powyższe wyrażenie jest więc zdarzeniem losowym!

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \; = \; X(\omega)$$

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \;=\; X(\omega)$$

To stwierdzenie nazywa się zbieżnością „na pewno”: zbieżność zachodzi dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

Zwykle zbyt silne, ponieważ musi zajść dla ω, dla których $P(\{\omega\}) = 0$ (np. dla schematu Bernoulliego może się zdarzyć (z prawd. 0), że zaobserwujemy same porażki)

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \;=\; X(\omega)$$

To stwierdzenie nazywa się zbieżnością „na pewno”: zbieżność zachodzi dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

Zwykle zbyt silne, ponieważ musi zajść dla ω, dla których $P(\{\omega\}) = 0$ (np. dla schematu Bernoulliego może się zdarzyć (z prawd. 0), że zaobserwujemy same porażki)

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem jeden („prawie na pewno”) jeśli:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1$$

Zapisujemy $X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$
\begin{array}{rrcl}
 & P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) & = & 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right) \\
\forall \epsilon > 0 & \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) & = & 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)
\end{array}
$$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \overset{P}{\longrightarrow} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \overset{P}{\longrightarrow} X$$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Zadanie 2*

Udowodnij tę implikację.
Wskazówka: można użyć twierdzenia o wstępującym ciągu zdarzeń.

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \;=\; 0 \qquad \left(X_n \overset{P}{\longrightarrow} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \overset{P}{\longrightarrow} X$$

Zadanie 2*

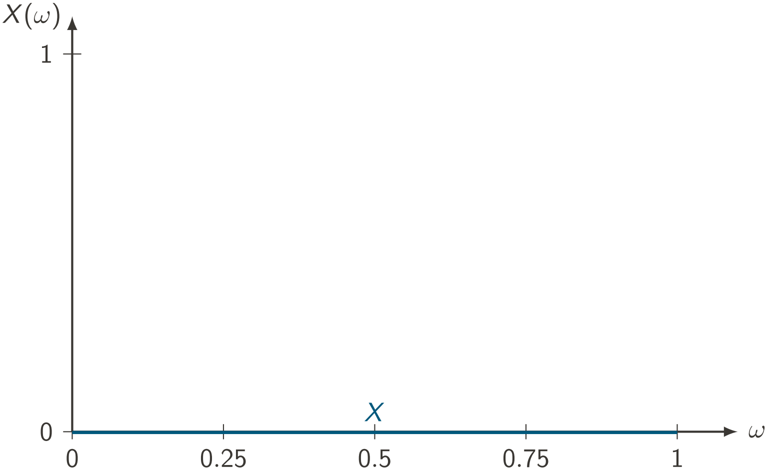
Udowodnij tę implikację.
Wskazówka: można użyć twierdzenia o wstępującym ciągu zdarzeń.

Pokażemy kontrprzykład, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi

Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0,1]$, P – rozkład jednostajny na $[0,1]$.

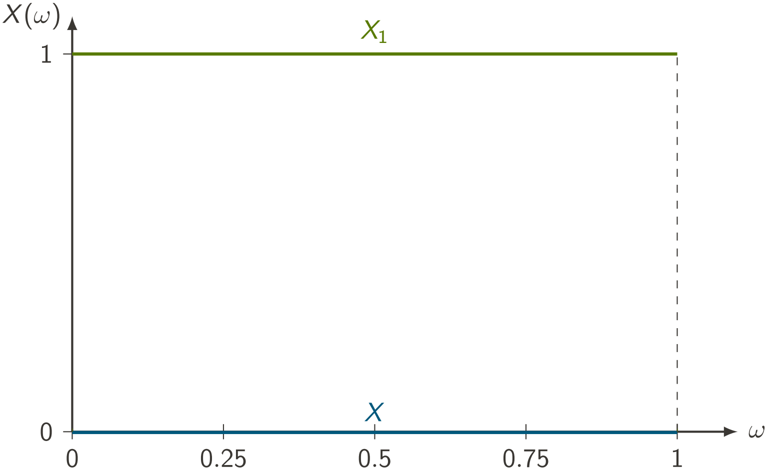
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0,1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0,1]$, P – rozkład jednostajny na $[0,1]$.

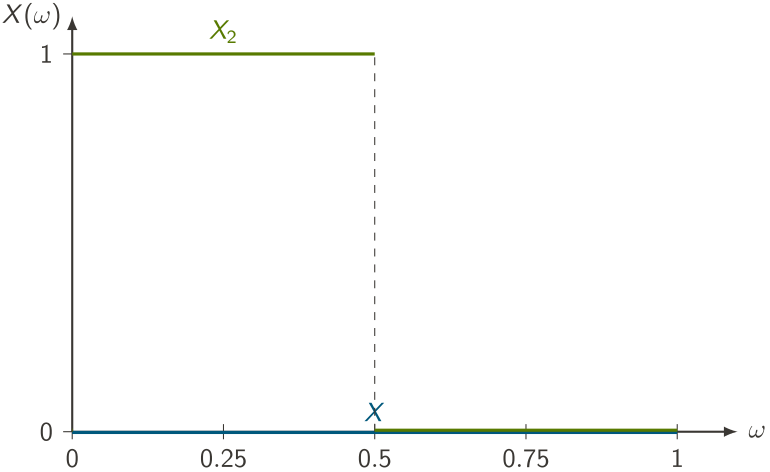
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0,1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0,1]$, P – rozkład jednostajny na $[0,1]$.

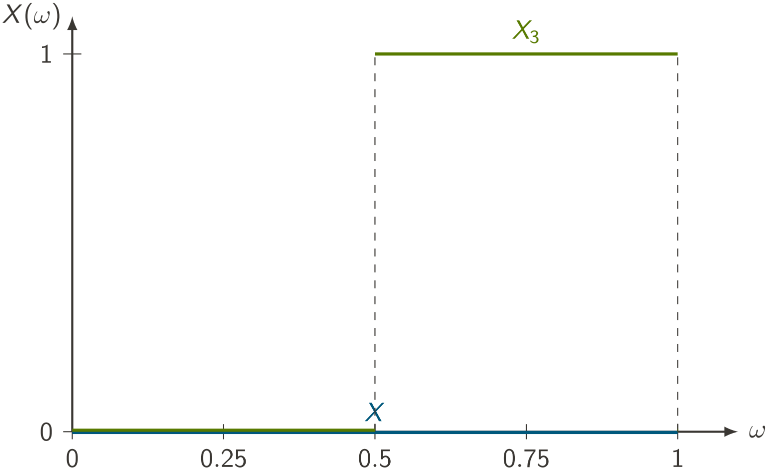
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall\omega \in [0,1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

