Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

9. Ciągłe zmienne losowe

16.12.2020

Zadanie 1. *Rozważ zmienną X o gęstości:*

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2$

Odpowiedź: Z warunku normalizacji musimy mieć:

$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 cx^2\,\mathrm{d}x \;=\; 1.$$

Wyznaczamy całkę:

$$\int_0^2 cx^2\,\mathrm{d}x \;=\; c\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \;=\; \frac{8c}{3} \;=\; 1,$$

z czego wynika, że $c = \frac{3}{8}$. Dla dowolnego $[a,b] \subseteq [0,2]$ mamy:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \;=\; \int_a^b \frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{3}{8}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b \;=\; \frac{1}{8}(b^3 - a^3).$$

Zadanie 2. *Rozważ ciągłą zmienną losową, której rozkład zdefiniowany jest za pomocą dystrybuanty:*

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} & x \geqslant 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

dla pewnego $\alpha > 0$. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$.

Odpowiedź:

Aby otrzymać gęstość wystarczy zróżniczkować $F(x)$. Dla $x < 1$ mamy $F(x) = 0$, a więc $F'(x) = 0$. Dla $x \geqslant 1$:

$$F'(x) \;=\; \left(1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\right)' \;=\; -\left(x^{-\alpha}\right)' \;=\; \alpha x^{-\alpha-1}.$$

Tym samym:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} & x \geqslant 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

Rozkład ten nazywany jest *rozkładem Pareto*.

Zadanie 3. *Niech X będzie ciągłą zmienną losową o gęstości $f_X(x)$, przyjmującą wartości w przedziale $[a,b]$, natomiast $Y = g(X)$ będzie funkcją zmiennej losowej X przyjmującą wartości w przedziale $[c,d]$, przy czym $g\colon [a,b] \to [c,d]$ jest funkcją różniczkowalną i odwracalną. Pokaż, że gęstość $f_Y(y)$ zmiennej losowej Y dana jest poprzez:*

$$f_Y(y) \;=\; f_X\big(h(y)\big)\,|h'(y)|, \qquad \text{dla } y \in [c,d]$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g.

Odpowiedź: Jeśli funkcja g jest odwracalna, to znaczy, że musi być albo *ściśle rosnąca*, albo *ściśle malejąca*. Dowód wykonamy osobno dla obu przypadków.

(a) Funkcja g jest *ściśle rosnąca.* Oznacza to, że jej odwrotność $h = g^{-1}$ jest również *ściśle rosnąca.* Dowód przeprowadzimy poprzez policzenie dystrybuanty F_Y zmiennej losowej Y, a następnie jej zróżniczkowanie, aby otrzymać gęstość f_Y. Z definicji dystrybuanty mamy:

$$\begin{aligned} F_Y(y) \quad &= \quad P(Y \leqslant y) \ = \ P\big(g(X) \leqslant y\big) \\ &\overset{(*)}{=} \quad P\big(X \leqslant \underbrace{g^{-1}}_{=h}(y)\big) \ = \ F_X\big(h(y)\big), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że warunek $g(X) \leqslant y$ jest równoważny warunkowi $X \leqslant f^{-1}(y)$; zachodzi to, ponieważ g jest funkcją ściśle rosnącą. Wykorzystując wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$f_Y(y) \ = \ F_Y'(y) \ = \ \Big(F_X\big(h(y)\big)\Big)' \ = \ F_X'\big(h(y)\big)h'(y) \ = \ f_X\big(h(y)\big)h'(y).$$

Na koniec zauważmy, że skoro h jest ściśle rosnąca to jej pochodna $h'(y) \geqslant 0$, a więc $|h'(y)| = h'(y)$. To kończy dowód dla funkcji ściśle rosnącej.

