Metody probabilistyczne

9. Ciągłe zmienne losowe I

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

16.12.2020

Motywacja: losowanie punktu z odcinka

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset [0,1]$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in [0,1]$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{gdzie } |A| \text{ jest długością } A$$

Zmienna losowa $X(\omega) = \omega$, $(\omega \in [0,1])$

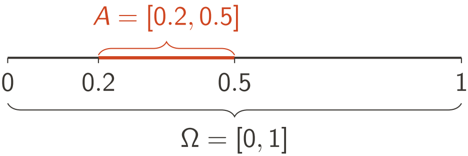
Motywacja: losowanie punktu z odcinka

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset [0,1]$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in [0,1]$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{gdzie } |A| \text{ jest długością } A$$

Zmienna losowa $X(\omega) = \omega$, $(\omega \in [0,1])$



$P(X \in A) = 0.3$

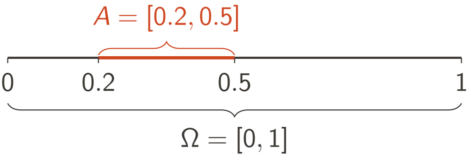
Motywacja: losowanie punktu z odcinka

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset [0, 1]$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in [0, 1]$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{gdzie } |A| \text{ jest długością } A$$

Zmienna losowa $X(\omega) = \omega$, $(\omega \in [0, 1])$



$P(X \in A) = 0.3$

Ile wynosi $P(X = x)$ dla dowolnego $x \in [0, 1]$?

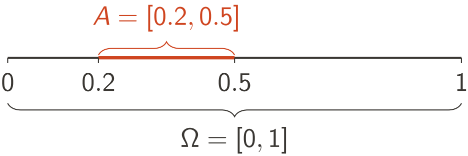
Motywacja: losowanie punktu z odcinka

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset [0,1]$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in [0,1]$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{gdzie } |A| \text{ jest długością } A$$

Zmienna losowa $X(\omega) = \omega$, $(\omega \in [0,1])$



$P(X \in A) = 0.3$

Ile wynosi $P(X = x)$ dla dowolnego $x \in [0,1]$? 0

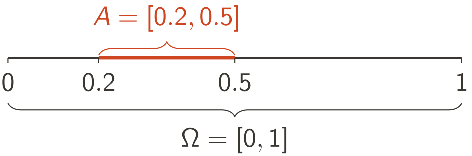
Motywacja: losowanie punktu z odcinka

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset [0,1]$

Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in [0,1]$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{gdzie } |A| \text{ jest długością } A$$

Zmienna losowa $X(\omega) = \omega$, $(\omega \in [0,1])$



$P(X \in A) = 0.3$

Ile wynosi $P(X = x)$ dla dowolnego $x \in [0,1]$? 0

- Możemy przypisać prawdopodobieństwa $P(X \in A)$
- Wartości $P(X = x)$ nie mają sensu, bo stale wynoszą zero!

Motywacja: zmienne losowe ciągłe

Często będziemy mieli do czynienia ze zmiennymi losowymi przyjmującymi nieprzeliczalnie wiele wartości

- Wartość napięcia w sieci
- Czas oczekiwania na autobus
- Czas życia dysku twardego
- Wzrost losowo wybranej osoby z populacji

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez taką zmienną jednej konkretnej wartości wynosi zero.

Jak możemy określić rozkład prawdopodobieństwa takich zmiennych?

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

$$(0.5 - 0.2)\rho = 0.15$$

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

$$(0.5 - 0.2)\rho = 0.15$$

Ile będzie ważył jakikolwiek punkt pręta $x \in [0, 1]$?

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

$$(0.5 - 0.2)\rho = 0.15$$

Ile będzie ważył jakikolwiek punkt pręta $x \in [0, 1]$? 0

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

$$(0.5 - 0.2)\rho = 0.15$$

Ile będzie ważył jakikolwiek punkt pręta $x \in [0, 1]$? 0

Ile będzie ważył powyższy odcinek $[0.2, 0.5]$ jeśli pręt ma niejednorodną gęstość $\rho(x)$ $(x \in [0, 1])$?

Motywacja

Mamy metalowy pręt o długości 1 metra i gęstości $\rho = 0.5$ kg/m. Ile będzie ważył odcinek pręta wycięty między punktami 0.2 m a 0.5 m?

$$(0.5 - 0.2)\rho = 0.15$$

Ile będzie ważył jakikolwiek punkt pręta $x \in [0, 1]$? 0

Ile będzie ważył powyższy odcinek $[0.2, 0.5]$ jeśli pręt ma niejednorodną gęstość $\rho(x)$ ($x \in [0, 1]$)?

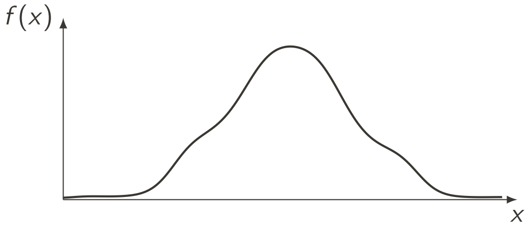
$$\int_{0.2}^{0.5} \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Zmienna losowa ciągła

Zmienną losową $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą, jeśli istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, taka że dla dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X.

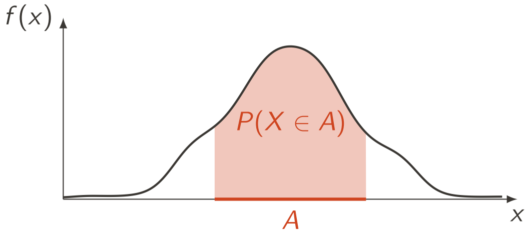


Zmienna losowa ciągła

Zmienną losową $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągła, jeśli istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, taka że dla dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi:

$$P(X \in A) \;=\; \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X.

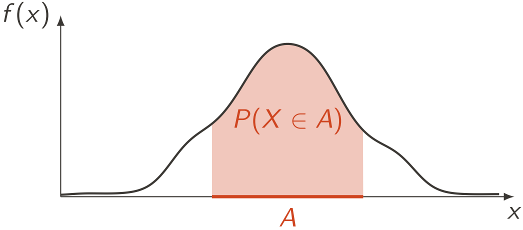


Zmienna losowa ciągła

Zmienną losową $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą, jeśli istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, taka że dla dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi:

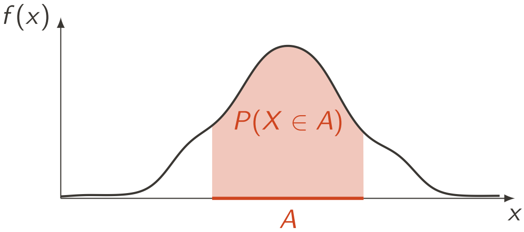
$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcję f nazywamy gęstością prawdopodobieństwa zmiennej X.



Uwaga: Ponieważ $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, musi zachodzić: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Gęstości prawdopodobieństwa



- Nieujemność: $f(x) \geqslant 0$ (inaczej przeczyłoby to aksjomatom prawdopodobieństwa)
- Normalizacja: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1$
- Gęstość prawdopodobieństwa może przekraczać 1 (a nawet dążyć do nieskończoności!), ważne, aby całka z gęstości nie przekroczyła 1

Przykład: losowanie punktu z odcinka

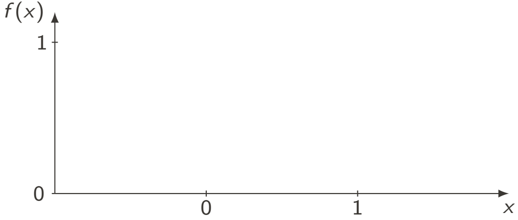
$P(X \in A) = |A|$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.

