Metody probabilistyczne

10. Ciągłe zmienne losowe II

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

13.01.2021

Przypomnienie: rozkład łączny

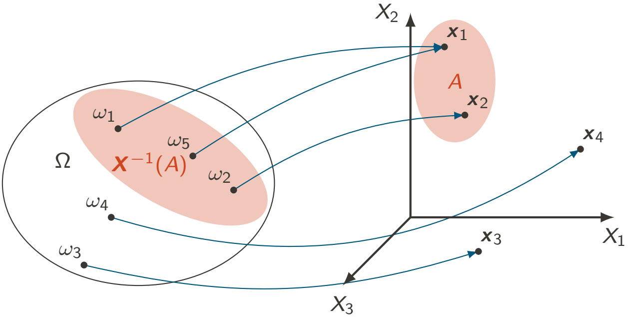
Łącznym rozkładem prawdopodobieństwa wektora losowego:

$$\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

nazywamy miarę określoną dla zbiorów borelowskich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jako:

$$P_{\boldsymbol{X}}(A) \;=\; P\Big(\{\omega \in \Omega\colon \boldsymbol{X}(\omega) \in A\}\Big) \;=\; P\Big(\boldsymbol{X}^{-1}(A)\Big)$$

Częściej zapisujemy $P(\boldsymbol{X} \in A)$



Rozkład łączny ciągłego wektora losowego

Wektor losowy $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy ciągłym, jeśli istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, taka że dla dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$P(\boldsymbol{X} \in A) = \int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Funkcję f nazywamy łączną gęstością prawdopodobieństwa wektora $\boldsymbol{X}$.

Uwaga: całka w definicji jest wielowymiarowa:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$$

Rozkład łączny ciągłego wektora losowego

Wektor losowy $\boldsymbol{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy ciągłym, jeśli istnieje funkcja $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, taka że dla dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$P(\boldsymbol{X} \in A) \;=\; \int_A f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Funkcję f nazywamy łączną gęstością prawdopodobieństwa wektora $\boldsymbol{X}$.

Uwaga: całka w definicji jest wielowymiarowa:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} \;\equiv\; \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

W szczególności, dla $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ mamy funkcję gęstości $f(x, y)$.

Normalizacja:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; 1$$

Gęstość brzegowa i warunkowa (dwie zmienne)

Mając łączną gęstość $f(x, y)$ zmiennych X i Y definiujemy

- Gęstości brzegowe:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

- Gęstości warunkowe, np:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

- Warunkową wartość oczekiwaną, np:

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}x$$

Powyższe definicje uogólniają się na wiele zmiennych losowych.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Mając łączną gęstość $f(x, y)$ zmiennych X i Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Mając łączną gęstość $f(x, y)$ zmiennych X i Y

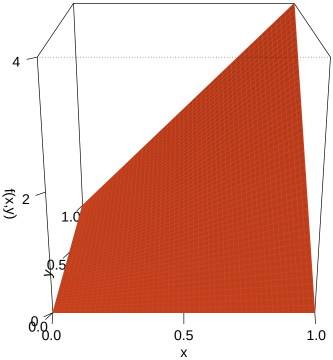
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\, \mathrm{d}x \qquad \left(\text{bo } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}\right) \end{aligned}$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe

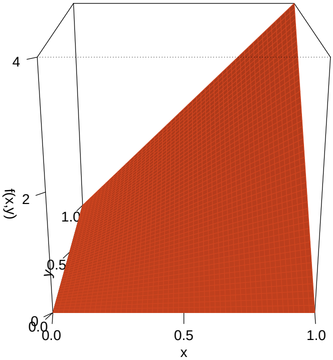


Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Sprawdzamy normalizację:

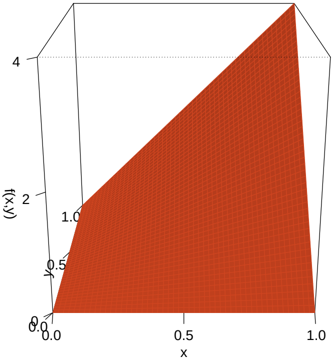
$$\int_0^1 \int_0^1 4xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 4xy \, dx \right) dy$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Sprawdzamy normalizację:

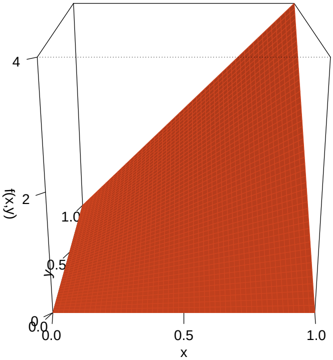
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(4y \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Sprawdzamy normalizację:

