Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

4. Niezależność

4.11.2020

Zadanie 1. *Pokaż, że dowolne zdarzenie na pierwszej kostce jest niezależne od dowolnego zdarzenia na drugiej kostce.*

Odpowiedź: Niech $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$). Niech A_1 oznacza dowolne zdarzenie związane z pierwszą z kostek, a A_2 – z drugą z kostek. Załóżmy, że zdarzenie A_1 obejmuje n_1 spośród 6 wyników na pierwszej kostce (i dowolny wynik na drugiej, bo nic o niej nie mówi); podobnie, niech zdarzenie A_2 obejmuje n_2 spośród 6 wyników na drugiej kostce (i dowolny wynik na pierwszej). Np. jeśli A_1 – „wypadło jedno lub dwa oczka na pierwszej kostce", to $n_1 = 2$. Ponieważ wtedy $A_1 = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6)\}$, mamy więc $|A_1| = 6n_1$. Podobnie, $|A_2| = 6n_2$. Tym samym:

$$P(A_1) = \frac{6n_1}{36} = \frac{n_1}{6}, \qquad P(A_2) = \frac{6n_2}{36} = \frac{n_2}{6}.$$

Z kolei zdarzenie $A_1 \cap A_2$ obejmuje wszystkie zdarzenia elementarne, dla których wynik na pierwszej kostce jest wśród n_1 wartości obejmowanych przez A_1, a wynik na drugiej kostce – wśród n_2 wartości obejmowanych przez A_2. Mamy więc $|A_1 \cap A_2| = n_1 n_2$ i stąd:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_1 n_2}{36} = \frac{n_1}{6} \cdot \frac{n_2}{6} = P(A_1)P(A_2).$$

Zadanie 2. *Rzucamy $n \geqslant 2$ razy monetą. Czy zdarzenia A – „brak orłów lub jeden orzeł" i B – „same orły lub same reszki" są niezależne? Czy odpowiedź zależy od n?*

Odpowiedź: Oznaczamy przez C_k zdarzenie „wypadło k orłów". Jeśli za zdarzenia elementarne przyjmiemy n-elementowe ciągi binarne (gdzie jedynka oznacza orła, a zero – reszkę), to $|\Omega| = 2^n$, $|C_0| = |C_n| = 1$, zaś $|C_1| = n$ (jedynka może pojawić się na dowolnej pozycji ciągu). Mamy $|A| = |C_0| + |C_1| = n + 1$, $|B| = |C_0| + |C_n| = 2$, oraz $|A \cap B| = |C_0| = 1$. Stąd:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^{2n}}, \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{2^n}.$$

Zdarzenia A i B są więc niezależne wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\frac{1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^{2n}} \quad \iff \quad 2(n+1) = 2^n \quad \iff \quad n = 2^{n-1} - 1.$$

Równość ta zachodzi wyłącznie dla $n = 3$.

Zadanie 3*. *Pokaż, że jeśli $A_1,\ldots,A_n$ – niezależne, to również są niezależne $B_1,\ldots,B_n$, gdzie $B_i = A_i$ lub $B_i = A_i'$ $(i = 1,\ldots,n)$.*

Odpowiedź: Pokażemy wpierw, że jeśli $A_1,\ldots,A_n$ są niezależne, to również:

$$A_1,\ldots,A_{i-1},A_i',A_{i+1},\ldots,A_n \qquad \text{są niezależne,} \tag{1}$$

dla dowolnego $i = 1,\ldots,n$. Ponieważ problem jest zupełnie symetryczny ze względu na indeksy $1,\ldots,n$, wystarczy udowodnić własność (1) dla $i = n$, tzn. pokazać, że:

$$A_1,\ldots,A_{n-1},A_n' \qquad \text{są niezależne,} \tag{2}$$

Zrobimy to przez indukcję po n. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie: z niezależności A_1 i A_2 wynika niezależność A_1 i A_2'. Załóżmy teraz, że własność (2) zachodzi dla dowolnych $n-1$ (lub mniej) zdarzeń (założenie indukcyjne) i udowodnimy ją dla n zdarzeń. Oznaczmy $B_i = A_i$ dla $i < n$, oraz $B_n = A_n'$. Musimy pokazać, że

$$P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \ldots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \cdot P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}),$$

dla dowolnych indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ i dowolnego $k = 2, \ldots, n$. Ale biorąc $k < n$, ten wniosek wynika z założenia indukcyjnego, ponieważ wybrany ciąg $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ składa się z $k < n$ zdarzeń, o których wiemy (z założenia indukcyjnego), że są niezależne. Stąd jedyne, co musimy pokazać, to przypadek $k = n$, czyli (wracając do starej notacji):

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n') = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}) \cdot P(A_n').$$

Oznaczmy $C = A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}$. Ponieważ:

$$P(C \cap A_n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = P(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) \cdot P(A_n) = P(C) \cdot P(A_n),$$

czyli C i A_n są niezależne. A więc, używając niezależności dla dwóch zdarzeń, wynika z tego, że C i A_n' są również niezależne. Tym samym:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n') = P(C \cap A_n') = P(C) \cdot P(A_n') = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}) \cdot P(A_n'),$$

co kończy dowód własności (2). To z kolei przez symetrię implikuje (1).