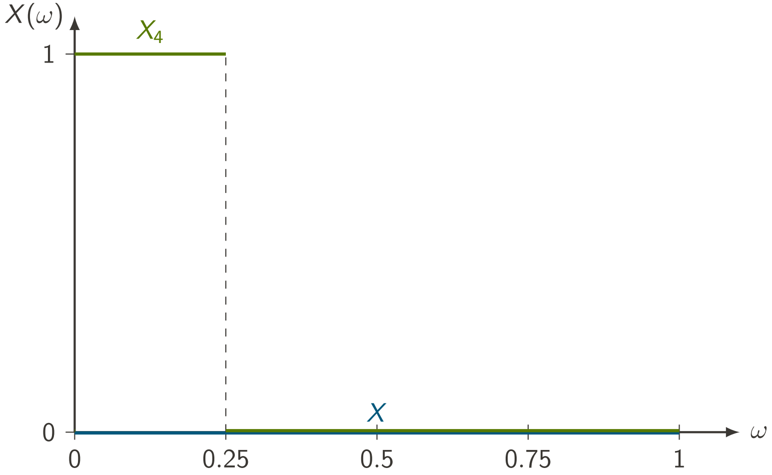
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

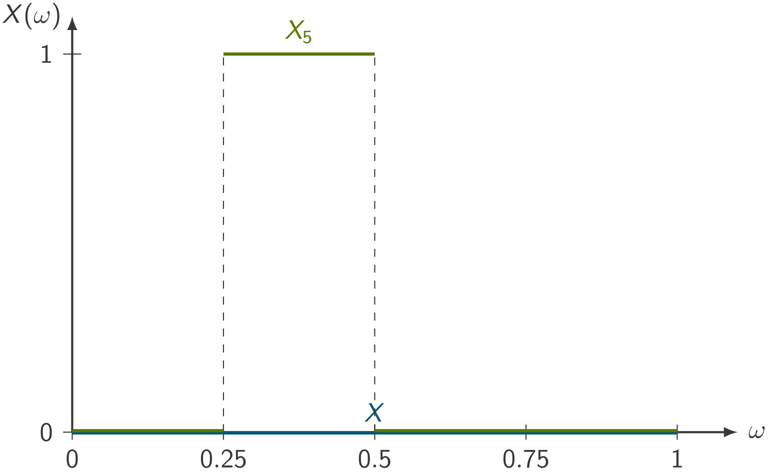
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

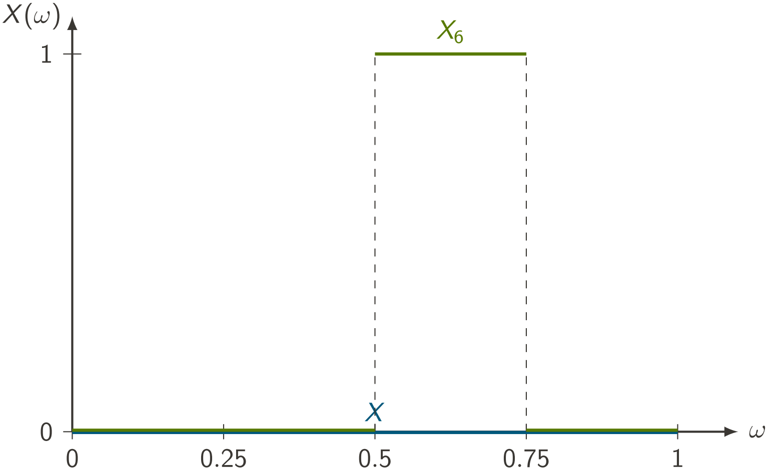
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

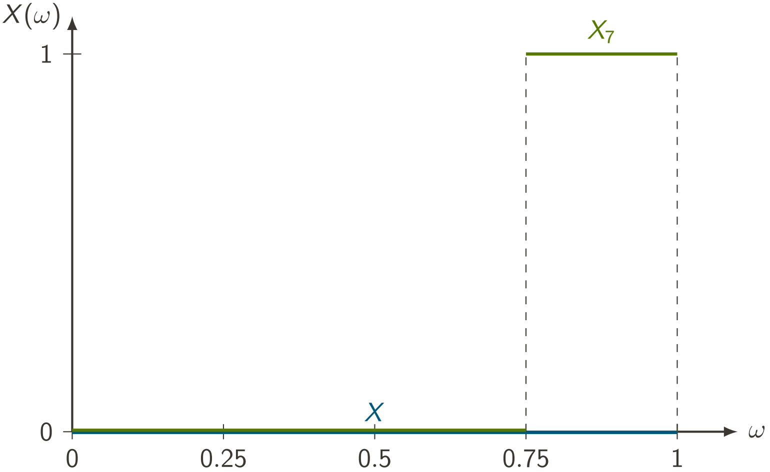
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

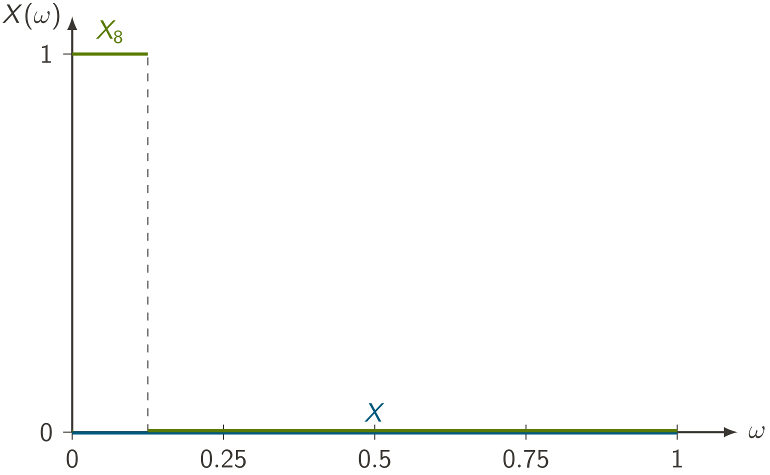
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