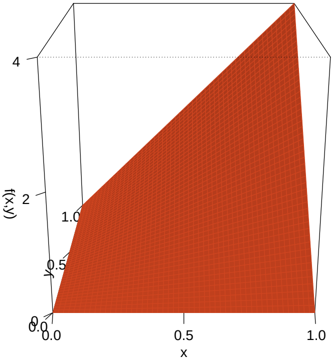
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(4y \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 2y \, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0,1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Sprawdzamy normalizację:

$$\int_0^1 \int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 4xy \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

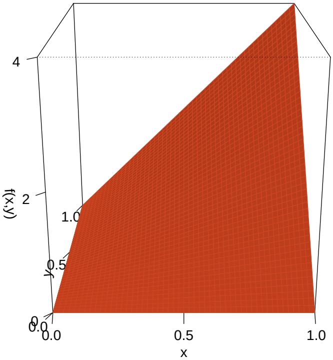
$$= \int_0^1 \left(4y \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 2y \, \mathrm{d}y = y^2 \Big|_0^1 = 1$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości brzegowe:

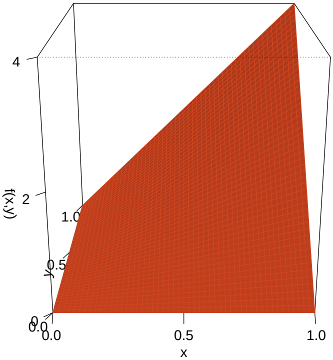
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości brzegowe:

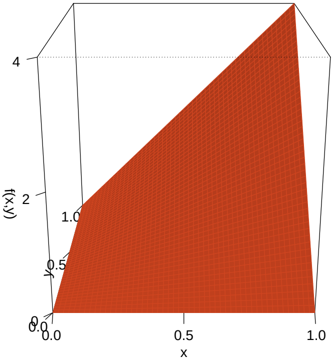
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 4x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości brzegowe:

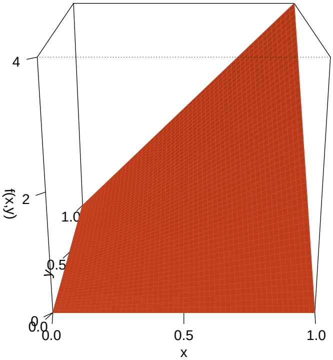
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y = 4x \int_0^1 y\, \mathrm{d}y = 4x \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = 2x$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości brzegowe:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \;=\; 4x\int_0^1 y\,\mathrm{d}y \;=\; 4x\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 \;=\; 2x$$

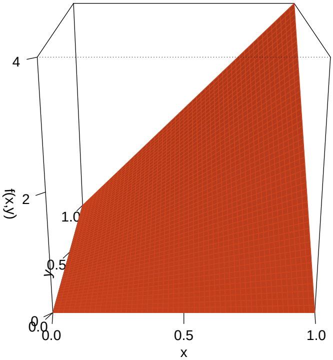
Podobnie można pokazać, że $f_Y(y) = 2y$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości warunkowe:

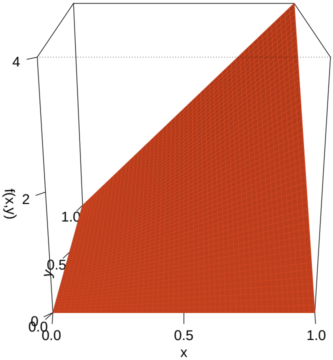
$$f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości warunkowe:

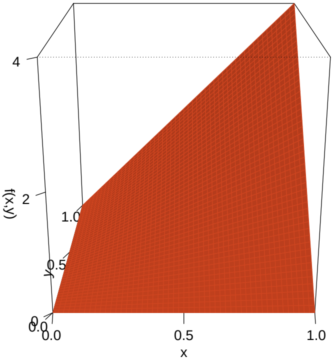
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{4xy}{2x} = 2y = f_Y(y)$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Wyznacz gęstości brzegowe i warunkowe



Gęstości warunkowe:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{4xy}{2x} = 2y = f_Y(y)$$

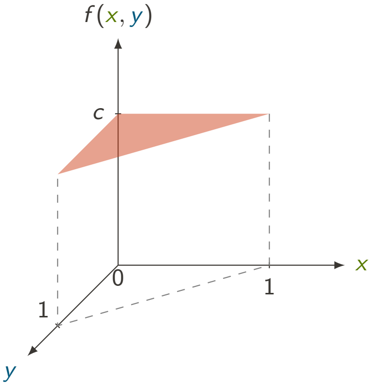
Podobnie można pokazać, że $f_{X|Y}(x|y) = 2x$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.