(b) Funkcja g jest *ściśle malejąca.* Oznacza to, że jej odwrotność $h = g^{-1}$ jest również *ściśle malejąca.* Postępujemy podobnie jak w poprzednim przypadku:

$$\begin{aligned} F_Y(y) \quad &= \quad P(Y \leqslant y) \ = \ P\big(g(X) \leqslant y\big) \\ &\overset{(*)}{=} \quad P\big(X \geqslant \underbrace{g^{-1}}_{=h}(y)\big) \\ &\overset{(\dagger)}{=} \quad 1 - P\big(X \leqslant h(y)\big) \ = \ 1 - F_X\big(h(y)\big), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że warunek $g(X) \leqslant y$ jest równoważny warunkowi $X \geqslant f^{-1}(y)$; zachodzi to, ponieważ g jest funkcją ściśle malejącą (uwaga: zmienia się znak nierówność!). Z kolei w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że $P(X \leqslant a) + P(X \geqslant a) = 1$ (dwukrotnie zliczamy tutaj co prawda zdarzenie $P(X = a)$, ale ma ono prawdopodobieństwo równe 0 z powodu ciągłości zmiennej X). Wykorzystując wzór na pochodną funkcji złożonej:

$$f_Y(y) \ = \ F_Y'(y) \ = \ \Big(1 - F_X\big(h(y)\big)\Big)' \ = \ - f_X\big(h(y)\big)h'(y).$$

Na koniec zauważmy, że skoro h jest ściśle malejąca, to jej pochodna $h'(y) \leqslant 0$, a więc $|h'(y)| = -h'(y)$, co kończy dowód dla funkcji ściśle malejącej.

Zadanie 4. *Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, tzn. zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na $[0,1]$: $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = -\ln X$.*

Odpowiedź: Jeśli $x \in [0,1]$ to $g(x) \in [0,\infty)$, ponieważ funkcja $g(x) = -\ln x$ mapuje przedział $[0,1]$ na przedział $[0,\infty)$. Ponieważ:

$$y = -\ln x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = e^{-y},$$

funkcja odwrotna ma postać:

$$h(y) = g^{-1}(y) = e^{-y},$$

a stąd:

$$|h'(y)| \ = \ \Big|\big(e^{-y}\big)'\Big| \ = \ e^{-y}.$$

Tym samym:

$$f_Y(y) \ = \ f_X\big(h(y)\big)\,|h'(y)| \ = \ e^{-y} \qquad \text{dla } y \in [0,\infty).$$

Y ma więc rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$.

Zadanie 5. *Pokaż, że jeśli* $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ *ma rozkład jednostajny na* $[0,1]$, *to zmienna*

$$X = F^{-1}(U)$$

dla ściśle rosnącej funkcji F *o wartościach z przedziału* $[0,1]$ *ma rozkład opisany za pomocą dystrybuanty* $F_X = F$.

Odpowiedź: Wyznaczamy dystrybuantę X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leqslant x) \;=\; P\big(F^{-1}(U) \leqslant x\big) \\ &\overset{(*)}{=} P\big(U \leqslant F(x)\big) \\ &= F_U\big(F(x)\big), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że F jest funkcją rosnącą. Zauważmy, że skoro U ma rozkład jednostajny, to jej dystrybuanta na odcinku $[0,1]$ (uwaga: $F(x) \in [0,1]$ dla dowolnego x zgodnie z założeniem) ma postać $F_U(u) = u$. Czyli:

$$F_X(x) \;=\; F(x).$$

Zadanie 6. *Niech* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem* λ:

$$f(x) \;=\; \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \in [0, \infty).$$

Wyznacz EX.

Odpowiedź: Z definicji:

$$EX \;=\; \int_0^\infty x\, f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x.$$

Dokonujemy zamiany zmiennej pod całką:

$$y = -\lambda x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = -\lambda\, \mathrm{d}x,$$

co daje:

$$EX \;=\; \lambda \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_0^{-\infty} \left(\frac{-y}{\lambda}\right) e^y \left(\frac{-\,\mathrm{d}y}{\lambda}\right) \;=\; -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^0 y e^y\, \mathrm{d}y.$$

Musimy więc tylko pokazać, że $\int_{-\infty}^0 y e^y\, \mathrm{d}y \;=\; -1$. W tym celu policzymy wpierw całkę nieoznaczoną używając metody całkowania przez części:

$$\int y e^y\, \mathrm{d}y \;=\; \left| \begin{array}{ll} f(y) = y & f'(y) = 1 \\ g'(y) = e^y & g(y) = e^y \end{array} \right| \;=\; y e^y - \int e^y\, \mathrm{d}y \;=\; y e^y - e^y.$$