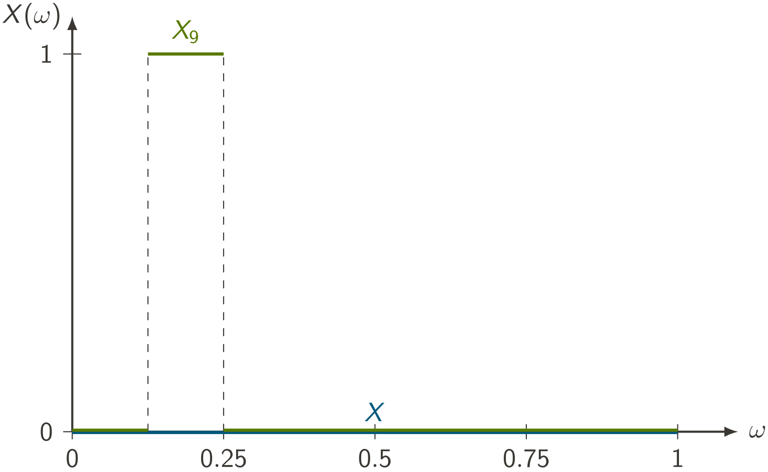
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

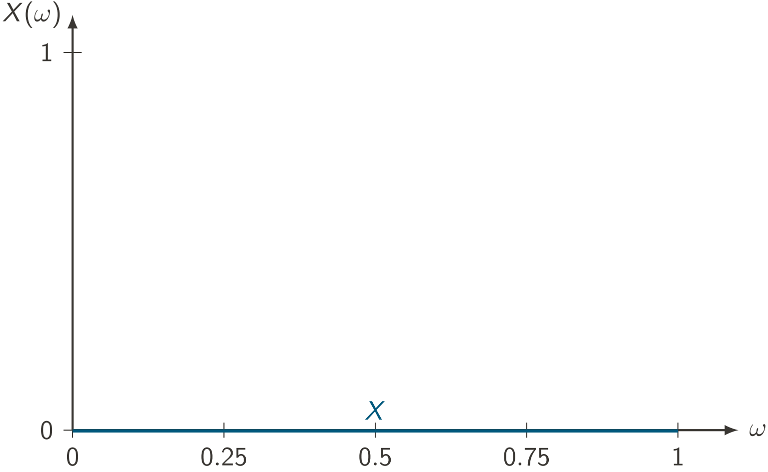
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

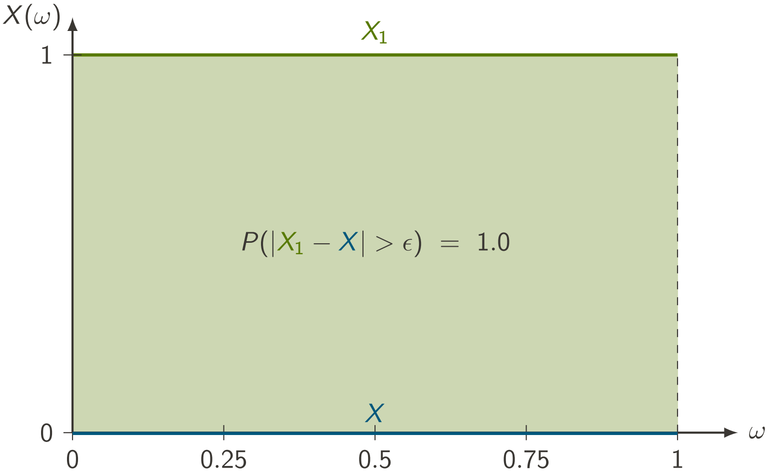
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

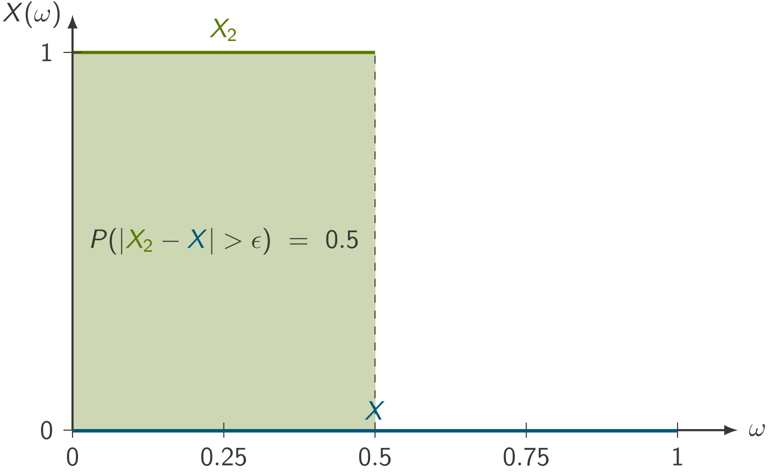
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

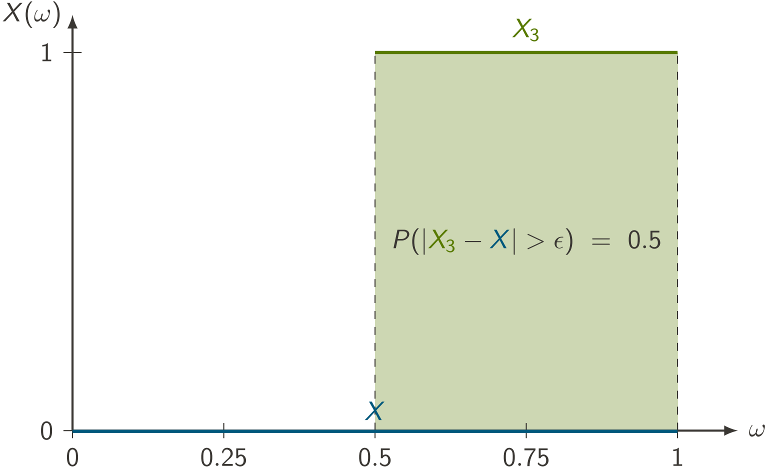
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

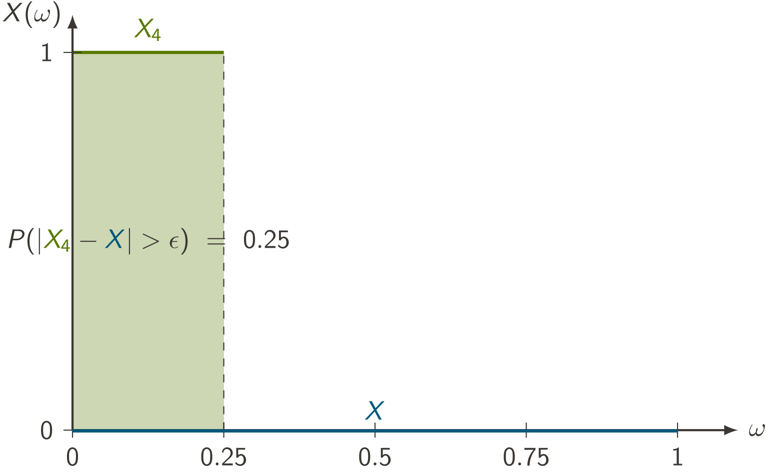
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