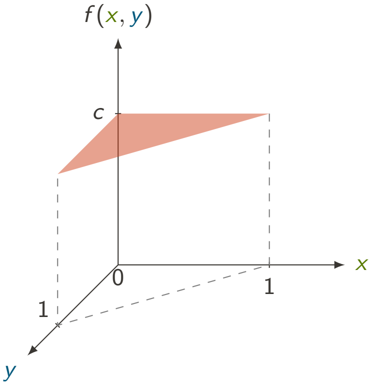


Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

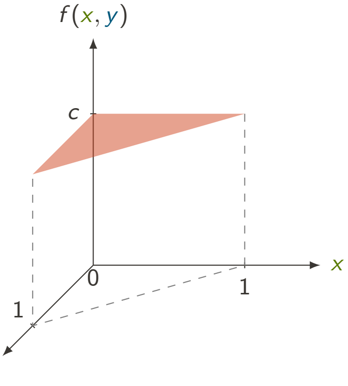
$$1 \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

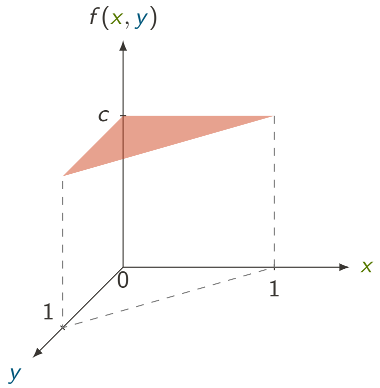
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=?}^{?} c\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

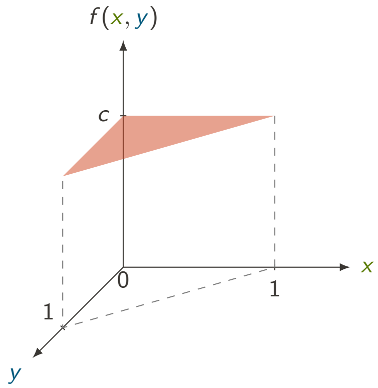
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} c\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

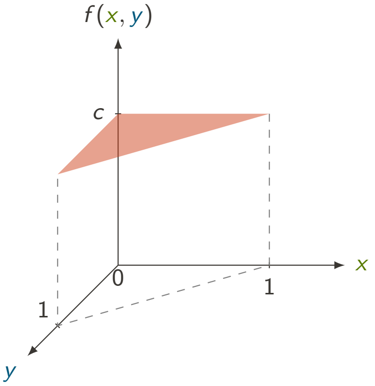
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} c\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 c(1-x)\,\mathrm{d}x$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} c\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

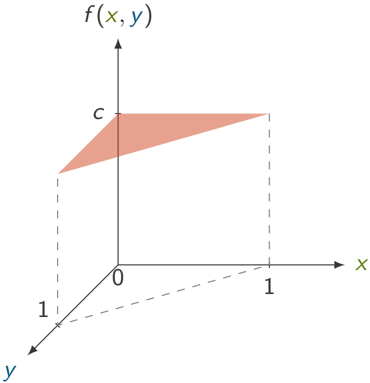
$$= \int_0^1 c(1-x)\,\mathrm{d}x = c\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{2}$$

Przykład

Rozważmy zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przyp.} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.



Normalizacja: musimy scałkować po „trójkącie"

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} c\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 c(1-x)\,\mathrm{d}x = c\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{2} \qquad \Rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

Przykład

$$f(x, y) = 2 \qquad \text{dla} \;\; x,\; y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Przykład

$$f(x, y) = 2 \qquad \text{dla} \ \ x,\ y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

Przykład

$$f(x,y) = 2 \qquad \text{dla} \quad x,\ y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y$$

Przykład

$$f(x,y) = 2 \qquad \text{dla} \;\; x,\; y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y \;=\; 2(1-x)$$

Przykład

$$f(x,y) = 2 \qquad \text{dla} \quad x,\ y \geqslant 0, x+y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \ = \ \int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y \ = \ 2(1-x)$$

Przez symetrię $f_Y(y) = 2(1-y)$

Przykład

$$f(x, y) = 2 \qquad \text{dla} \quad x,\ y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y \ = \ \int_0^{1-x} 2\, \mathrm{d}y \ = \ 2(1 - x)$$

Przez symetrię $f_Y(y) = 2(1 - y)$

Gęstość warunkowa:

$$f_{Y|X}(y|x) \ = \ \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Przykład

$$f(x, y) = 2 \qquad \text{dla} \;\; x,\; y \geqslant 0, x + y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y \;=\; \int_0^{1-x} 2\, \mathrm{d}y \;=\; 2(1 - x)$$

Przez symetrię $f_Y(y) = 2(1 - y)$

Gęstość warunkowa:

$$f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \;=\; \frac{1}{1 - x} \qquad \text{dla } y \in [0, 1 - x]$$

Przykład

$$f(x,y) = 2 \qquad \text{dla} \;\; x,\; y \geqslant 0, x+y \leqslant 1$$

Gęstość brzegowa:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y \;=\; 2(1-x)$$

Przez symetrię $f_Y(y) = 2(1-y)$

Gęstość warunkowa:

$$f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \;=\; \frac{1}{1-x} \qquad \text{dla } y \in [0, 1-x]$$

Przez symetrię $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{1-y}$ dla $x \in [0, 1-y]$

Zadanie 1

Rozważ zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.

