Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

8. Wielowymiarowe zmienne losowe II

16.12.2020

Zadanie 1. *Niech $g(\boldsymbol{X})$ będzie funkcją wektora dyskretnych zmiennych losowych $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Pokaż, że zachodzi:*

$$E\big(g(\boldsymbol{X})\big) \;=\; \sum_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$$

Odpowiedź: Zdefiniujmy zmienną losową $Z = g(\boldsymbol{X})$. Ponieważ z definicji rozkładu funkcji zmiennej losowej:

$$P(Z = z) = \sum_{\boldsymbol{x}\colon\, g(\boldsymbol{x})=z} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}),$$

to

$$\begin{aligned}
E\big(g(\boldsymbol{X})\big) \;&=\; EZ \;=\; \sum_z z\, P(Z = z) \\
&=\; \sum_z z\Big(\sum_{\boldsymbol{x}\colon\, g(\boldsymbol{x})=z} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})\Big) \\
&=\; \sum_z \sum_{\boldsymbol{x}\colon\, g(\boldsymbol{x})=z} g(\boldsymbol{x}) P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \\
&\overset{(*)}{=}\; \sum_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ zauważyliśmy, że $\sum_z \sum_{\boldsymbol{x}\colon\, g(\boldsymbol{x})=z}$ jest po prostu sumą po wszystkich $\boldsymbol{x}$.

Zadanie 2. *Pokaż, że dla dowolnych zmiennych losowych:*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n.$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{n-1}.$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned}
E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) \quad &= \quad E(Y + X_n) \\
&\overset{(*)}{=} \quad EY + EX_n \\
&= \quad E(X_1 + \ldots + X_{n-1}) + EX_n \\
&\overset{(\dagger)}{=} \quad EX_1 + \ldots + EX_{n-1} + EX_n,
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 3. *Załóżmy, że* 10 *osób obecnych w restauracji zamówiło w tym samym czasie* 10 różnych *dań. Niestety roztrzepany kelner zapisał tylko nazwy dań, ale nie zapisał kto co zamawiał. Po przygotowaniu potraw postanowił je więc rozdać gościom restauracji* w sposób całkowicie losowy. *Oblicz wartość oczekiwaną liczby gości, którzy otrzymali swoje własne dania.*

Odpowiedź: Niech $X_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\ldots,10$ oznacza zmienną losową, która przyjmuje wartość 1 jeśli i-ty gość otrzymał swoje własne danie i wartość 0 w przeciwnym przypadku. Zauważmy, że $P(X_i = 1) = \frac{1}{10}$ dla wszystkich i, ponieważ dany (i-ty) gość ma równe szanse otrzymać każde z dań, a tylko jedno z dziesięciu dań jest tym właściwym. Tym samym $X_i \sim B(p)$ gdzie $p = \frac{1}{10}$, a więc $EX_i = p = \frac{1}{10}$. Jeśli zdefiniujemy zmienną $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, to X będzie określało *liczbę gości, którzy otrzymali swoje własne dania.* Z addytywności wartości oczekiwanej:

$$EX = E(X_1 + \ldots + X_{10}) = EX_1 + \ldots + EX_{10} = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

Zadanie 4. *W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono arbitralnie i losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Oblicz wartość oczekiwaną liczby ławek z dwoma dziewczynkami.*

Odpowiedź: Niech $X_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\ldots,10$ oznacza zmienną losową, która przyjmuje wartość 1 jeśli w i-tej ławce siedzą dwie dziewczynki i wartość 0 w przeciwnym przypadku. Policzmy $P(X_i = 1)$. Do danej ławki możemy wybrać $\binom{20}{2}$ nieuporządkowanych par osób, ale tylko $\binom{10}{2}$ z tych par to będą pary dwóch dziewczynek. Mamy więc:

$$P(X_i = 1) \;=\; \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}} \;=\; \frac{9}{38}.$$

Tym samym $X_i \sim B(p)$ gdzie $p = \frac{9}{38}$, a więc $EX_i = p = \frac{9}{38}$. Jeśli zdefiniujemy zmienną $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, to X będzie określało *liczbę ławek z dwoma dziewczynkami.* Z addytywności wartości oczekiwanej:

$$EX = E(X_1 + \ldots + X_{10}) = EX_1 + \ldots + EX_{10} = 10 \cdot \frac{9}{38} = \frac{45}{19}.$$

Zadanie 5. *Przy okrągłym stole z 20 krzesłami rozsadzono 10 małżeństw w sposób całkowicie losowy. Oblicz wartość oczekiwaną liczby mężów siedzących obok swoich żon.*