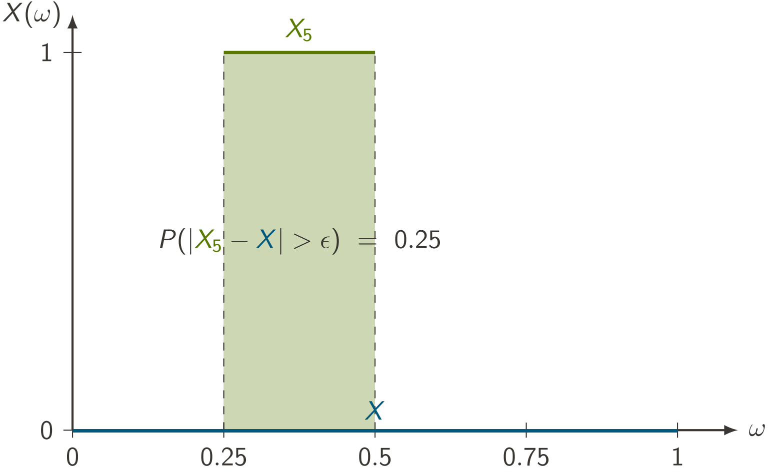
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

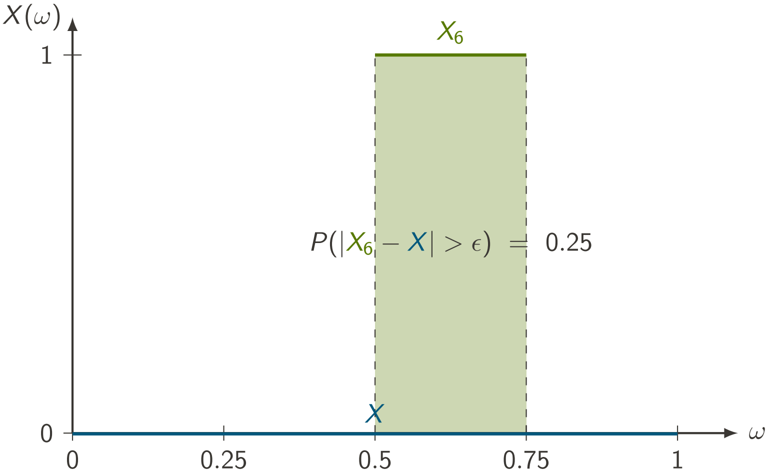
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

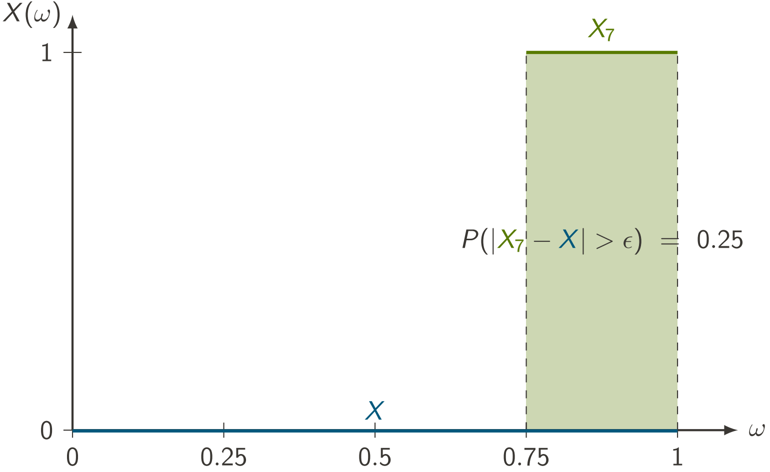
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

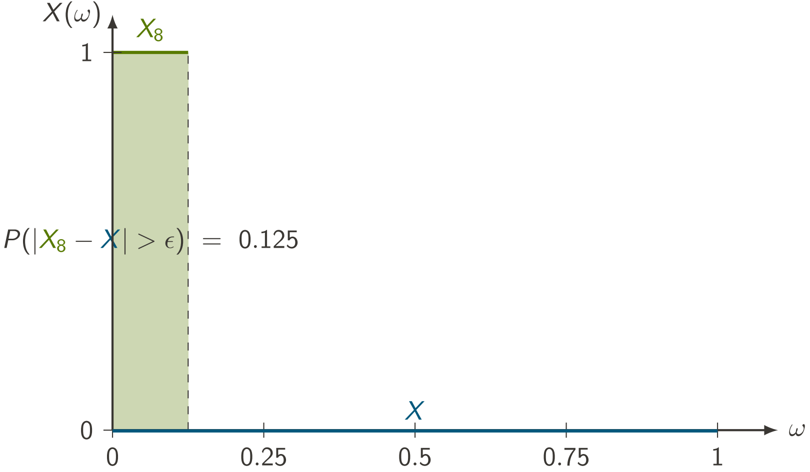
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0,1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

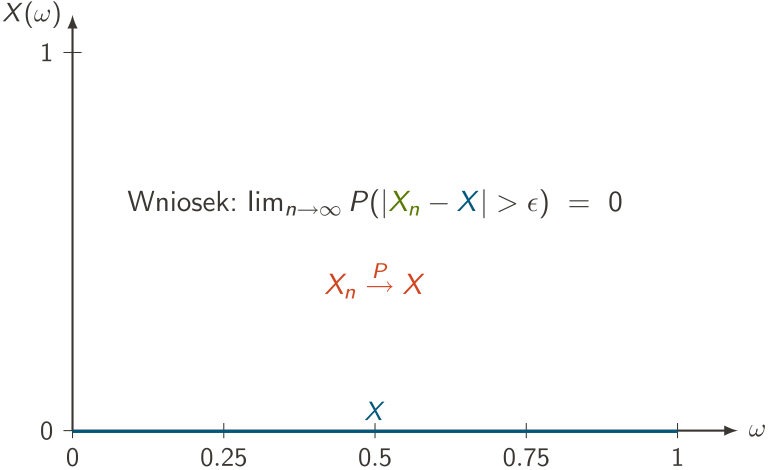
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$