Zadanie 2

Losujemy punkt jednostajnie z koła o promieniu 1. Innymi słowy mamy parę zmiennych (X, Y) o gęstości łącznej:

$$f(x,y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oblicz stałą c i gęstości brzegowe.

Niezależne zmienne losowe

Definicja – przypomnienie

Zmienne losowe X i Y nazywamy niezależnymi jeśli:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Niezależne zmienne losowe

Definicja – przypomnienie

Zmienne losowe X i Y nazywamy niezależnymi jeśli:

$$P(X \in A, Y \in B) \ = \ P(X \in A)P(Y \in B)$$

Niezależność zmiennych ciągłych

Ciągłe zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Niezależne zmienne losowe

Definicja – przypomnienie

Zmienne losowe X i Y nazywamy niezależnymi jeśli:

$$P(X \in A, Y \in B) \; = \; P(X \in A)P(Y \in B)$$

Niezależność zmiennych ciągłych

Ciągłe zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Uogólnienie:

Ciągłe zmienne $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

Przykład

Rozważaliśmy zmienne (X, Y) opisane gęstością:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Pokazaliśmy, że $f_X(x) = 2x$ i $f_Y(y) = 2y$. Czy X i Y są niezależne?

Przykład

Rozważaliśmy zmienne (X, Y) opisane gęstością:

$$f(x, y) = 4xy \qquad \text{dla } x, y \in [0, 1]$$

Pokazaliśmy, że $f_X(x) = 2x$ i $f_Y(y) = 2y$. Czy X i Y są niezależne?

Tak:

$$f(x, y) = 4xy \;=\; (2x) \cdot (2y) \;=\; f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

- $X \sim \text{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Jasia (w godz.) liczony od 10:00
- $Y \sim \text{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Małgosi (w godz.) liczony od 10:00

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

- $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Jasia (w godz.) liczony od 10:00
- $Y \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Małgosi (w godz.) liczony od 10:00

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1, \qquad 0 \leqslant x, y \leqslant 1$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

- $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Jasia (w godz.) liczony od 10:00
- $Y \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Małgosi (w godz.) liczony od 10:00

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1, \qquad 0 \leqslant x, y \leqslant 1$$

Czas oczekiwania na siebie: $Z = |X - Y|$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

- $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Jasia (w godz.) liczony od 10:00
- $Y \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ czas przyjścia Małgosi (w godz.) liczony od 10:00

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 1, \qquad 0 \leqslant x, y \leqslant 1$$

Czas oczekiwania na siebie: $Z = |X - Y|$

$$EZ \;=\; \int_0^1 \int_0^1 |x-y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \;=\; \int_0^1 \left(\int_0^1 |x-y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Liczymy wewnętrzną całkę:

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Liczymy wewnętrzną całkę:

$$\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x = \int_0^y \underbrace{|x - y|}_{-x+y} \mathrm{d}x + \int_y^1 \underbrace{|x - y|}_{x-y} \mathrm{d}x$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Liczymy wewnętrzną całkę:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x &= \int_0^y \underbrace{|x - y|}_{-x+y} \mathrm{d}x + \int_y^1 \underbrace{|x - y|}_{x-y} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^y x \, \mathrm{d}x + y \int_0^y \mathrm{d}x + \int_y^1 x \, \mathrm{d}x - y \int_y^1 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Liczymy wewnętrzną całkę:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x &= \int_0^y \underbrace{|x - y|}_{-x+y} \mathrm{d}x + \int_y^1 \underbrace{|x - y|}_{x-y} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^y x \, \mathrm{d}x + y \int_0^y \mathrm{d}x + \int_y^1 x \, \mathrm{d}x - y \int_y^1 \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}x^2\Big|_0^y + yx\Big|_0^y + \frac{1}{2}x^2\Big|_y^1 - yx\Big|_y^1
\end{aligned}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x-y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Liczymy wewnętrzną całkę:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x-y| \, \mathrm{d}x &= \int_0^y \underbrace{|x-y|}_{-x+y} \mathrm{d}x + \int_y^1 \underbrace{|x-y|}_{x-y} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^y x \, \mathrm{d}x + y \int_0^y \mathrm{d}x + \int_y^1 x \, \mathrm{d}x - y \int_y^1 \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}x^2\Big|_0^y + yx\Big|_0^y + \frac{1}{2}x^2\Big|_y^1 - yx\Big|_y^1 \\
&= -\frac{1}{2}y^2 + y^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^2 - y + y^2 = y^2 - y + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x = y^2 - y + \frac{1}{2}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x = y^2 - y + \frac{1}{2}$$

$$EZ = \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x = y^2 - y + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} EZ &= \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} y \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00 (czasy przyjścia zamodeluj jako niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym). Wyznacz oczekiwaną wartość czasu oczekiwania na siebie.

$$EZ = \int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 |x - y| \, \mathrm{d}x = y^2 - y + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} EZ &= \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} y \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Czyli średnio Jaś i Małgosia będą na siebie czekać 20 minut.