Powyższy wynik wystarcza do zakończenia zadania, ponieważ można go stosować *wielokrotnie*, zamieniając kolejne A_i na A_i', za każdym razem korzystając z faktu, że zbiór zdarzeń wciąż jest niezależny.

Zadanie 4. *Rzucamy n razy kostką n-ścienną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy przynajmniej jedną jedynkę? Do jakiej wartości zbiega to prawdopodobieństwo przy $n \to \infty$?*

Odpowiedź: Niech A_i, $i = 1, \ldots, n$, oznacza zdarzenie „jedynka na i-tej kostce n-ściennej". Mamy $P(A_i) = \frac{1}{n}$. Przez B_n oznaczmy zdarzenie „co najmniej jedna jedynka w n rzutach kostką n-ścienną", czyli $B_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Stąd:

$$P(B_n) = 1 - P(B_n') = 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n') = 1 - P(A_1')P(A_2') \cdot \ldots \cdot P(A_n') = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wykorzystując znaną własność:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

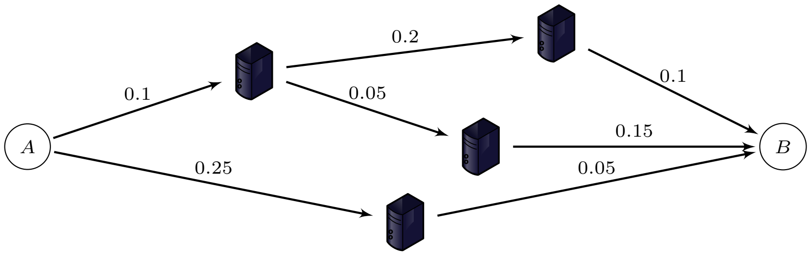
otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} P(B_n) = 1 - e^{-1} \simeq 0.6321.$$

Poniżej kilka przykładowych wartości prawdopodobieństw:

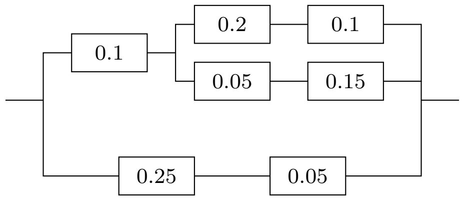
n	$P(B_n)$	n	$P(B_n)$	n	$P(B_n)$
2	0.75	10	0.6513	50	0.6330
3	0.7037	20	0.6415	100	0.6325
4	0.6836	50	0.6358	200	0.6323
5	0.6723	100	0.6340	1000	0.6322

Zadanie 5. *Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):*



Wskazówka: *zamień sieć na graf komponentów.*

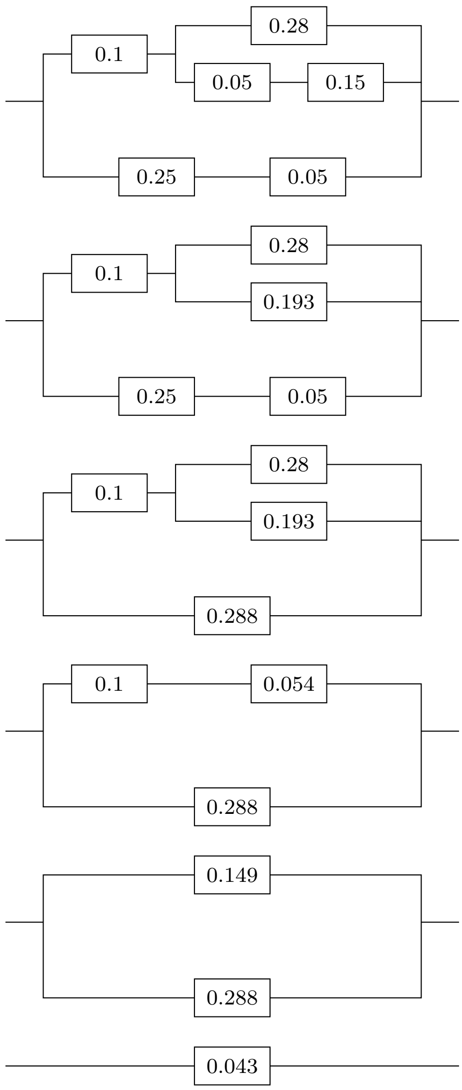
Odpowiedź: Zamieniamy powyższy graf na graf komponentów (prawdopodobieństwa awarii wpisane wewnątrz komponentów):