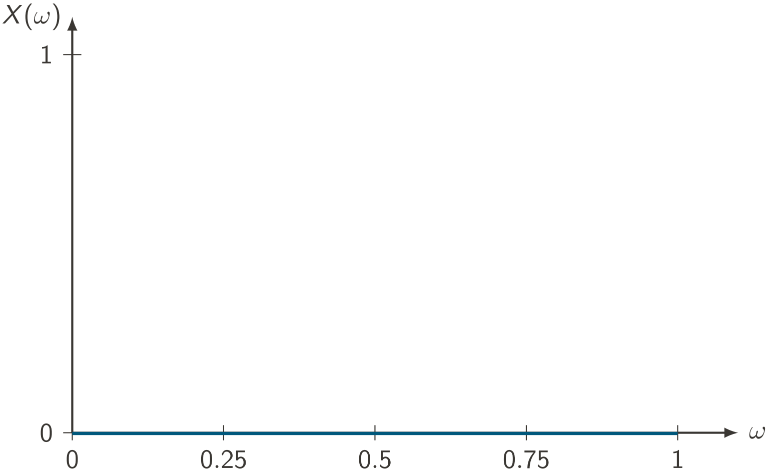


Wniosek: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

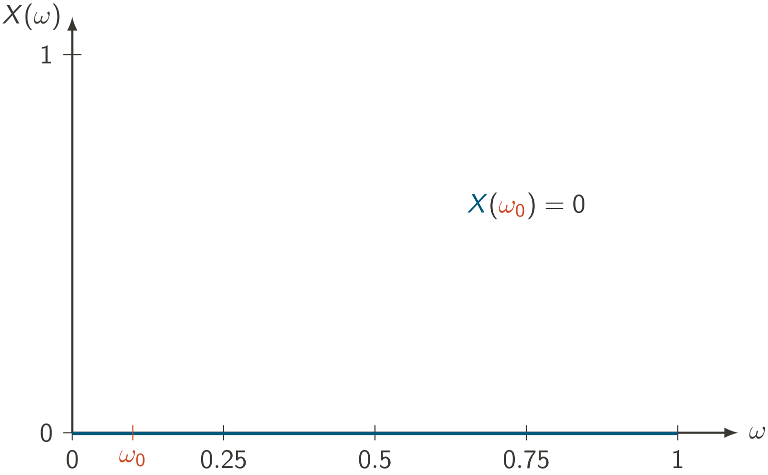
Ale: $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

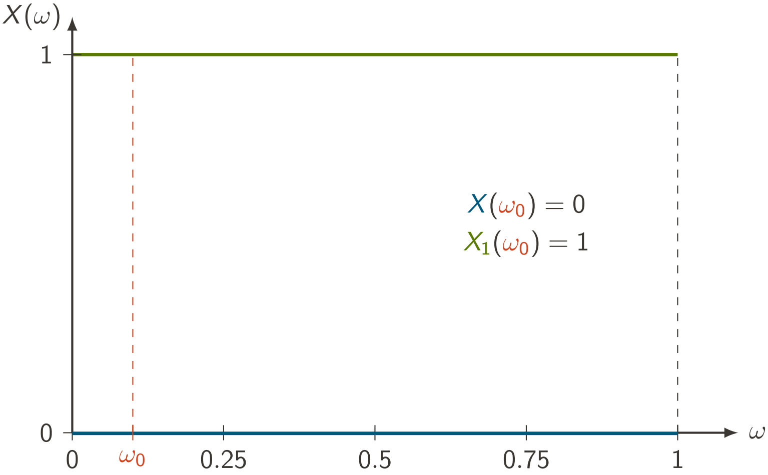
$X_n(\omega_0) =$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

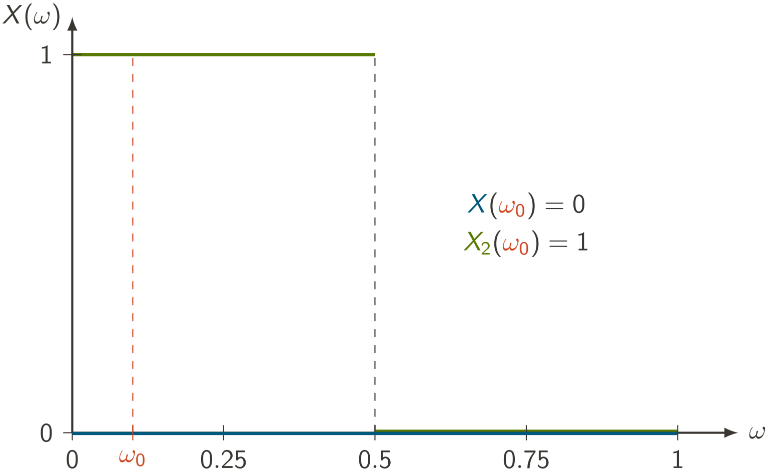
$$X_n(\omega_0) \;=\; 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

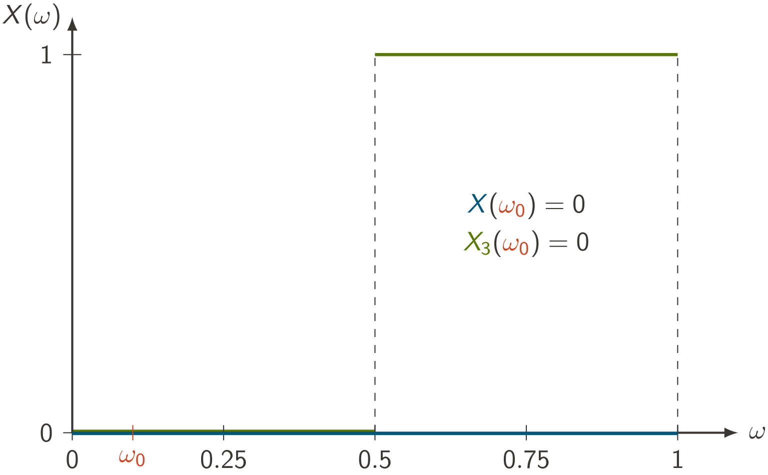
$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

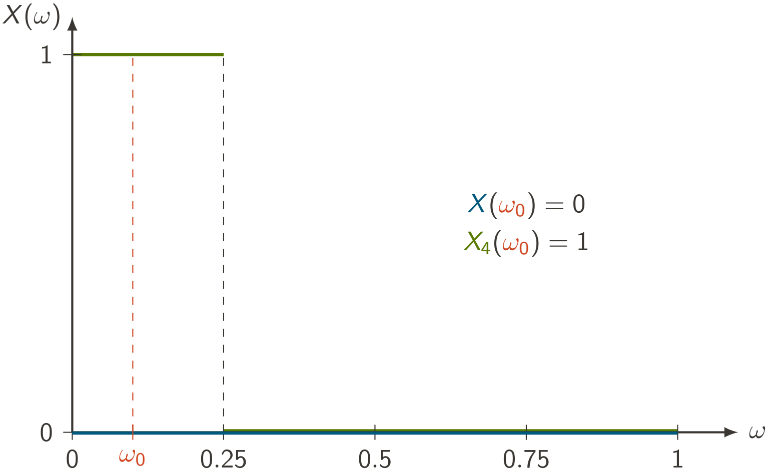
$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