Poniższe własności zachodzą również dla zmiennych ciągłych

- Dla dowolnych zmiennych losowych:

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= EX + EY \\
D^2(X \pm Y) &= D^2(X) \pm 2C(X,Y) + D^2(Y)
\end{aligned}
$$

- Dla niezależnych zmiennych losowych:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= (EX)(EY) \\
C(X,Y) &= 0 \\
D^2(X \pm Y) &= D^2(X) + D^2(Y)
\end{aligned}
$$

Wszystkie te własności uogólniają się na $n > 2$ zmiennych losowych

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X.
- Zdefiniujemy $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Wyznacz dystrybuantę F_Y i F_Z

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X.
- Zdefiniujemy $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Wyznacz dystrybuantę F_Y i F_Z

Rozwiązanie:

$$F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;=\; P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant y)$$

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X.
- Zdefiniujemy $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Wyznacz dystrybuantę F_Y i F_Z

Rozwiązanie:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant y) \\
&= P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \ldots, X_n \leqslant y)
\end{aligned}
$$

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X.
- Zdefiniujemy $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Wyznacz dystrybuantę F_Y i F_Z

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant y) \\ &= P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \ldots, X_n \leqslant y) \\ &\overset{(*)}{=} P(X_1 \leqslant y) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leqslant y) = F_X(y)^n, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy niezależność $X_1, \ldots, X_n$.

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X.
- Zdefiniujemy $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$
- Wyznacz dystrybuantę F_Y i F_Z

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant y) \\ &= P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \ldots, X_n \leqslant y) \\ &\overset{(*)}{=} P(X_1 \leqslant y) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leqslant y) = F_X(y)^n, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy niezależność $X_1, \ldots, X_n$.

Zadanie 3

Pokaż, że dystrybuanta minimum ma postać:

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n$$

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\text{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

Dla każdego X_i dystrybuanta ma postać $F_X(x) = x$, stąd:

$$F_Y(y) = F_X(y)^n = y^n$$
$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = 1 - (1 - z)^n$$

Maksimum i minimum niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $Z = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$

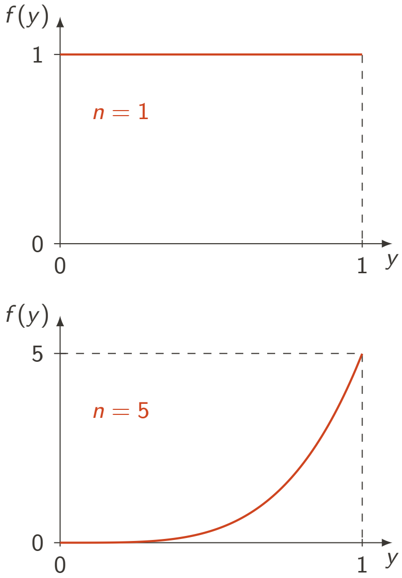
Dla każdego X_i dystrybuanta ma postać $F_X(x) = x$, stąd:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= F_X(y)^n = y^n \\
F_Z(z) &= 1 - (1 - F_X(z))^n = 1 - (1-z)^n
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy gęstość różniczkując dystrybuantę:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= (F_Y(y)^n)' = (y^n)' = ny^{n-1} \\
f_Z(z) &= (1 - (1-z)^n)' = n(1-z)^{n-1}
\end{aligned}
$$

Przykład: gęstość maksimum dla rozkładu jednostajnego



Zadanie

Zadanie 4

Zmienne losowe X i Y są niezależne, o rozkładzie wykładniczym, tzn. $X \sim \text{Exp}(\lambda_X)$ oraz $Y \sim \text{Exp}(\lambda_Y)$. Wyznacz rozkład zmiennej $Z = \min\{X, Y\}$. Wskazówka: trzeba wpierw uogólnić wzór na minimum zmiennych niezależnych, ale o różnym rozkładzie.

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y. Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$F_Z(z) \;=\; P(Z \leqslant z) \;=\; P(X + Y \leqslant z)$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\ &= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\ &= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y. Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\
&= \iint_{\{x+y \leqslant z\}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) \;=\; P(X + Y \leqslant z) \\
&= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\
&= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y.
Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) = P(X + Y \leqslant z) \\
&= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
f_Z(z) &= (F_Z(z))' = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,(F_Y(z-x))'\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Rozkład sumy niezależnych zmiennych losowych

X, Y – niezależne ciągłe zmienne losowe opisane gęstościami f_X i f_Y. Wyznacz gęstość $Z = X + Y$.