Następnie sukcesywnie usuwamy komponenty szeregowe i równoległe zgodnie z regułami:

- komponenty szeregowe z prawdopodobieństwami awarii $p_1, \ldots, p_n$ zastąp jednym komponentem z prawdopodobieństwem awarii $1 - (1 - p_1) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n)$,
- komponenty równoległe z prawdopodobieństwami awarii $p_1, \ldots, p_n$ zastąp jednym komponentem z prawdopodobieństwem awarii $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

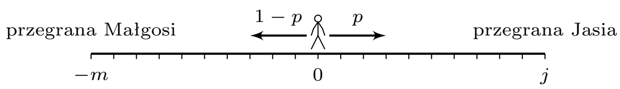
Proces ten wygląda w tym przypadku następująco



Prawdopodobieństwo, że uda się przesłać pakiet, równa się $1 - 0.043 = 0.957$

Zadanie 6. *Jaś i Małgosia rzucają nieuczciwą monetą, która daje wygraną Małgosi z prawdopodobieństwem p i Jasiowi z prawdopodobieństwem $1-p$. Ten, kto wygra, daje drugiej osobie złotówkę. Jaś zaczyna z kapitałem j zł, Małgosia – z m zł. Gra toczy się, dopóki któreś z nich nie przegra wszystkiego. Jaka jest szansa wygranej Jasia, a jaka Małgosi?*

Odpowiedź: Można zamodelować grę jako spacer losowy:



Ilekroć Małgosia wygra (z prawdopodobieństwem p), „ludzik" przesuwa się o jeden krok w prawo, gdy znajdzie się w odległości j od zera, oznacza to, że Jasio wyczerpał swój kapitał (analogicznie przy wygranej Jasia). Stąd otrzymujemy, że prawdopodobieństwo wygranej Małgosi (czyli przegranej Jasia) wynosi:

$$P(\text{wygra Małgosia}) = \begin{cases} \frac{m}{j+m} & \text{jeśli } \; p = \frac{1}{2}, \\ \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^j - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j+m}}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{j+m}} & \text{jeśli } \; p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ponieważ gra kończy się z prawdopodobieństwem 1, $P(\text{wygra Jasio}) = 1 - P(\text{wygra Małgosia})$.

Zadanie 7. *Adam, Bolek i Czesio rzucają – w tej kolejności – monetą (uczciwą). Wygrywa ten, który pierwszy otrzyma orła. Znaleźć szanse na wygraną dla każdego z graczy. Znajdź ogólną odpowiedź dla nieuczciwej monety, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p > 0$*

Odpowiedź: Od razu obliczymy odpowiedź dla dowolnego $p > 0$. Wykorzystamy fakt, że jeśli przez trzy rzuty monetą nikt nie wygrał, sytuacja jest identyczna jak na początku gry (znowu każdy ma takie same szanse na wygraną). Niech p_A oznacza wygraną Adama. W pierwszej turze Adam wygrywa z prawdopodobieństwem p, a z prawdopodobieństwem $1-p$ gra toczy się dalej. Następnie, jeśli Bolek i Czesio nie wygrają, co zdarzy się z prawdopodobieństwem $(1-p)\cdot(1-p)$ (z niezależności rzutów), wracamy do początkowych szans na wygraną. A więc:

$$p_A = p + (1-p)\cdot\big((1-p)\cdot(1-p)\cdot p_A\big) = p + (1-p)^3 p_A.$$

Stąd:

$$p_A(1-(1-p)^3) = p \quad \iff \quad p_A = \frac{p}{1-(1-p)^3}$$

Aby policzyć prawdopodobieństwo wygrania Bolka (oznaczone p_B) wystarczy zauważyć, że jest ono takie samo jak p_A, jeśli w pierwszej turze wypadnie reszka, tzn:

$$p_B = (1-p)p_A = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}.$$

Podobnie, prawdopodobieństwo wygrania Czesia (oznaczone p_C) jest takie samo, jak p_A, jeśli w pierwszej i drugiej turze wypadną reszki:

$$p_C = (1-p)^2 p_A = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}.$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwa sumują się do jedynki, co oznacza, że ktoś kiedyś w końcu wygra:

$$p_A + p_B + p_C = \frac{p + p(1-p) + p(1-p)^2}{1-(1-p)^3} = \frac{3p - 3p^2 + p^3}{3p - 3p^2 + p^3} = 1.$$

W szczególności, dla $p = \frac{1}{2}$, mamy:

$$p_A = \frac{4}{7}, \quad p_B = \frac{2}{7}, \quad p_C = \frac{1}{7}.$$