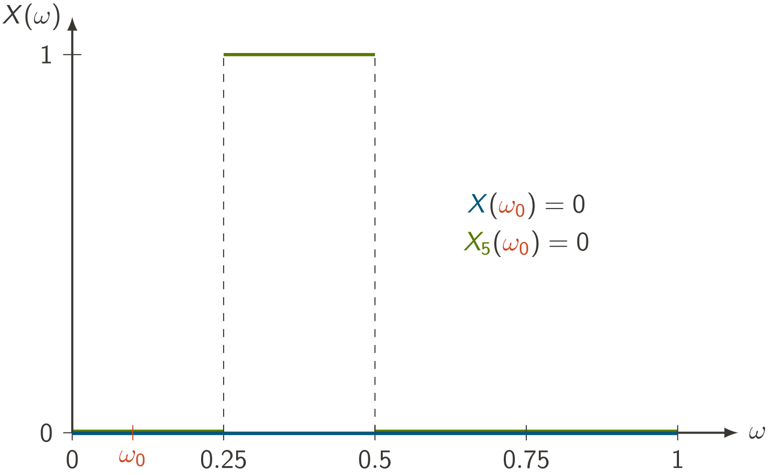
$$X_n(\omega_0) \; = \; 1, 1, 0, 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

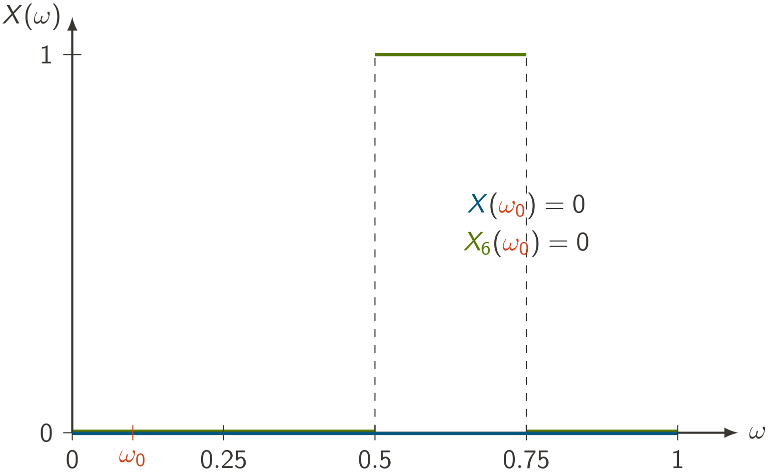
$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0, 1, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

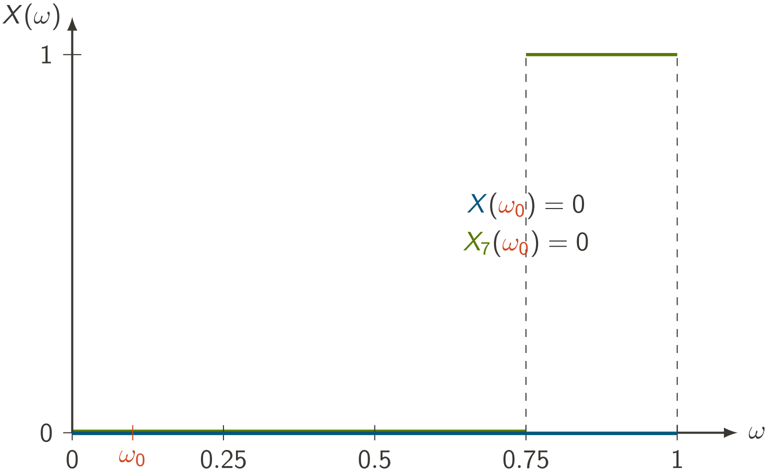
$$X_n(\omega_0) \ = \ 1, 1, 0, 1, 0, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

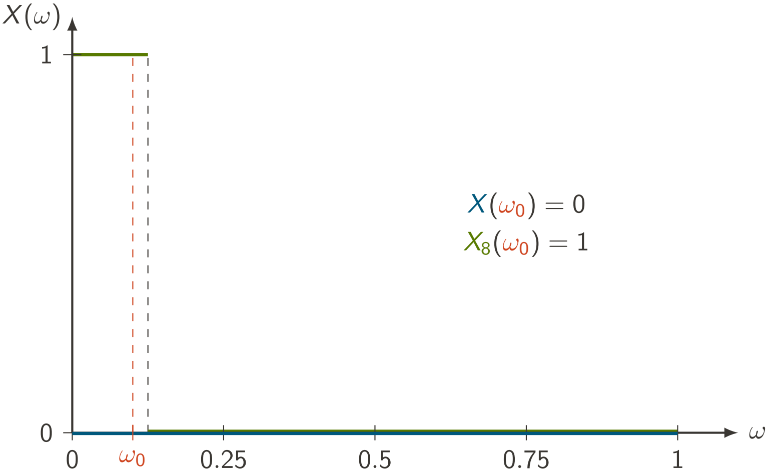
$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) \; = \; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

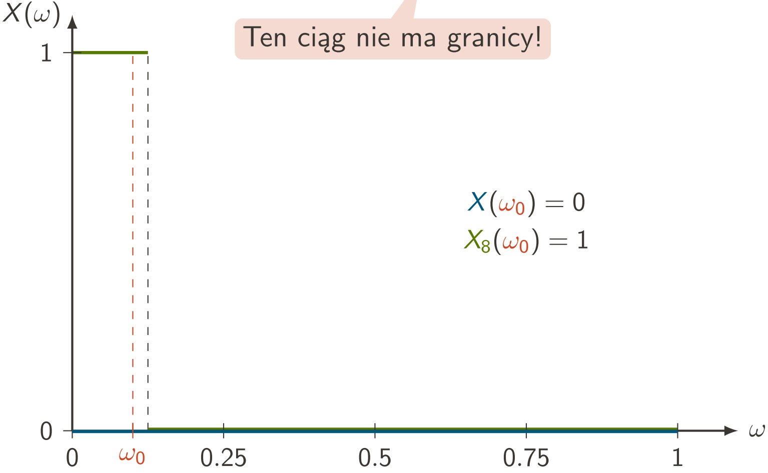


Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie ma granicy!

