Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

5. Zmienne losowe: wprowadzenie

9.11.2020

Zadanie 1. *Niech P będzie miarą prawdopodobieństwa na Ω, a $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ zmienną losową. Pokaż, że miara P_X przyporządkowującą każdemu podzbiorowi $A \subseteq \mathbb{R}$ liczbę:*

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

spełnia aksjomaty Kołmogorowa na przestrzeni $\mathbb{R}$.
Wskazówka: trzeba wykorzystać fakt, że P spełnia aksjomaty Kołmogorowa.

Odpowiedź:

1. Nieujemność:

$$P_X(A) \;=\; P(X^{-1}(A)) \;\overset{(*)}{\geqslant}\; 0$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że miara P spełnia aksjomat o nieujemności.

2. Normalizacja:

$$P_X(\mathbb{R}) \;=\; P(X^{-1}(\mathbb{R})) \;\overset{(*)}{=}\; P(\Omega) \;\overset{(\dagger)}{=}\; 1$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy fakt, że przeciwobrazem całej osi liczb rzeczywistych jest cała przestrzeń Ω, a w $(\dagger)$ wykorzystaliśmy fakt, że P spełnia aksjomat o normalizacji.

3. Przeliczalna addytywność: weźmy dowolny ciąg $A_1, A_2, \ldots$ zdarzeń z $\mathbb{R}$ parami rozłącznych. Wtedy ich przeciwobrazy $X^{-1}(A_1), X^{-1}(A_2), \ldots$ są również parami rozłączne (w Ω). Zatem:

$$\begin{aligned}
P_X(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \;&=\; P\Big(X^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)\Big) \\
&\overset{(*)}{=}\; P\Big(X^{-1}(A_1) \cup X^{-1}(A_2) \cup \ldots\Big) \\
&\overset{(\dagger)}{=}\; P\big(X^{-1}(A_1)\big) + P\big(X^{-1}(A_2)\big) + \ldots \\
&=\; P_X(A_1) + P_X(A_2) + \ldots,
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy fakt, że przeciwobraz sumy jest sumą przeciwobrazów, a w $(\dagger)$ wykorzystaliśmy fakt, że przeciwobrazy są rozłączne oraz, że P spełnia aksjomat o przeliczalnej addytywności.

Zadanie 2. *Z talii 52 kart ciągniemy 6 i zliczamy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.*

Odpowiedź: Niech X będzie szukaną zmienną losową. Mamy $X \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ i musimy wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń postaci $P(X = k)$, dla $k = 0, \ldots, 6$. Jest $\binom{52}{6}$ możliwych sposobów wyboru 6 z 52 kart, natomiast zdarzeniu $\{X = k\}$ sprzyjają wszystkie wybory zawierające dokładnie k pików. Takich wyborów jest $\binom{13}{k}\binom{39}{6-k}$, gdzie pierwsza wartość mówi na ile sposobów można wybrać k z 13 pików, a druga – na ile sposobów można wybrać $6 - k$ z 39 nie-pików. Mamy więc:

$$P(X = k) \;=\; \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{6-k}}{\binom{52}{6}}$$

Zadanie 3. *Mamy dwie monety: jedną uczciwą (szansa orła i reszki po 50%) i jedną nieuczciwą (szansa orła 80%, reszki 20%). Wybieramy losową jedną z nich i rzucamy nią 3 razy. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę orłów. Wyznacz rozkład X.*

Odpowiedź: Musimy wyznaczyć $P(X = k)$ dla $k = 0, 1, 2, 3$. Niech U oznacza zdarzenie „wybrano do losowania uczciwą monetę". Mamy $P(U) = P(U') = \frac{1}{2}$. Z wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(X = k) = P(\{X = k\}|U)P(U) + P(\{X = k\}|U')P(U').$$

Przy ustalonej monecie, szansę na zadaną liczbę orłów w 3 rzutach uzyskuje się ze schematu Bernoulliego:

$$P(\{X = k\}|U) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \frac{1}{8}\binom{3}{k}, \qquad P(\{X = k\}|U') = \binom{3}{k}(0.8)^k(0.2)^{3-k}.$$

Stąd:

$$P(X = k) = \frac{1}{2}\binom{3}{k}\left(\frac{1}{8} + (0.8)^k(0.2)^{3-k}\right)$$

Zadanie 4. *Wybieramy losową permutację liczb $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Niech X oznacza pozycję (licząc od 1), na której pojawi się pierwsza liczba parzysta. Podaj rozkład X.*
(np. dla permutacji $\{1, 3, 10, 2, 5, 8, 9, 7, 4, 6\}$ mamy $X = 3$)