Wyznaczamy dystrybuantę Z i różniczkujemy:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) \;=\; P(X + Y \leqslant z) \\
&= \iint_{\{x+y\leqslant z\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{z-x} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) F_Y(z-x)\,\mathrm{d}x \\
f_Z(z) &= (F_Z(z))' \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,(F_Y(z-x))'\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Splot

Splotem funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję:

$$(f * g)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Splot

Splotem funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję:

$$(f * g)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Wniosek: Gęstość f_Z zmiennej $Z = X + Y$ jest splotem gęstości f_X i f_Y:

$$f_Z(z) \;=\; (f_X * f_Y)(z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0, 1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0, 1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f_X(t) \; = \; f_Y(t) \; = \; \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0, 1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0, 1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) \; = \; \begin{cases} 1 & t \in [0, 1] \\ 0 & t \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$f_Z(z) \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z - t) \, \mathrm{d}t$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \end{aligned}$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{aligned} u &= z - t \\ \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = -\int_z^{z-1} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

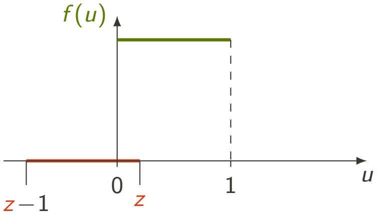
$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{vmatrix} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

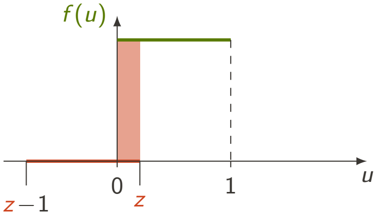


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

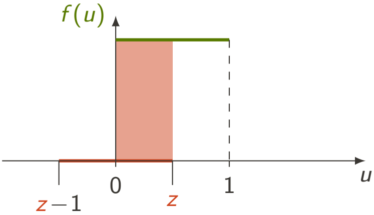


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{aligned} u &= z - t \\ \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

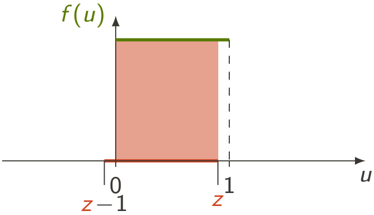


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{array}{ll} u &= z - t \\ \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

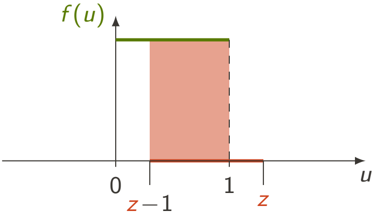


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

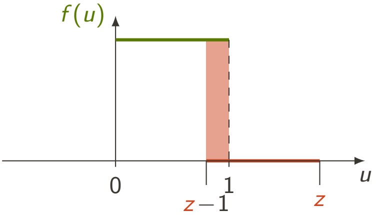


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym Unif$[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u &= z - t \\ \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \end{aligned}$$

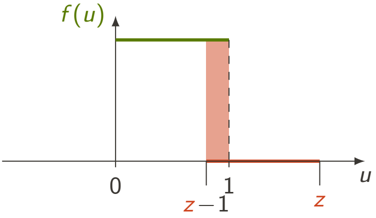


Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{array}{ll} u & = z - t \\ \mathrm{d}u & = -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} z & z \in [0,1] \\ 2 - z & z \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$

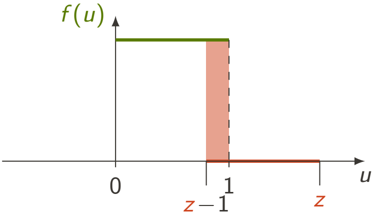


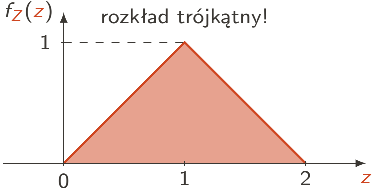
Przykład

X, Y – niezależne zmienne o rozkładzie jednostajnym $\mathrm{Unif}[0,1]$.
Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,1] \\ 0 & t \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(z-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(z-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left| \begin{matrix} u &= z - t \\ \mathrm{d}u &= -\,\mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int_{z-1}^{z} f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} z & z \in [0,1] \\ 2 - z & z \in [1,2] \end{cases} \end{aligned}$$





Przykład

Rozważ dwie niezależne zmienne losowe:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$

Przykład

Rozważ dwie niezależne zmienne losowe:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$

Zadanie 5*

Pokaż, że $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, gdzie:

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y, \qquad \sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Przykład

Rozważ dwie niezależne zmienne losowe:

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$

Zadanie 5*

Pokaż, że $Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, gdzie:

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y, \qquad \sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Wniosek (bardzo ważny!)