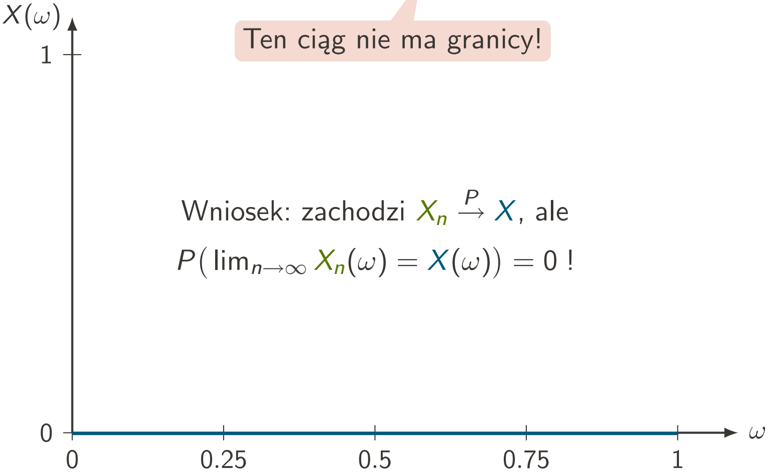


Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) \ = \ 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie ma granicy!



Wniosek: zachodzi $X_n \xrightarrow{P} X$, ale

$P(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 0$!

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \not\Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$$

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \not\Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$$

Mimo to prawa wielkich liczb można wzmocnić do warunku $X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \not\Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$$

Mimo to prawa wielkich liczb można **wzmocnić** do warunku $X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$

Mocne prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, z wartość oczekiwaną μ i wariancją $\sigma^2 < \infty$. Wtedy:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} \mu$$

Mocne prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z$EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2. Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Wtedy:

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} 0$$

Twierdzenia pozostawiamy bez dowodu.

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dotyczy powtarzalnych doświadczeń losowych.

Powtórzmy n razy doświadczenie losowe.

Dla dowolnego zdarzenia A, niech n_A oznacza liczbę doświadczeń w których A zaszło.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest graniczną wartością częstości:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dotyczy powtarzalnych doświadczeń losowych.

Powtórzmy n razy doświadczenie losowe.

Dla dowolnego zdarzenia A, niech n_A oznacza liczbę doświadczeń w których A zaszło.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest graniczną wartością częstości:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

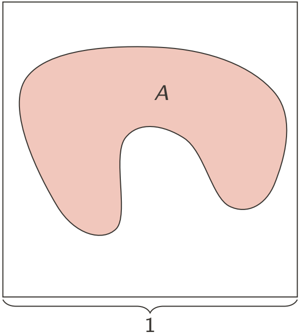
Z mocnego prawa wielkich wnioskujemy wiemy, że powyższe zachodzi z prawdopodobieństwem jeden

Uzasadnia to częstościową interpretację prawdopodobieństwa (choć niektórzy twierdzą, że to błędne koło w rozumowaniu)

Przykład: metoda Monte Carlo

W kwadrat o boku 1 wpisano nieregularną figurę A.

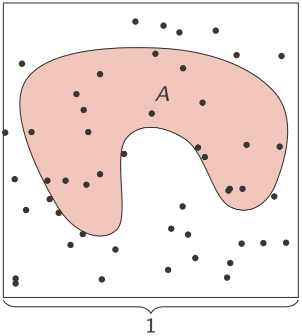
Wyznacz pole powierzchni figury (ozn. $|A|$), jeśli łatwo można sprawdzić, czy dany punkt w kwadracie należy do figury.



Przykład: metoda Monte Carlo

W kwadrat o boku 1 wpisano nieregularną figurę A.

Wyznacz pole powierzchni figury (ozn. $|A|$), jeśli łatwo można sprawdzić, czy dany punkt w kwadracie należy do figury.

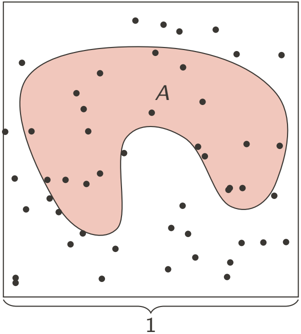


Rozwiązanie: losujemy jednostajnie n punktów z kwadratu; niech $X_i \in \{0, 1\}$ określa czy i-ty punkt trafił w figurę ($X_i = 1$) czy nie ($X_i = 0$)

Przykład: metoda Monte Carlo

W kwadrat o boku 1 wpisano nieregularną figurę A.

Wyznacz pole powierzchni figury (ozn. $|A|$), jeśli łatwo można sprawdzić, czy dany punkt w kwadracie należy do figury.



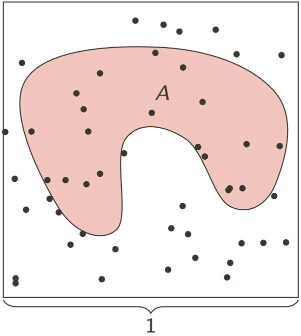
Rozwiązanie: losujemy jednostajnie n punktów z kwadratu; niech $X_i \in \{0, 1\}$ określa czy i-ty punkt trafił w figurę ($X_i = 1$) czy nie ($X_i = 0$)

$$EX_i \;=\; P(X_i = 1) \;=\; P(\text{trafienie w } A) \;=\; \frac{|A|}{1 \cdot 1} = |A|$$

Przykład: metoda Monte Carlo

W kwadrat o boku 1 wpisano nieregularną figurę A.

Wyznacz pole powierzchni figury (ozn. $|A|$), jeśli łatwo można sprawdzić, czy dany punkt w kwadracie należy do figury.



Rozwiązanie: losujemy jednostajnie n punktów z kwadratu; niech $X_i \in \{0, 1\}$ określa czy i-ty punkt trafił w figurę ($X_i = 1$) czy nie ($X_i = 0$)

$$EX_i \;=\; P(X_i = 1) \;=\; P(\text{trafienie w } A) \;=\; \frac{|A|}{1 \cdot 1} = |A|$$

Z prawa wielkich liczb częstość trafień zbiega do pola figury:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;\xrightarrow{\text{z pr. } 1}\; |A|$$

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} = \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} \;=\; \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Rozwiązanie:

- Losujemy punkty $\boldsymbol{X}_i, i = 1, \ldots, n$ jednostajnie na zbiorze A
- Definiujemy zmienne losowej $Y_i = g(\boldsymbol{X}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- Z prawa wielkich liczb:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \;\xrightarrow{\text{z pr. 1}}\; EY_i$$

Czym jest EY_i?