Odpowiedź: Przede wszystkim zauważmy, że $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ponieważ liczba parzysta musi pojawić się wśród pierwszych 6 liczb. Jeśli $X = k$, to znaczy, że na pozycjach $1, \ldots, k-1$ są same liczby nieparzyste, na pozycji k jest liczba parzysta, a pozostałe liczby są dowolne. Ponieważ bierzemy tu pod uwagę kolejność, liczby nieparzyste na pierwszy pozycjach można wybrać na $\frac{5!}{(6-k)!}$ sposobów (wariacja bez powtórzeń), liczba parzysta na pozycji k może być wybrana na 5 sposób, a pozostałe liczby są już ustalone i jedynie możemy je permutować na $(10 - k)!$ sposobów. Ponieważ łączna liczba permutacji wynosi 10!, mamy więc:

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= \frac{\frac{5!}{5!} \cdot 5 \cdot 9!}{10!} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \\
P(X = 2) &= \frac{\frac{5!}{4!} \cdot 5 \cdot 8!}{10!} = \frac{25}{9 \cdot 10} = \frac{5}{18}, \\
P(X = 3) &= \frac{\frac{5!}{3!} \cdot 5 \cdot 7!}{10!} = \frac{100}{8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{10}{72}, \\
P(X = 4) &= \frac{\frac{5!}{2!} \cdot 5 \cdot 6!}{10!} = \frac{300}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{10}{168}, \\
P(X = 5) &= \frac{\frac{5!}{1!} \cdot 5 \cdot 5!}{10!} = \frac{600}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{10}{504}, \\
P(X = 6) &= \frac{\frac{5!}{0!} \cdot 5 \cdot 4!}{10!} = \frac{600}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{252}.
\end{aligned}$$

Zadanie 5. *Mamy urnę z 10 białymi i 20 czarnymi kulami. Wybieramy losowo ze zwracaniem 9 kul. Niech X określa liczbę wylosowanych białych kul. Jaki rozkład ma X?*

Odpowiedź: Ponieważ łącznie jest 30 kul, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli w każdym losowaniu wynosi $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (losujemy ze zwracaniem!). Zmienna losowa X określa więc liczbę sukcesów (sukces = „biała kula") w 9 próbach, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \frac{1}{3}$. Tym samym X ma rozkład dwumianowy $B(9, \frac{1}{3})$.

Zadanie 6*. *Odszukaj dlaczego $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$*

Odpowiedź: Wzór wynika z rozwinięcia funkcji e^x w nieskończony szereg Taylora:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

wokół punktu $x_0 = 0$ (tzw. *szereg Maclaurina*). Jest to możliwe, ponieważ e^x jest funkcją *analityczną*. Ponieważ $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$, mamy:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = e^0 = 1,$$

stąd:

$$e^x \;=\; 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Zadanie 7. *Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich wymienionych poprzednio przykładów. Oblicz kilka pierwszych prawdopodobieństw*

Odpowiedź: Wszystkie wspomniane przykłady można modelować za pomocą rozkład Poissona, wystarczy tylko obliczyć λ.

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
  Mamy $\lambda = pn = 10$, stąd:

  $$P(X = k) = \frac{10^k}{k!}e^{-10}, \qquad P(X = 0) = e^{-10} \simeq 4.5 \cdot 10^{-5}, \qquad P(X = 1) = 10e^{-10} \simeq 4.5 \cdot 10^{-4}$$

  $$P(X = 2) = \frac{10^2}{2!}e^{-10} \simeq 2.3 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 3) \simeq 7.6 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 4) \simeq 1.9 \cdot 10^{-2}$$

- Mamy artykuł z $n = 8\ 000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
  Mamy $\lambda = pn = 8000/1000 = 8$, stąd:

  $$P(X = k) = \frac{8^k}{k!}e^{-8}, \quad P(X = 0) \simeq 3.4 \cdot 10^{-4}, \quad P(X = 1) \simeq 2.7 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 2) \simeq 0.01$$

- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.
  Mamy $\lambda = pn = 6.4 \cdot 0.5 = 3.2$, stąd:

  $$P(X = k) = \frac{3.2^k}{k!}e^{-3.2}, \quad P(X = 0) \simeq 0.04, \quad P(X = 1) \simeq 0.13, \quad P(X = 2) \simeq 0.21$$

- Szansa katastrofy lotniczej wynosi 1 na 11 mln lotów (rocznie). Wyznacz rozkład liczby katastrof na rok, jeśli w ciągu roku odbywa się $n = 16$ mln lotów.
  Mamy $\lambda = pn = \frac{16}{11}$, stąd:

  $$P(X = k) = \frac{(16/11)^k}{k!}e^{-16/11}, \quad P(X = 0) \simeq 0.23, \quad P(X = 1) \simeq 0.4, \quad P(X = 2) \simeq 0.25$$