Przykład: losowanie punktu z odcinka

$P(X \in A) = |A|$

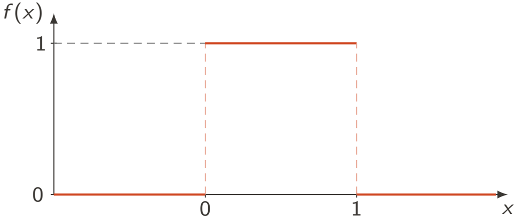
Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.



Przykład: losowanie punktu z odcinka

$P(X \in A) = |A|$

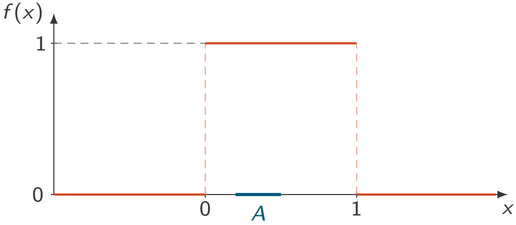
Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.



Przykład: losowanie punktu z odcinka

$P(X \in A) = |A|$

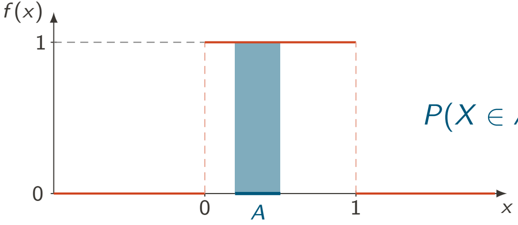
Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.



Przykład: losowanie punktu z odcinka

$P(X \in A) = |A|$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.

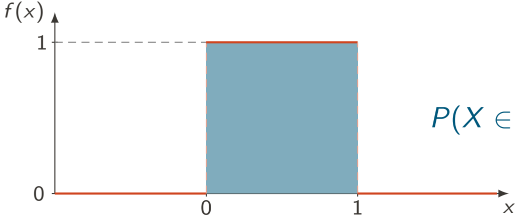


$$P(X \in A) = \int_A 1 \, \mathrm{d}x = |A|$$

Przykład: losowanie punktu z odcinka

$$P(X \in A) = |A|$$

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej X.

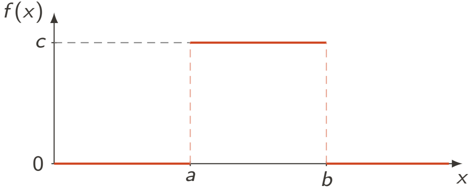


$$P(X \in \mathbb{R}) = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$$

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

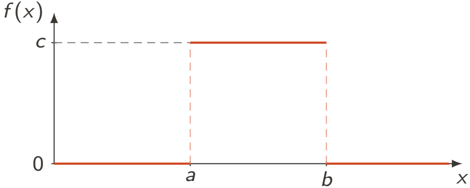
$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

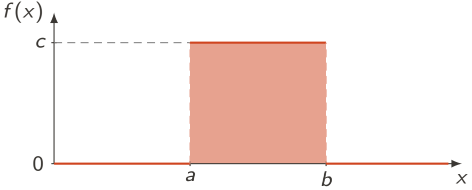


Ile wynosi c?

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



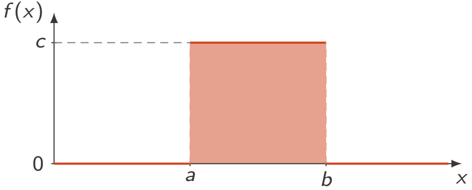
Ile wynosi c?

$$1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b c\,\mathrm{d}x \;=\;$$

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



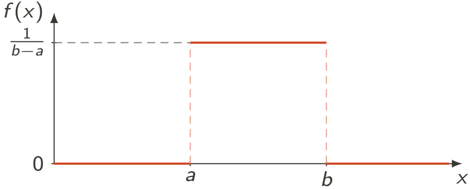
Ile wynosi c?

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = (b-a)c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}$$

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



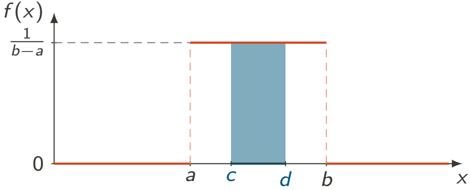
Ile wynosi c?

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = (b-a)c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



Ile wynosi c?

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = (b-a)c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

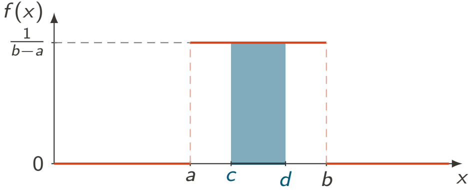
Dla $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$:

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}$$

Rozkład jednostajny

Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[a, b]$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$



Ile wynosi c?

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = (b-a)c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{b-a}$$

Dla $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$:

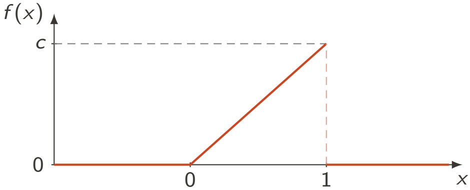
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}$$

Uwaga: Aby gęstość istniała, odcinek $[a, b]$ musi mieć skończoną długość!

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} cx & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

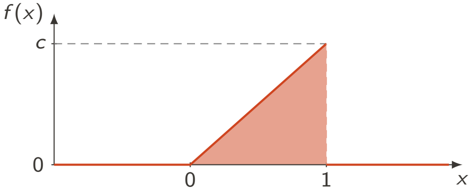


Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} cx & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



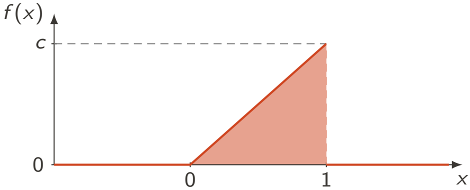
Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

$$1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x \;=$$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} cx & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



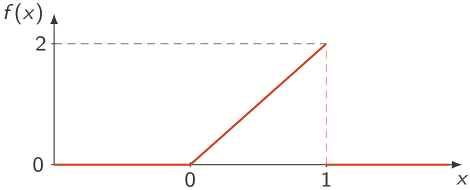
Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{c}{2}$$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



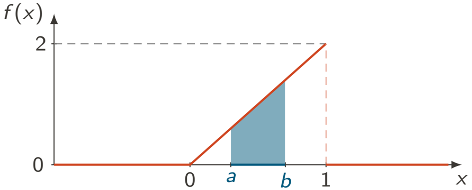
Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

$$1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x \;=\; c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \;=\; \frac{c}{2} \qquad c = 2$$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

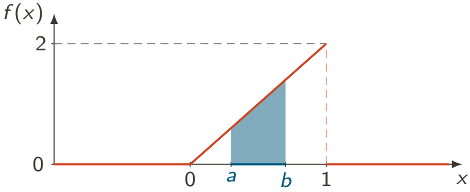
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{c}{2} \qquad c = 2$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b 2x\,\mathrm{d}x =$$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