Odpowiedź: Niech $X_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\ldots,10$ oznacza zmienną losową, która przyjmuje wartość 1 jeśli w i-ty mąż siedzi obok swojej żony i wartość 0 w przeciwnym przypadku. Policzmy $P(X_i = 1)$. Jest $\binom{19}{2}$ (nieuporządkowanych) par osób, które będą sąsiad(k)ami i-tego męża. Jeśli jednym z sąsiadów/sąsiadek ma być żona i-tego męża, drugą osobę możemy dobrać na $\binom{18}{1} = 18$ sposobów. Mamy więc:

$$P(X_i = 1) \;=\; \frac{18}{\binom{19}{2}} \;=\; \frac{2}{19}.$$

Tym samym $X_i \sim B(p)$ gdzie $p = \frac{2}{19}$, a więc $EX_i = p = \frac{2}{19}$. Jeśli zdefiniujemy zmienną $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$, to X będzie określało *liczbę mężów siedzących obok swoich żon.* Z addytywności wartości oczekiwanej:

$$EX = E(X_1 + \ldots + X_{10}) = EX_1 + \ldots + EX_{10} = 10 \cdot \frac{2}{19} = \frac{20}{19}.$$

Zadanie 6. *Pokaż, że ta nierówność Cauchy'ego-Schwarza implikuje następującą nierówność:*

$$\left|C(X,Y)\right| \leqslant D(X)D(Y)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jedna ze zmiennych jest funkcją liniową drugiej, np. $Y = aX + b$.

Odpowiedź: Rozważmy zmienne losowe:

$$Y' = Y - EY, \qquad X' = X - EX.$$

Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E\big((X-EX)(Y-EY)\big) = E(X'Y'), \\ D^2(X) &= E\big((X-EX)^2\big) = E\big(X'^2\big), \\ D^2(Y) &= E\big((Y-EY)^2\big) = E\big(Y'^2\big). \end{aligned}$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że:

$$\big(E(X'Y')\big)^2 \leqslant E\big(X'^2\big)E\big(Y'^2\big),$$

co oznacza, że:

$$C(X,Y)^2 \leqslant D^2(X)D^2(Y).$$

Po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron dostajemy nierówność, którą chcieliśmy udowodnić. Na koniec zauważmy, że nierówność jest spełniona jako równość wtedy i tylko wtedy gdy nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość, tzn. X' jest wielokrotnością Y' lub odwrotnie, np. $Y' = aX'$. Ale:

$$Y' = aX' \iff Y - EY = a(X - EX) \iff Y = aX - aEX + EY.$$

Ale to oznacza, że Y jest *dowolną* funkcją liniową X, tzn. $Y = aX + b$. Dlaczego? Ponieważ gdy przyłożymy wartość oczekiwaną do obu stron, dostaniemy $EY = aEX + b$, z czego wyjdzie nam, że $b = EY - aEX$, a tym samym $Y = aX - aEX + EY$.

Zadanie 7. *Udowodnij, że jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne to zachodzi:*

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n-1$, tzn. że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) = (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) &= E(Y \cdot X_n) \\ &\overset{(*)}{=} (EY) \cdot (EX_n) \\ &= E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1})(EX_n) \\ &\overset{(\dagger)}{=} (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_n), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n-1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 8. *Udowodnij, że jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne to zachodzi:*

$$D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n-1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= D^2(Y + X_n) \\ &\overset{(*)}{=} D^2(Y) + D^2(X_n) \\ &= D^2(X_1 + \ldots + X_{n-1}) + D^2(X_n) \\ &\overset{(\dagger)}{=} D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{n-1}) + D^2(X_n), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 9. *Pokaż, że jeśli X i Y są niezależne, to:*

$$D^2(aX + bY) \;=\; a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y)$$

Odpowiedź: Bierzemy zmienne losowe $U = aX$ i $V = bY$. Ponieważ X i Y są niezależne, to niezależne są również U i V. Wykorzystując w $(*)$ poniżej twierdzenie o sumie zmiennych losowych:

$$D^2(aX + bY) \;=\; D^2(U + V) \;\overset{(*)}{=}\; D^2(U) + D^2(V) \;=\; D^2(aX) + D^2(bY) \;=\; a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y),$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy znane prawo skalowania wariancji (patrz wykład).

Zadanie 10*. *Pokaż, że jeśli X i Y są niezależne i X ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_1)$*, a Y ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_2)$*, to $Z = X + Y$ ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= \sum_{k,\ell:\, k+\ell=n} P(X = k) P(Y = \ell) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X = k) P(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z następującego faktu: dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$