Tym samym:

$$\int_{-\infty}^0 y e^y\, \mathrm{d}y \;=\; (y e^y - e^y)\Big|_{-\infty}^0.$$

Dla $y = 0$ mamy $y e^y - e^y = 0e^0 - e^0 = -1$. Dla $y = -\infty$ mamy:

$$\lim_{y \to -\infty} e^y \;=\; e^{-\infty} \;=\; 0,$$

oraz

$$\lim_{y \to -\infty} y e^y \;=\; \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{e^{-y}} \;\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}\; \lim_{y \to -\infty} \frac{y'}{(e^{-y})'} \;=\; \lim_{y \to -\infty} -\frac{1}{e^{-y}} \;=\; 0,$$

gdzie w jednej z równości użyliśmy twierdzenia de l'Hospitala. Tym samym:

$$(y e^y - e^y)\Big|_{-\infty}^0 \;=\; -1 - 0 \;=\; -1,$$

co kończy dowód.

Zadanie 7. *Niech* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem* λ*:*

$$f(x) \;=\; \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \in [0, \infty).$$

Pokaż, że $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$*.*

Odpowiedź: Ze wzoru skróconego mnożenia na wariancję:

$$D^2(X) \;=\; E(X^2) - (EX)^2 \;=\; E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2},$$

musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$. Mamy:

$$E(X^2) \;=\; \int_0^\infty x^2\, f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_0^\infty x^2\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Tak jak poprzednio, dokonujemy zamiany zmiennej pod całką:

$$y = -\lambda x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = -\lambda\,\mathrm{d}x,$$

co daje:

$$E(X^2) \;=\; \lambda \int_0^\infty x^2\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \;=\; \lambda \int_0^{-\infty} \left(\frac{-y}{\lambda}\right)^2 e^y \left(\frac{-\,\mathrm{d}y}{\lambda}\right) \;=\; \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^0 y^2 e^y\,\mathrm{d}y.$$

Policzymy wpierw całkę nieoznaczoną używając metody całkowania przez części:

$$\int y^2 e^y\,\mathrm{d}y \;=\; \left| \begin{array}{ll} f(y) = y^2 & f'(y) = 2y \\ g'(y) = e^y & g(y) = e^y \end{array} \right| \;=\; y^2 e^y - 2\int y e^y\,\mathrm{d}y \;=\; y^2 e^y - 2(ye^y - e^y),$$

gdzie w ostatniej równości posłużyliśmy się wynikiem z zadania na obliczenie wartości oczekiwanej. Licząc granicę przy użyciu twierdzenia de l'Hospitala, dostaniemy, że:

$$\lim_{y \to -\infty} \big(y^2 e^y - 2(ye^y - e^y)\big) \;=\; 0,$$

co daje:

$$\int_{-\infty}^0 y^2 e^y\,\mathrm{d}y \;=\; \big(y^2 e^y - 2(ye^y - e^y)\big)\Big|_{-\infty}^0 \;=\; 2,$$

a więc $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$. Stąd:

$$D^2(X) \;=\; E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2} \;=\; \frac{1}{\lambda^2}.$$

Zadanie 8. *Kij o długości* 1 *złamano w punkcie wybranym z rozkładu jednostajnego. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję pola prostokąta o długościach boków równych dwóm otrzymanym kawałkom kija.*

Odpowiedź: Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ będzie zmienną określającą punkt, w którym został złamany kij. Zmienna X dzieli kij na odcinki X oraz $1 - X$. Zdefiniujemy więc zmienną $Y = X(1-X)$ określającą pole prostokąta złożonego z tych odcinków. Wyznaczamy wartość oczekiwaną Y:

$$EY \;=\; \int_{-\infty}^\infty x(1-x) f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{6}.$$

Wariancję Y wyznaczymy korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $D^2(Y) = E(Y^2) - (EY)^2$. Ponieważ EY jest już policzone, pozostaje policzyć $E(Y^2)$:

$$E(Y^2) \;=\; \int_0^1 \big(x(1-x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

Stąd:

$$D^2(Y) \;=\; \frac{1}{30} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 \;=\; \frac{1}{180}.$$

Zadanie 9. *Pokaż, że:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \;=\; 1$$

Wykorzystaj do tego wartość tzw. całki Gaussa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \;=\; \sqrt{\pi}$$