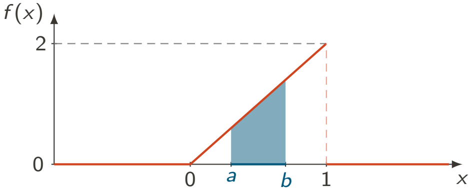
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{c}{2} \qquad c = 2$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_a^b =$$

Przykład

Rozważmy zmienną X o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$



Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{c}{2} \qquad c = 2$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_a^b = b^2 - a^2$$

Zadanie

Zadanie 1

Rozważ zmienną X o gęstości:

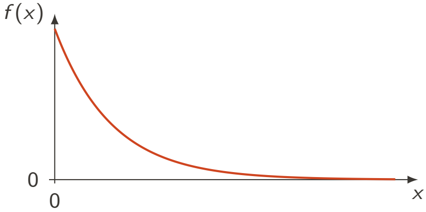
$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

Wyznacz c i oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2$

Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \text{Exp}(\lambda)$), jeśli:

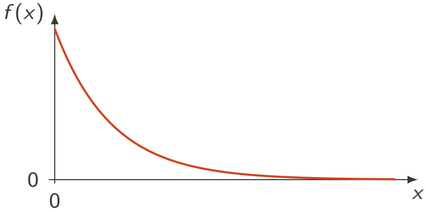
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \text{Exp}(\lambda)$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Rozkład wykładniczy bardzo dobrze modeluje czas oczekiwania na zdarzenie, np:

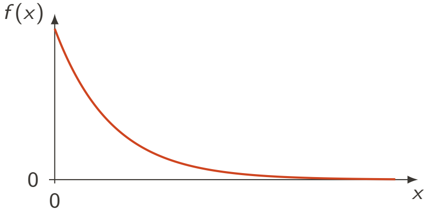
- Czas do momentu rozpadu cząstki promieniotwórczej
- Czas oczekiwania na kolejnego klienta w sklepie
- Czas nadejścia kolejnego pakietu w sieci komputerowej

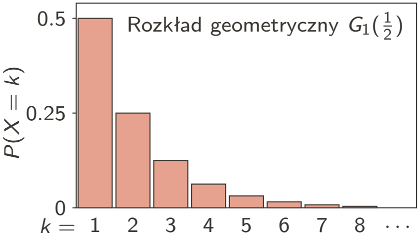
Jest ciągłą wersją rozkładu geometrycznego

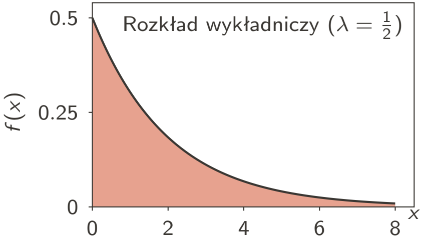
Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



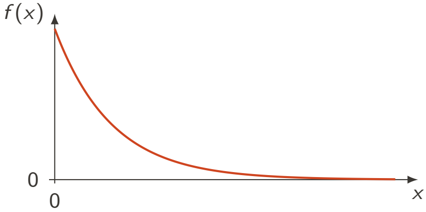




Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

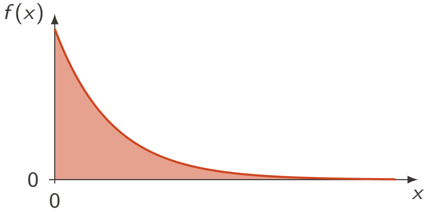


Wykorzystamy całkę: $\int \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,e^{-\lambda x}$

Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



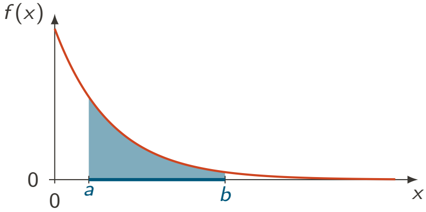
Wykorzystamy całkę: $\int \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,e^{-\lambda x}$

Normalizacja: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} \;=\; 1$

Rozkład wykładniczy

Zmienną losową X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ (zapisujemy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Wykorzystamy całkę: $\int \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}$

Normalizacja: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 1$

Wyznaczamy $P(a \leqslant X \leqslant b)$ dla $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$:

$$\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b | X \geqslant a)$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b | X \geqslant a)$

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant t) \; = \; \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \; = \; -e^{-\lambda x}\Big|_t^\infty \; = \; e^{-\lambda t}$$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b | X \geqslant a)$

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_t^\infty = e^{-\lambda t}$$

$$P(X \geqslant b | X \geqslant a) = \frac{P(\{X \geqslant b\} \cap \{X \geqslant a\})}{P(\{X \geqslant a\})}$$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b | X \geqslant a)$

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_t^\infty = e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant b | X \geqslant a) &= \frac{P(\{X \geqslant b\} \cap \{X \geqslant a\})}{P(\{X \geqslant a\})} \\ &= \frac{P(X \geqslant b)}{P(X \geqslant a)} \end{aligned}$$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b|X \geqslant a)$

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant t) \;=\; \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,e^{-\lambda x}\Big|_t^{\infty} \;=\; e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant b|X \geqslant a) &= \frac{P(\{X \geqslant b\} \cap \{X \geqslant a\})}{P(\{X \geqslant a\})} \\ &= \frac{P(X \geqslant b)}{P(X \geqslant a)} = \frac{e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} \end{aligned}$$

Brak pamięci rozkładu wykładniczego

Dla $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ i $b \geqslant a$, oblicz $P(X \geqslant b | X \geqslant a)$

Odpowiedź:

$$P(X \geqslant t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = -e^{-\lambda x}\Big|_t^{\infty} = e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant b | X \geqslant a) &= \frac{P(\{X \geqslant b\} \cap \{X \geqslant a\})}{P(\{X \geqslant a\})} \\ &= \frac{P(X \geqslant b)}{P(X \geqslant a)} = \frac{e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} \\ &= e^{-\lambda(b-a)} = P(X \geqslant b - a) \end{aligned}$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) \;=\; P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) \ = \ P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

$$F(x) \ = \ P(X \leqslant x) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(x)$ jest więc funkcją pierwotną (całką) $f(x)$, tym samym $f(x) = F'(x)$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(x)$ jest więc funkcją pierwotną (całką) $f(x)$, tym samym $f(x) = F'(x)$

Dystrybuanta ciągłej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) \;=\; P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

$$F(x) \;=\; P(X \leqslant x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(x)$ jest więc funkcją pierwotną (całką) $f(x)$, tym samym $f(x) = F'(x)$

Dystrybuanta ciągłej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą

$$P(X \geqslant a) \;=\; 1 - P(X \leqslant a) \;=\; 1 - F(a)$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(x)$ jest więc funkcją pierwotną (całką) $f(x)$, tym samym $f(x) = F'(x)$

Dystrybuanta ciągłej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą

$$P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a)$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Przypomnienie: Dystrybuantą zmiennej X nazywamy funkcję:

$$F(x) \;=\; P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą; $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Dla ciągłej zmiennej losowej:

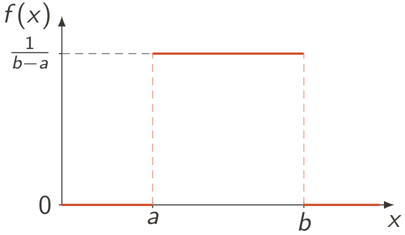
$$F(x) \;=\; P(X \leqslant x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$F(x)$ jest więc funkcją pierwotną (całką) $f(x)$, tym samym $f(x) = F'(x)$