Suma niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

Zmienne o rozkładzie normalnym

Rozważmy niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$, gdzie:

$$X_i \;\sim\; N(\mu_i, \sigma_i^2), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Wyznacz rozkład $Z \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Zmienne o rozkładzie normalnym

Rozważmy niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$, gdzie:

$$X_i \;\sim\; N(\mu_i, \sigma_i^2), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Wyznacz rozkład $Z \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Rozwiązanie: Jeśli $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, to $Y_i = a_i X_i \sim N(a_i\mu_i, a_i^2\sigma_i^2)$

Zmienne o rozkładzie normalnym

Rozważmy niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$, gdzie:

$$X_i \ \sim \ N(\mu_i, \sigma_i^2), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Wyznacz rozkład $Z \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Rozwiązanie: Jeśli $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, to $Y_i = a_i X_i \sim N(a_i\mu_i, a_i^2\sigma_i^2)$

$$Z \ = \ \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \Longrightarrow \quad Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

Zmienne o rozkładzie normalnym

Rozważmy niezależne zmienne $X_1, \ldots, X_n$, gdzie:

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Wyznacz rozkład $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Rozwiązanie: Jeśli $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, to $Y_i = a_i X_i \sim N(a_i \mu_i, a_i^2 \sigma_i^2)$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \Longrightarrow \quad Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Wniosek

Dowolna kombinacja liniowa niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

Rozkład χ^2

Zmienna Z ma rozkład „chi-kwadrat” z k stopniami swobody, jeśli Z można przedstawić jako sumę kwadratów k niezależnych zmiennych o rozkładzie $N(0,1)$:

$$Z = \sum_{i=1}^{k} X_i^2, \qquad X_i \sim N(0,1), \text{ niezależne}$$

Zapisujemy $Z \sim \chi^2(k)$

Rozkład χ^2

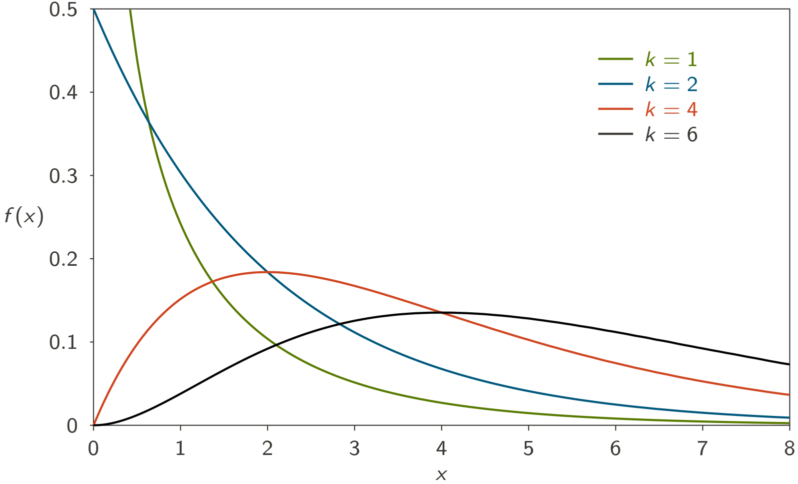
Zmienna Z ma rozkład „chi-kwadrat” z k stopniami swobody, jeśli Z można przedstawić jako sumę kwadratów k niezależnych zmiennych o rozkładzie $N(0,1)$:

$$Z = \sum_{i=1}^{k} X_i^2, \qquad X_i \sim N(0,1), \text{ niezależne}$$

Zapisujemy $Z \sim \chi^2(k)$

Rozkład χ^2 ma istotne zastosowanie w statystyce matematycznej

Rozkład $\chi^2(k)$



Rozkład $\chi^2(k)$

Pokaż, że jeśli $Z \sim \chi^2(k)$, to $EZ = k$

Rozkład $\chi^2(k)$

Pokaż, że jeśli $Z \sim \chi^2(k)$, to $EZ = k$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją $Z = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ dla $X_i \sim N(0,1)$.