Odpowiedź: Podstawiamy nową zmienną $y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$. Mamy:

$$\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x,$$

co po podstawieniu do całki daje:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sqrt{2\sigma^2}\, \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y}_{=\sqrt{\pi}} \;=\; 1.$$

Zadanie 10*. *Pokaż, że:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Odpowiedź: Rozważmy całkę:

$$G(\beta) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x$$

Podstawiamy $y = \sqrt{\frac{\beta}{2}}x$:

$$\mathrm{d}y \;=\; \sqrt{\frac{\beta}{2}}\, \mathrm{d}x,$$

co daje:

$$G(\beta) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y \;=\; \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\beta}},$$

gdzie użyliśmy wartości całki Gaussa (patrz poprzednie zadanie). Teraz zauważmy, że różniczkując po β:

$$\frac{\mathrm{d}G(\beta)}{\mathrm{d}\beta} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\sqrt{2\pi}\right) \;=\; -\frac{1}{2}\beta^{-3/2}\sqrt{2\pi}.$$

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}G(\beta)}{\mathrm{d}\beta} \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x\right) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\right) \mathrm{d}x \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tym samym:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}\beta}\, \mathrm{d}x \;=\; -2\frac{\mathrm{d}G(\beta)}{\mathrm{d}\beta}\Big|_{\beta=1} \;=\; (-2)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\right) \;=\; \sqrt{2\pi}.$$

Zadanie 11. *Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz:*

(a) $P(-1 \leqslant X \leqslant 3)$ jeśli $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$,

(b) $P(|X-3| \geqslant 2)$ jeśli $\mu = -1$ i $\sigma^2 = 9$,

(c) $P(|X+1| \leqslant 5)$ jeśli $\mu = 2$ i $\sigma^2 = 16$,

wynik przedstawiając za pomocą wartości funkcji $\Phi(x)$ dla $x \geqslant 0$.

Odpowiedź:

(a) Jeśli $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$, to:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1}{2} \sim N(0,1), \qquad \text{a więc } X = 2Z+1.$$

Stąd:

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 3) = P(-1 \leqslant 2Z+1 \leqslant 3) = P(-2 \leqslant 2Z \leqslant 2) = P(-1 \leqslant Z \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(-1).$$

Ponieważ w przeszłości używano tablic dla funkcji Φ, przyjęło się, aby w wyniku pozostawić tylko za pomocą $\Phi(x)$ dla $x \geqslant 0$. Używając $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ możemy dalej przekształcić:

$$P(-1 \leqslant X \leqslant 3) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - \big(1 - \Phi(1)\big) = 2\Phi(1) - 1.$$

(b) Jeśli $\mu = -1$ i $\sigma^2 = 9$, to

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X+1}{3} \sim N(0,1), \qquad \text{a więc } X = 3Z-1.$$

$$P(|X-3| \geqslant 2) = P(|3Z-4| \geqslant 2).$$

Ponieważ zdarzenie $\{|Y| \geqslant a\}$ dla $a > 0$ można zapisać jako $\{Y \geqslant a\} \cup \{Y \leqslant -a\}$ i oba zdarzenia są rozłączne,

$$P(|Y| \geqslant a) = P(Y \geqslant a) + P(Y \geqslant -a).$$

Czyli:

$$\begin{aligned} P(|3Z-4| \geqslant 2) &= P(3Z-4 \geqslant 2) + P(3Z-4 \leqslant -2) \\ &= P(Z \geqslant 2) + P\left(Z \leqslant \frac{2}{3}\right) \\ &= 1 - P(Z \leqslant 2) + P\left(Z \leqslant \frac{2}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

(c) Jeśli $\mu = 2$ i $\sigma^2 = 16$, to

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-2}{4} \sim N(0,1), \qquad \text{a więc } X = 4Z+2.$$

$$P(|X+1| \leqslant 5) = P(|4Z+3| \leqslant 5).$$

Ponieważ zdarzenie $\{|Y| \leqslant a\}$ dla $a > 0$ można zapisać jako $\{-a \leqslant Y \leqslant a\}$, mamy:

$$\begin{aligned} P(|4Z+3| \leqslant 5) &= P(-5 \leqslant 4Z+3 \leqslant 5) = P(-8 \leqslant 4Z \leqslant 2) = P\left(-2 \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-2) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \Phi(2). \end{aligned}$$