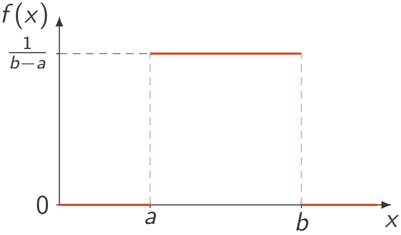
Dystrybuanta ciągłej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą

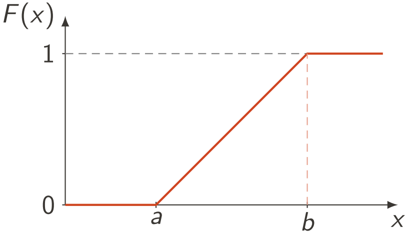
$$\begin{aligned}
P(X \geqslant a) &= 1 - P(X \leqslant a) \;=\; 1 - F(a) \\
P(a \leqslant X \leqslant b) &= \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Przykład: rozkład jednostajny



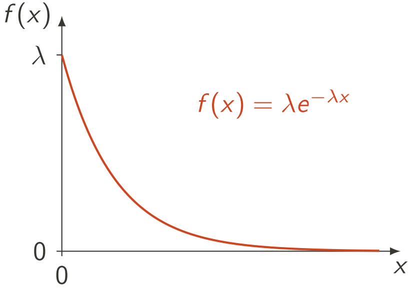
Przykład: rozkład jednostajny



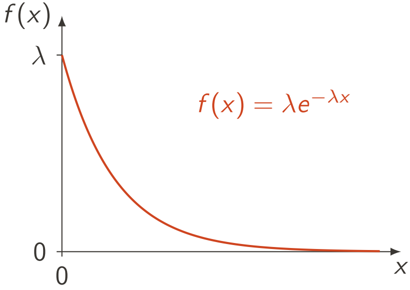


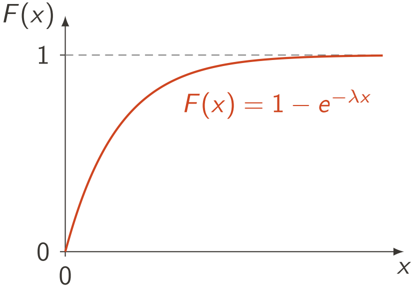
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Przykład: rozkład wykładniczy



Przykład: rozkład wykładniczy





Dla $x \geqslant 0$:

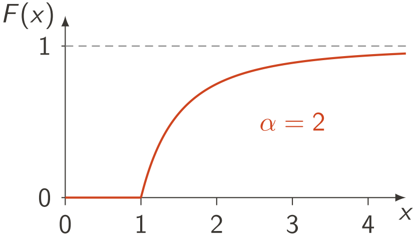
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -e^{-\lambda t}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Zadanie

Zadanie 2

Rozważ ciągłą zmienną losową, której rozkład zdefiniowany jest za pomocą dystrybuanty:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} & x \geqslant 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$



dla pewnego $\alpha > 0$.

Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

X – ciągła zmienna o gęstości $f_X(x)$, przyjmująca wartości w $[a, b]$

$Y = g(X)$ – funkcja zmiennej losowej, przyjmująca wartości w $[c, d]$
$g\colon [a, b] \to [c, d]$ jest różniczkowalna i odwracalna

Wyznacz gęstość $f_Y(y)$ zmiennej Y

Rozkład funkcji zmiennej losowej

X – ciągła zmienna o gęstości $f_X(x)$, przyjmująca wartości w $[a, b]$

$Y = g(X)$ – funkcja zmiennej losowej, przyjmująca wartości w $[c, d]$
$g : [a, b] \to [c, d]$ jest różniczkowalna i odwracalna

Wyznacz gęstość $f_Y(y)$ zmiennej Y

$$f_Y(y) \;=\; f_X\left(h(y)\right)\left|h'(y)\right| \qquad \text{dla } y \in [c, d]$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X\big(h(y)\big)\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c, d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y)$$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X\big(h(y)\big)\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;\;=\;\; P\big(g(X) \leqslant y\big)$$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \; = \; f_X\big(h(y)\big)\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c, d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$\begin{aligned} F_Y(y) \; = \; P(Y \leqslant y) \;\; &= \;\; P\big(g(X) \leqslant y\big) \\ &= \;\; P\big(X \leqslant g^{-1}(y)\big) \end{aligned}$$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;&=\; P(g(X) \leqslant y) \\ &=\; P(X \leqslant g^{-1}(y)) \;=\; F_X(h(y)) \end{aligned}$$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;&=\; P\big(g(X) \leqslant y\big) \\ &=\; P\big(X \leqslant g^{-1}(y)\big) \;=\; F_X\big(h(y)\big) \end{aligned}$$

Stąd: $f_Y(y) \;=\; \big(F_X(h(y))\big)' \;=$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;&=\; P\big(g(X) \leqslant y\big) \\ &=\; P\big(X \leqslant g^{-1}(y)\big) \;=\; F_X\big(h(y)\big) \end{aligned}$$

Stąd: $f_Y(y) \;=\; \big(F_X(h(y))\big)' \;=\; f_X(h(y))\,h'(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)|$

Rozkład funkcji zmiennej losowej

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)| \qquad \text{dla } y \in [c,d], \qquad Y = g(X)$$

gdzie $h = g^{-1}$ jest funkcją odwrotną do g

Dowód: Jeśli g jest odwracalna – to jest albo rosnąca, albo malejąca.

Dowód tylko dla rosnącej g (wtedy h jest również rosnąca). Obliczymy wpierw dystrybuantę F_Y zmiennej Y, a później ją zróżniczkujemy

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;=\; P(Y \leqslant y) \;&=\; P(g(X) \leqslant y) \\ &=\; P(X \leqslant g^{-1}(y)) \;=\; F_X(h(y)) \end{aligned}$$

Stąd: $f_Y(y) \;=\; \left(F_X(h(y))\right)' \;=\; f_X(h(y))\,h'(y) \;=\; f_X(h(y))\,|h'(y)|$

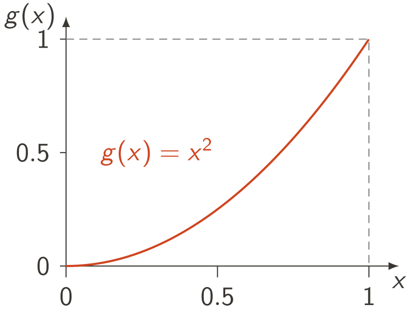
Zadanie 3

Dokończ dowód dla g malejącej.

Przykład

Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

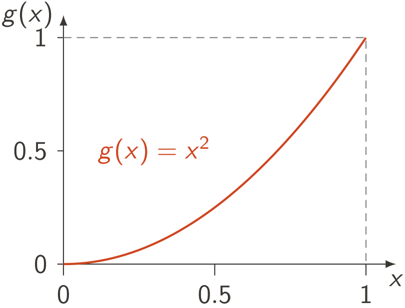
Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = X^2$.



Przykład

Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = X^2$.

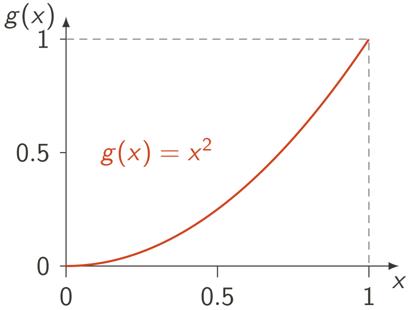


Rozwiązanie: $g(x) = x^2$, stąd $h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Przykład

Niech $X \sim \text{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = X^2$.