Rozkład $\chi^2(k)$

Pokaż, że jeśli $Z \sim \chi^2(k)$, to $EZ = k$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją $Z = \sum_{i=1}^k X_i^2$ dla $X_i \sim N(0,1)$.

$$\text{Tym samym:} \quad EZ \;=\; \sum_{i=1}^{k} E(X_i^2) \;=\; kE(X_1^2)$$

Rozkład $\chi^2(k)$

Pokaż, że jeśli $Z \sim \chi^2(k)$, to $EZ = k$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją $Z = \sum_{i=1}^k X_i^2$ dla $X_i \sim N(0,1)$.

$$\text{Tym samym:} \quad EZ \;=\; \sum_{i=1}^{k} E(X_i^2) \;=\; kE(X_1^2)$$

$$\text{Mamy:} \quad EX_1 = \mu = 0, \qquad D^2(X_1) = \sigma^2 = 1$$

Rozkład $\chi^2(k)$

Pokaż, że jeśli $Z \sim \chi^2(k)$, to $EZ = k$

Rozwiązanie: Zgodnie z definicją $Z = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ dla $X_i \sim N(0,1)$.

$$\text{Tym samym:} \quad EZ \;=\; \sum_{i=1}^{k} E(X_i^2) \;=\; kE(X_1^2)$$

$$\text{Mamy:} \quad EX_1 = \mu = 0, \qquad D^2(X_1) = \sigma^2 = 1$$

Ze wzoru skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) = E(X_1^2) - \underbrace{(EX_1)^2}_{0} = E(X_1^2) \quad \Longrightarrow \quad E(X_1^2) = 1$$

Rozkład t-Studenta

Zmienna T ma rozkład t-Studenta z k stopniami swobody, jeśli T można przedstawić jako:

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Z}}\sqrt{k},$$

gdzie:

- $X \sim N(0, 1)$
- $Z \sim \chi^2(k)$
- X i Z są niezależne

Zapisujemy $T \sim t(k)$

Rozkład t-Studenta

Zmienna T ma rozkład t-Studenta z k stopniami swobody, jeśli T można przedstawić jako:

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Z}}\sqrt{k},$$

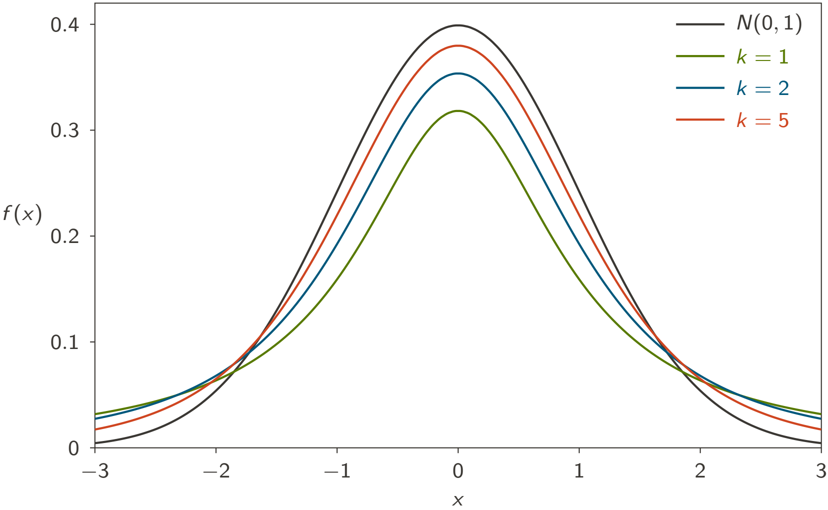
gdzie:

- $X \sim N(0, 1)$
- $Z \sim \chi^2(k)$
- X i Z są niezależne

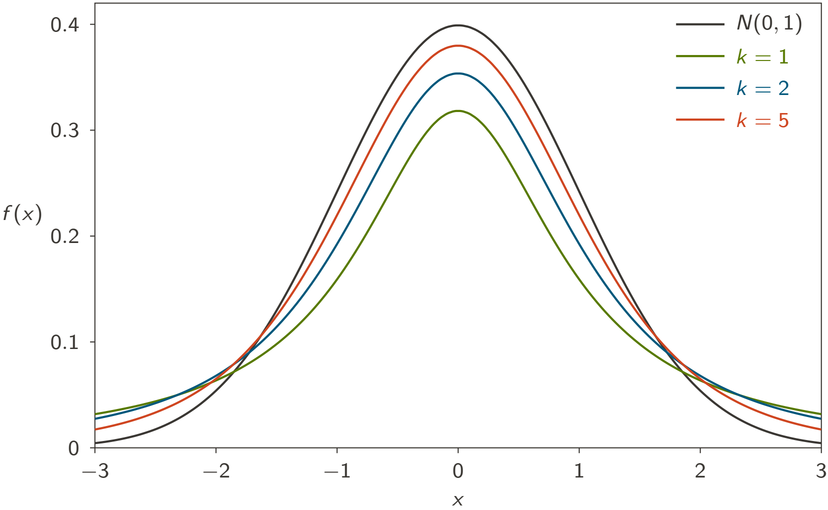
Zapisujemy $T \sim t(k)$

Rozkład t-Studenta ma również istotne zastosowanie w statystyce matematycznej

Rozkład t-Studenta



Rozkład t-Studenta



Dla $k \to \infty$ rozkład t zbiega do rozkładu $N(0,1)$