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} \; = \; \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Rozwiązanie:

- Losujemy punkty $\boldsymbol{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ jednostajnie na zbiorze A
- Definiujemy zmienne losowej $Y_i = g(\boldsymbol{X}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- Z prawa wielkich liczb:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \; \xrightarrow{\text{z pr. 1}} \; EY_i$$

Czym jest EY_i?

$$EY_i \; = \; Eg(\boldsymbol{X}_i) \; = \; \int g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} \;=\; \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Rozwiązanie:

- Losujemy punkty $\boldsymbol{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ jednostajnie na zbiorze A
- Definiujemy zmienne los
- Z prawa wielkich liczb:

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej o rozkładzie jednostajnym na A:

$$f_{\boldsymbol{X}_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \boldsymbol{x} \in A \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin A \end{cases}$$

Czym jest EY_i?

$$EY_i \;=\; Eg(\boldsymbol{X}_i) \;=\; \int g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} \; = \; \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Rozwiązanie:

- Losujemy punkty $\boldsymbol{X}_i, i = 1, \ldots, n$ jednostajnie na zbiorze A
- Definiujemy zmienne losowej $Y_i = g(\boldsymbol{X}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- Z prawa wielkich liczb:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \; \xrightarrow{\text{z pr. 1}} \; EY_i$$

Czym jest EY_i?

$$EY_i \; = \; Eg(\boldsymbol{X}_i) \; = \; \int g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \; = \; \frac{1}{|A|}\int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \; = \; \frac{\mathcal{C}}{|A|}$$

Przykład: metoda Monte Carlo

Mając zadaną funkcję $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, wyznacz całkę na pewnym (ograniczonym) zbiorze $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{C} \;=\; \int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Rozwiązanie:

- Losujemy punkty $\boldsymbol{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ jednostajnie na zbiorze A
- Definiujemy zmienne losowej $Y_i = g(\boldsymbol{X}_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$
- Z prawa wielkich liczb:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \; EY_i$$

Czym jest EY_i?

$$EY_i \;=\; Eg(\boldsymbol{X}_i) \;=\; \int g(\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}_i}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \frac{1}{|A|}\int_A g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \frac{\mathcal{C}}{|A|}$$

Skuteczna metoda przybliżania całek gdy wymiar d jest duży

Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \overset{\text{z pr. } 1}{\longrightarrow} P(X = k)$

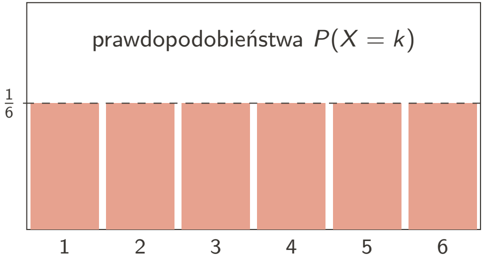
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \stackrel{\text{z pr. } 1}{\longrightarrow} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



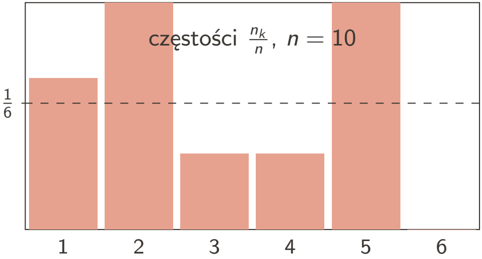
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \xrightarrow{\text{z pr. } 1} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



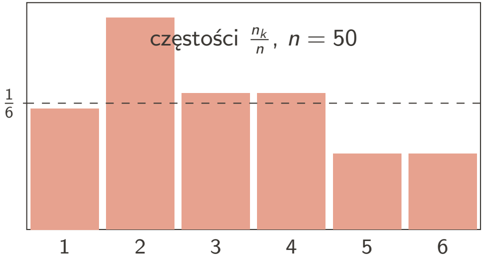
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



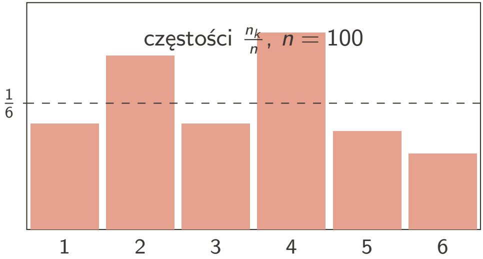
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



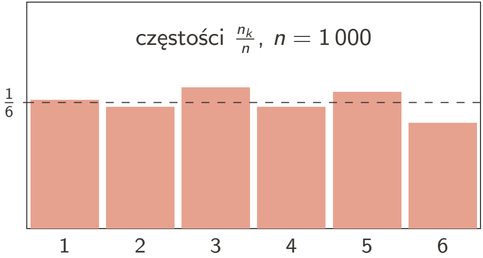
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



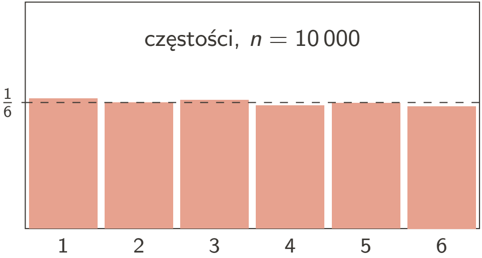
Przykład: metoda Monte Carlo

Oszacuj (przez wielokrotne losowanie) rozkład dyskretnej zmiennej losowej X przyjmującej K możliwych wartości ($X \in \{1, \ldots, K\}$)

Rozwiązanie: Losujemy n niezależnych realizacji tej zmiennej, $X_1, \ldots, X_n$, a następnie dla każdego $k = 1, \ldots, K$, zliczamy liczbę wystąpień n_k wartości k

Z prawa wielkich liczb $\frac{n_k}{n} \stackrel{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} P(X = k)$

Przykład: Niech X ma rozkład jednostajny na $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Zadanie

Zadanie 3

Rozważ spacer losowy po prostej, w którym w każdym kroku idziemy o jeden w prawo z prawdopodobieństwem p lub o jeden w lewo z prawdopodobieństwem $1 - p$, rozpoczynając od zera. Niech S_n oznacza położenie spacerowicza w chwili n ($S_0 = 0$). Innymi słowy, $S_n = X_1 + \ldots X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi z $P(X_i = 1) = p$ i $P(X_i = -1) = 1 - p$. Udowodnij, że jeśli $p > \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, natomiast jeśli $p < \frac{1}{2}$, to z prawdopodobieństwem 1 zajdzie $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$.