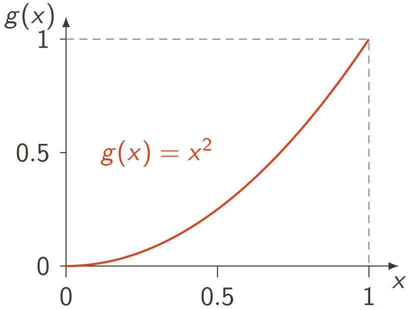
Rozwiązanie: $g(x) = x^2$, stąd $h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$h'(y) = (\sqrt{y})' =$$

Przykład

Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = X^2$.



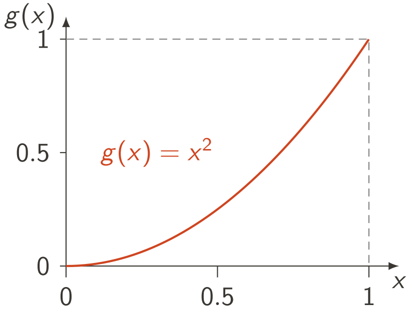
Rozwiązanie: $g(x) = x^2$, stąd $h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$h'(y) \;=\; (\sqrt{y})' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Przykład

Niech $X \sim \text{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wyznacz gęstość f_Y zmiennej $Y = X^2$.



Rozwiązanie: $g(x) = x^2$, stąd $h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$$h'(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

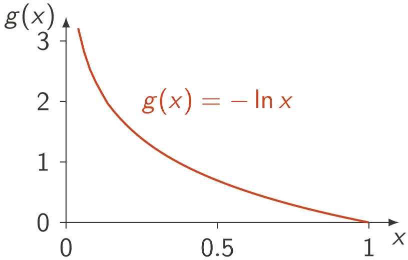
Tym samym:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))\,|h'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{dla } y \in [0,1]$$

Przykład

Niech $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,
tzn. $f_X(x) = 1$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Wyznacz gęstość f_Y zmiennej
$Y = -\ln X$.



Zadanie 4

Pokaż, że $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, tzn. $f_Y(y) = e^{-y}$ dla $y \in [0, \infty)$.

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu dyskretnego P_X mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajnie)?

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu dyskretnego P_X mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0,1]$ (jednostajnie)?

Weźmy zmienną $X \in \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X=1) = 0.2 \\
p_2 &= P(X=2) = 0.1 \\
p_3 &= P(X=3) = 0.3 \\
p_4 &= P(X=4) = 0.4
\end{aligned}$$

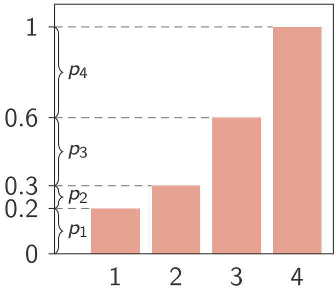
Jak wylosować liczbę z tego rozkładu?

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu dyskretnego P_X mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0, 1]$ (jednostajnie)?

Weźmy zmienną $X \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= P(X = 1) = 0.2 \\
p_2 &= P(X = 2) = 0.1 \\
p_3 &= P(X = 3) = 0.3 \\
p_4 &= P(X = 4) = 0.4
\end{aligned}
$$



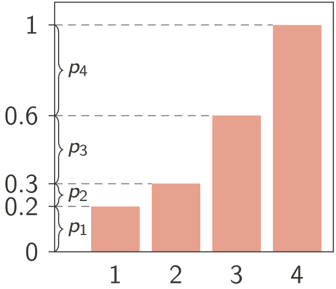
Jak wylosować liczbę z tego rozkładu?

Losowanie liczb

Jak wylosować liczbę z danego rozkładu dyskretnego P_X mając do dyspozycji tylko generator liczb z zakresu $[0,1]$ (jednostajnie)?

Weźmy zmienną $X \in \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X=1) = 0.2 \\ p_2 &= P(X=2) = 0.1 \\ p_3 &= P(X=3) = 0.3 \\ p_4 &= P(X=4) = 0.4 \end{aligned}$$



Jak wylosować liczbę z tego rozkładu?
Mając zmienną $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, zmienna:

$$X = F^{-1}(U)$$

ma rozkład opisany dystrybuantą F.

Losowanie liczb

Zadanie 5

Pokaż, że jeśli $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, to zmienna

$$X = F^{-1}(U)$$

dla ściśle rosnącej funkcji F o wartościach z przedziału $[0,1]$ ma rozkład opisany za pomocą dystrybuanty $F_X = F$.

Wartość oczekiwana

Dla zmiennej dyskretnej X:

$$EX = \sum_{x} xP(X = x)$$

Wartość oczekiwana

Dla zmiennej dyskretnej X:

$$EX = \sum_x xP(X = x)$$

Dla zmiennej ciągłej X wartość oczekiwaną definiujemy jako:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Uwaga: wystarczy całkować jedynie po zbiorze, dla którego $f(x) > 0$.

Przykład

Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Przykład

Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź:

Gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \dfrac{1}{b-a} \qquad \text{dla } x \in [a, b]$

Przykład

$\boxed{\text{Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej } X \sim \mathrm{Unif}[a, b]}$

Odpowiedź:

$$\text{Gęstość prawdopodobieństwa:} \quad f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{dla } x \in [a, b]$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, \mathrm{d}x$$

Przykład

Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź:

Gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \dfrac{1}{b-a} \qquad \text{dla } x \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a}
\end{aligned}
$$

Przykład

Wyznacz wartość oczekiwaną zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź:

Gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \dfrac{1}{b-a} \qquad \text{dla } x \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = \frac{1}{2}(a+b)
\end{aligned}
$$

Zadanie

Zadanie 6

Pokaż, że dla zmiennej $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

Własności wartości oczekiwanej

Podobnie jak w przypadku dyskretnym zachodzi:

- Jeśli $a \leqslant X \leqslant b$ to $a \leqslant EX \leqslant b$
- Jeśli $Y = g(X)$ jest funkcją zmiennej losowej X to:

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x$$

- Wartość oczekiwana jest funkcją liniową:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aEX + b \\ E(X_1 + \ldots + X_n) &= EX_1 + \ldots + EX_n \end{aligned}$$

Wariancja zmiennej losowej

$$\boxed{D^2(X) \;=\; E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - EX\big)^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Wariancja zmiennej losowej

$$D^2(X) = E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - EX\big)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Podobnie jak w przypadku dyskretnym, zachodzi:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E(X^2) - (EX)^2 \\ D^2(aX + b) &= a^2 D^2(X) \end{aligned}$$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) \;=\; E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) \;=\; E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) = E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x$$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) \ = \ E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) \ = \ E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

$$E(X^2) \quad = \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b \ = \ \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}$$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) = E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} \\ &= \frac{1}{3}\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{b-a} = \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2) \end{aligned}$$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) \; = \; E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) \; = \; E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) \; &= \; \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x \; = \; \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b \; = \; \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} \\ &= \; \frac{1}{3}\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{b-a} \; = \; \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2) \end{aligned}$$

Stąd: $$D^2(X) \; = \; \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2) \; - \; \frac{(a+b)^2}{4}$$

Przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \sim \mathrm{Unif}[a, b]$

Odpowiedź: Ponieważ $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$, mamy:

$$D^2(X) = E(X^2) - \frac{(a+b)^2}{4}$$

Musimy więc tylko wyznaczyć $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} \\ &= \frac{1}{3}\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{b-a} = \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2) \end{aligned}$$

Stąd: $$D^2(X) = \frac{1}{3}(b^2+ba+a^2) - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Zadanie

Zadanie 7

Pokaż, że dla zmiennej $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Zadanie

Zadanie 7

Pokaż, że dla zmiennej $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Zadanie 8

Kij o długości 1 złamano w punkcie wybranym z rozkładu jednostajnego. Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję pola prostokąta o długościach boków równych dwóm otrzymanym kawałkom kija

Rozkład normalny

Zmienna losowa $X \in \mathbb{R}$ ma rozkład normalny (gaussowski), jeśli:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

dla pewnych parametrów $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.

Zapisujemy: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Rozkład normalny

Zmienna losowa $X \in \mathbb{R}$ ma rozkład normalny (gaussowski), jeśli:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

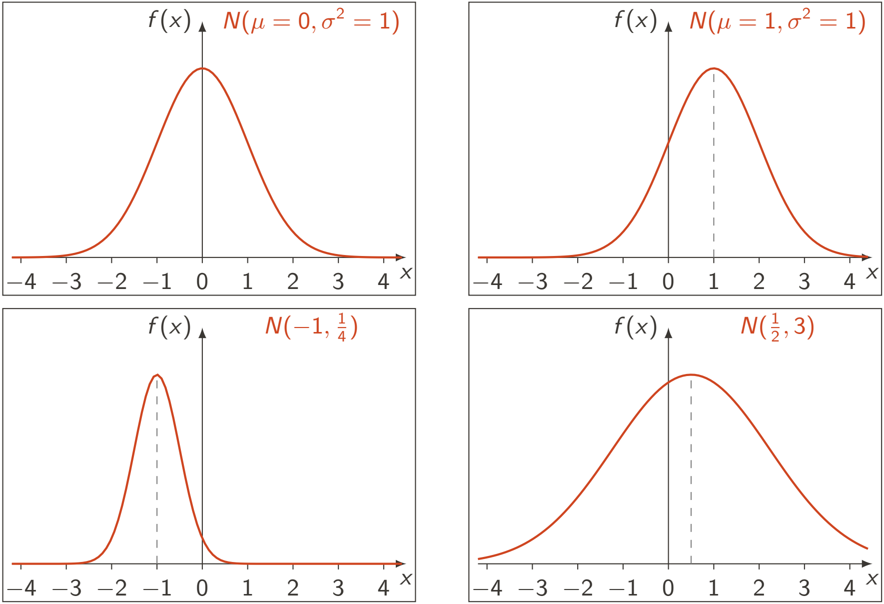
dla pewnych parametrów $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$.

Zapisujemy: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Rozkład normalny jest najważniejszym rozkładem prawdopodobieństwa i modeluje bardzo wiele zjawisk losowych w przyrodzie będących wynikiem uśredniania wielu niezależnych czynników

- Rozkład pomiarów wielkości fizycznych (napięcie w sieci, prędkość cząstek w gazie, fluktuakcje temperatury)
- Rozkład wzrostu w populacji
- Rozkład liczby punktów na egzaminie
- Iloraz inteligencji
- i wiele, wiele innych ...

Rozkład normalny – przykłady



Własności rozkładu normalnego

Rozkład poprawnie normalizuje się:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \;=\; 1$$

Własności rozkładu normalnego

Rozkład poprawnie normalizuje się:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \;=\; 1$$

Zadanie 9

Udowodnij tę własność korzystając z wartości tzw. całki Gaussa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \;=\; \sqrt{\pi}$$

Własności rozkładu normalnego

Rozkład $N(0,1)$ opisany gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim N(0,1)$, to:

$$EX = 0, \qquad D^2(X) = 1$$

Własności rozkładu normalnego

Rozkład $N(0,1)$ opisany gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim N(0,1)$, to:

$$EX = 0, \qquad D^2(X) = 1$$

Dowód:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

Własności rozkładu normalnego

Rozkład $N(0,1)$ opisany gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim N(0,1)$, to:

$$EX = 0, \qquad D^2(X) = 1$$

Dowód:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 0,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta

Własności rozkładu normalnego

Rozkład $N(0,1)$ opisany gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim N(0,1)$, to:

$$EX = 0, \qquad D^2(X) = 1$$

Dowód:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 0,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta

$$D^2(X) = E(X^2) - \underbrace{(EX)^2}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1$$

Własności rozkładu normalnego

Rozkład $N(0,1)$ opisany gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

nazywamy standardowym rozkładem normalnym. Jeśli $X \sim N(0,1)$, to:

$$EX = 0, \qquad D^2(X) = 1$$

Dowód:

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 0,$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta

$$D^2(X) = E(X^2) - \underbrace{(EX)^2}_{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = 1$$

Zadanie 10*

Pokaż, że: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) \;=\; ax + b \quad \Longrightarrow \quad h(y) \;=\; g^{-1}(y) \;=\; \frac{y - b}{a}$$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) = ax + b \implies h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|$$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) = ax + b \quad \Longrightarrow \quad h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}$$

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(h(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{|a|}$$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) = ax + b \implies h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(h(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{|a|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) = ax + b \implies h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(h(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{|a|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Jest to dokładnie gęstość rozkładu normalnego $N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$.

Własności rozkładu normalnego

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Y = aX + b \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$$

Dowód: Wykorzystujemy wzór na gęstość funkcji $Y = g(X)$.

$$g(x) = ax + b \implies h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(h(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{|a|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Jest to dokładnie gęstość rozkładu normalnego $N(\mu a + b, \sigma^2 a^2)$.

Wniosek: Funkcja liniowa zmiennej o rozkładzie normalnym ma rozkład normalny

Własności rozkładu normalnego

Wniosek: Jeśli $Z \sim N(0, 1)$ to:

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu, \sigma^2)$$

Zmienna o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ jest przeskalowaną (przez wartość σ) i przesuniętą (o wartość μ) zmienną $N(0, 1)$.

Własności rozkładu normalnego

Wniosek: Jeśli $Z \sim N(0,1)$ to:

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu, \sigma^2)$$

Zmienna o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ jest przeskalowaną (przez wartość σ) i przesuniętą (o wartość μ) zmienną $N(0,1)$.

Wniosek: Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$EX = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2$$

Własności rozkładu normalnego

Wniosek: Jeśli $Z \sim N(0,1)$ to:

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu, \sigma^2)$$

Zmienna o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ jest przeskalowaną (przez wartość σ) i przesuniętą (o wartość μ) zmienną $N(0,1)$.

Wniosek: Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$EX = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2$$

Dowód: Możemy zapisać, że $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$.

$$EX = \sigma \underbrace{EZ}_{0} + \mu = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2 \underbrace{D^2(Z)}_{1} = \sigma^2$$

Własności rozkładu normalnego

Wniosek: Jeśli $Z \sim N(0,1)$ to:

$$X = \sigma Z + \mu \quad \text{ma rozkład} \quad N(\mu, \sigma^2)$$

Zmienna o rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ jest przeskalowaną (przez wartość σ) i przesuniętą (o wartość μ) zmienną $N(0,1)$.

Wniosek: Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$EX = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2$$

Dowód: Możemy zapisać, że $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$.

$$EX = \sigma \underbrace{EZ}_{0} + \mu = \mu, \qquad D^2(X) = \sigma^2 \underbrace{D^2(Z)}_{1} = \sigma^2$$

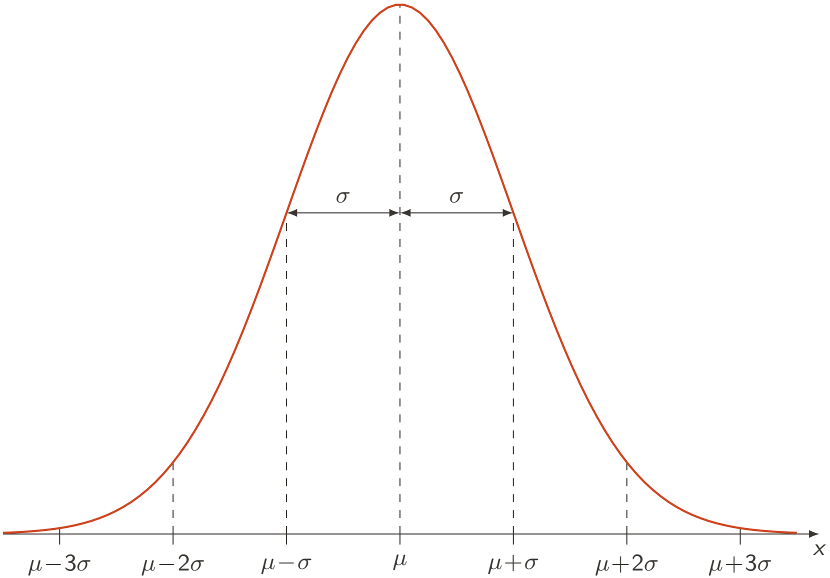
Parametry μ i σ^2 oznaczają więc wartość oczekiwaną i wariancję!

Własności rozkładu normalnego

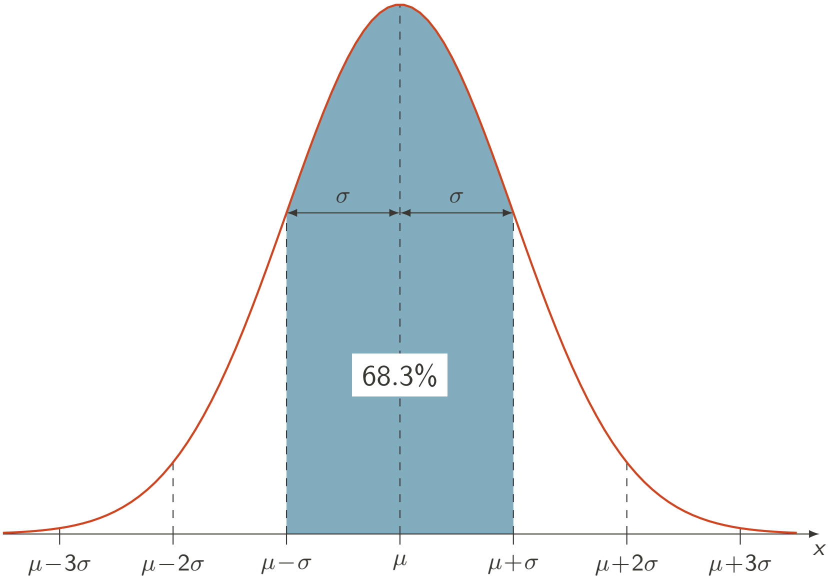
Wniosek: Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{ma rozkład} \quad N(0, 1)$$

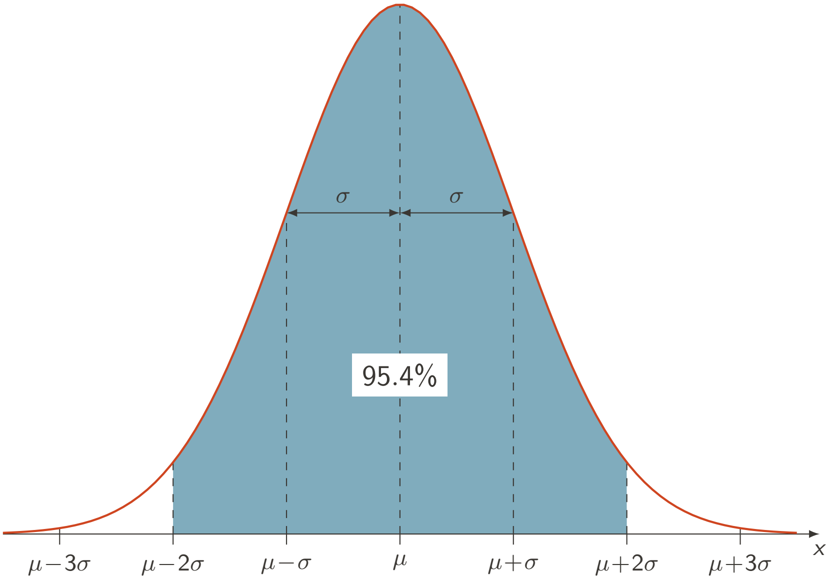
Rozkład normalny



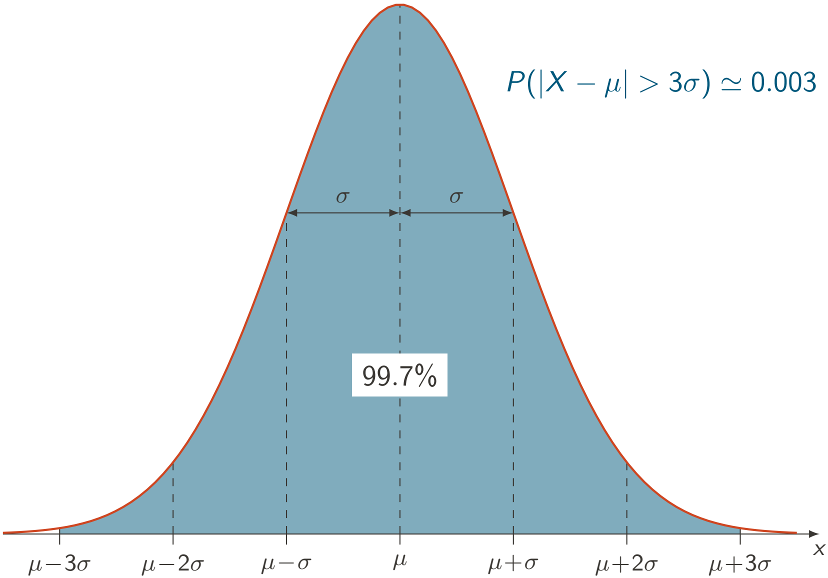
Rozkład normalny



Rozkład normalny



Rozkład normalny



Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(0,1)$. Funkcję:

$$\Phi(x) \;=\; P(X \leqslant x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

nazywamy dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(0,1)$. Funkcję:

$$\Phi(x) \;=\; P(X \leqslant x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

nazywamy dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

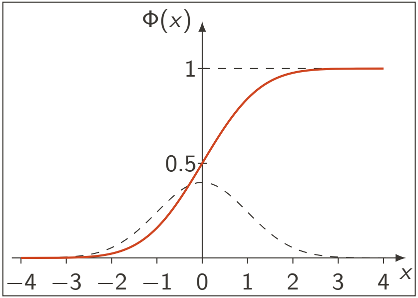
$\Phi(x)$ nie ma analitycznej postaci, aby ją wyznaczyć, trzeba posłużyć się tablicami bądź funkcjami numerycznymi

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051

```
Console ~/

R version 3.2.3 (2015-12-10) -- "Wooden Christmas-Tree"
Copyright (C) 2015 The R Foundation for Statistical Computing
Platform: x86_64-pc-linux-gnu (64-bit)

R is free software and comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
You are welcome to redistribute it under certain conditions.
Type 'license()' or 'licence()' for distribution details.

  Natural language support but running in an English locale

R is a collaborative project with many contributors.
Type 'contributors()' for more information and
'citation()' on how to cite R or R packages in publications.

Type 'demo()' for some demos, 'help()' for on-line help, or
'help.start()' for an HTML browser interface to help.
Type 'q()' to quit R.

> pnorm(0)
[1] 0.5
>
```

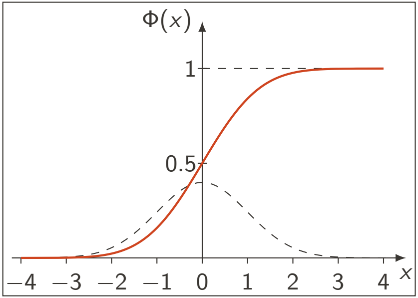
Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= P(X \leqslant x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$



Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

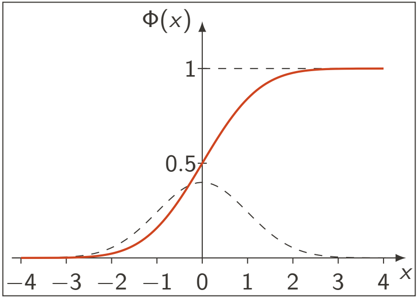
$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(X \leqslant x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego

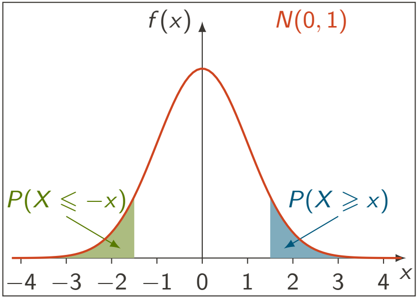
$$\begin{aligned}\Phi(x) &= P(X \leqslant x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

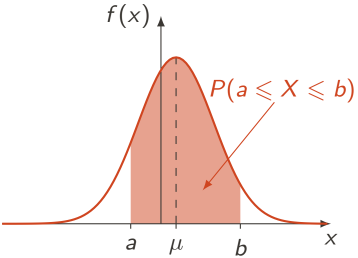
Wynika z symetrii zmiennej $X \sim N(0,1)$ względem zera:

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= P(X \leqslant -x)\\ &= P(X \geqslant x)\\ &= 1 - P(X \leqslant x) = 1 - \Phi(x)\end{aligned}$$



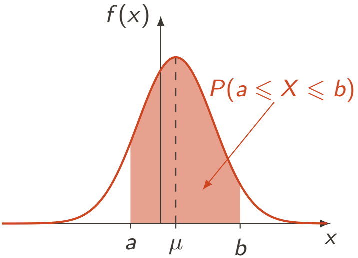
Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

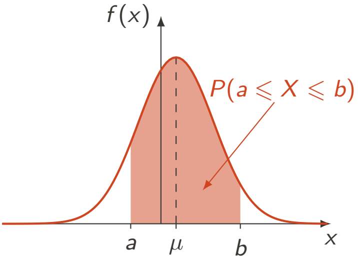
Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.

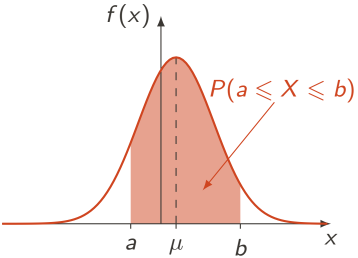


Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \quad = \quad P(a-\mu \leqslant X-\mu \leqslant b-\mu)$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.

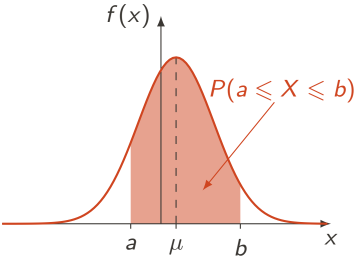


Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a-\mu \leqslant X-\mu \leqslant b-\mu) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.

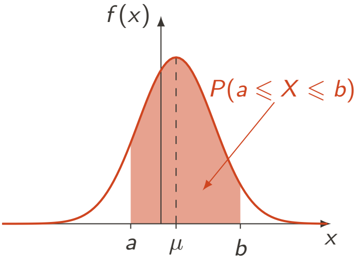


Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a-\mu \leqslant X-\mu \leqslant b-\mu) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.

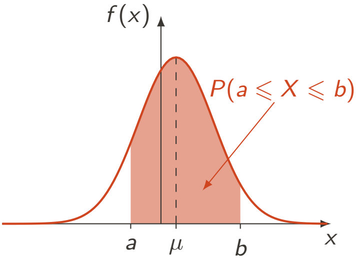


Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a-\mu \leqslant X-\mu \leqslant b-\mu) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



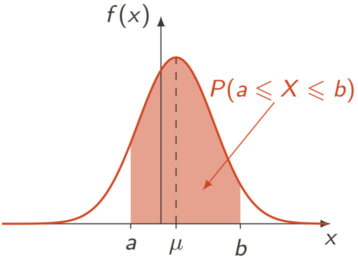
Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Lub odwrotnie: $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \quad = \quad P(a \leqslant \sigma Z + \mu \leqslant b)$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



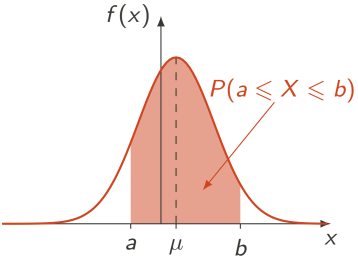
Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Lub odwrotnie: $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a \leqslant \sigma Z + \mu \leqslant b) \\ &= P\left(a - \mu \leqslant \sigma Z \leqslant b - \mu\right) \end{aligned}$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



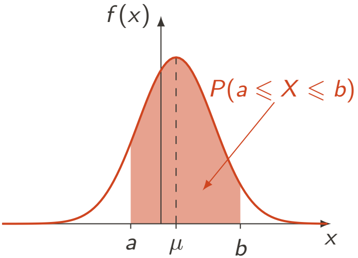
Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Lub odwrotnie: $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a \leqslant \sigma Z + \mu \leqslant b) \\ &= P\left(a - \mu \leqslant \sigma Z \leqslant b - \mu\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Obliczanie prawdopodobieństw dla rozkładu normalnego

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz $P(a \leqslant X \leqslant b)$, zapisując wynik za pomocą funkcji $\Phi(x)$.



Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ to $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Lub odwrotnie: $X = \sigma Z + \mu$ dla $Z \sim N(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P(a \leqslant X \leqslant b) &= P(a \leqslant \sigma Z + \mu \leqslant b) \\
&= P\left(a - \mu \leqslant \sigma Z \leqslant b - \mu\right) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Zadanie

Zadanie 11

Niech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Oblicz:

1. $P(-1 \leqslant X \leqslant 3)$ jeśli $\mu = 1$ i $\sigma^2 = 4$,
2. $P(|X - 3| \geqslant 2)$ jeśli $\mu = -1$ i $\sigma^2 = 9$,
3. $P(|X + 1| \leqslant 5)$ jeśli $\mu = 2$ i $\sigma^2 = 16$,

wynik przedstawiając za pomocą wartości funkcji $\Phi(x)$ dla $x \geqslant 0$.