Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

3. Prawdopodobieństwo warunkowe

28.10.2020

Zadanie 1. *Podaj przykłady zdarzeń takich, że (a) $P(A|B) < P(A)$, (b) $P(A|B) = P(A)$, (c) $P(A|B) > P(A)$*

Odpowiedź:

- Rzucamy monetą, $B = \{O\}$ – „wypadł orzeł”, $A = \{R\}$ – „wypadła reszka”. Wtedy $P(B) = \frac{1}{2}$, natomiast $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0$. Ogólniej: jeśli dla dowolnego zdarzenia B z $P(B) > 0$ weźmiemy $A = B'$, to $P(A|B) = \frac{P(B'\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0 < P(B)$.
- Rzucamy dwoma monetami, $B = \{RO, OO\}$ – „wypadł orzeł na 1. monecie”, $A = \{OR, OO\}$ – „wypadł orzeł na 2. monecie”. Wtedy $P(B) = \frac{1}{2}$, natomiast $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$.
- Rzucamy monetą, $B = \{O\}$ – „wypadł orzeł”, $A = B$. Wtedy $P(B) = \frac{1}{2}$, natomiast $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. Ogólniej: jeśli dla dowolnego zdarzenia B z $0 < P(B) < 1$ weźmiemy $A = B$ to $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 > P(B)$.

Zadanie 2. *Pokaż, że $P(A|B)$ jako funkcja A przy ustalonym B spełnia aksjomaty Kołmogorowa.*

Odpowiedź: Korzystamy z definicji: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ dla $P(B) > 0$.

1. *Nieujemność* $P(A|B) \geqslant 0$: wynika wprost z definicji.
2. *Normalizacja* $P(\Omega|B) = 1$:
$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$
3. *Addytywność*: mając ciąg $A_1, A_2, \ldots$ zdarzeń rozłącznych, tj. takich, że $A_i \cap A_j = \emptyset$, musimy pokazać, że $P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, B\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|B)$. Mamy:
$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, B\Big) = \frac{P\Big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap B\Big)}{P(B)} = \frac{P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\Big)}{P(B)} \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j|B),$$
gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy fakt, że skoro zbiory A_j $(j = 1, 2, \ldots)$ są rozłączne, to tym bardziej są rozłączne zbiory $A_j \cap B$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Zadanie 3. *Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że jedno z dzieci ma na imię Franek? (przyjmij, że prawdopodobieństwo nadania chłopcu imienia Franek wynosi p)*

Odpowiedź: Dla każdego dziecka mamy trzy możliwe wyniki: „dziewczynka” (d), „chłopiec Franek” (f), „chłopiec nie-Franek” (c). Z treści zadania wynika, że $P(\text{imię=Franek} \,|\, \text{chłopiec}) = p$. W naszej notacji możemy to zapisać jako $P(\{f\}|\{c, f\}) = p$. Wiemy również, że szansa na chłopca jest $\frac{1}{2}$, stąd $P(\{c, f\}) =$

$\frac{1}{2}$. Ze wzoru $P(A) = P(A|B)P(B)$ wynika więc, że $P(\{f\}) = \frac{p}{2}$, a stąd wnioskujemy również, że $P(\{c\}) = \frac{1-p}{2}$. W przypadku dziewczynki, $P(\{d\}) = \frac{1}{2}$, tak jak poprzednio.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\Omega = \{dd, df, dc, fd, ff, fc, cd, cf, cc\}.$$

Jak poprzednio zakładamy, że dzieci rodzą się niezależnie, więc prawdopodobieństwo pary to iloczyn prawdopodobieństw poszczególnych dzieci, tzn.:

$$P(\{dd\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{df\}) = P(\{fd\}) = \frac{p}{4}, \quad P(\{dc\}) = P(\{cd\}) = \frac{1-p}{4},$$
$$P(\{fc\}) = P(\{cf\}) = \frac{p(1-p)}{4}, \qquad P(\{ff\}) = \frac{p^2}{4}, \quad P(\{cc\}) = \frac{(1-p)^2}{4}.$$

Weźmy teraz zdarzenie A – „dwóch chłopców”, oraz zdarzenie B – „jedno z dzieci ma na imię Franek”. Mamy:

$$A = \{cc, cf, fc, ff\}, \quad B = \{fd, df, fc, cf, ff\}, \quad A \cap B = \{cf, fc, ff\},$$

a stąd:

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2 \cdot \frac{p(1-p)}{4} + \frac{p^2}{4}}{2 \cdot \frac{p}{4} + 2 \cdot \frac{p(1-p)}{4} + \frac{p^2}{4}} = \frac{p(2-p)}{p(4-p)} = \frac{2-p}{4-p}.$$

Warto zauważyć, że dla $p = 1$ („wszyscy chłopcy mają na imię Franek”) daje to $\frac{1}{3}$ (czyli jakbyśmy wiedzieli, że „jedno z dzieci to chłopiec”), a dla $p \simeq 0$ daje to $\simeq \frac{1}{2}$ (podobnie jak w stwierdzeniu, że „starsze dziecko to chłopiec”, gdyż imię Franek jest tak rzadkie, że natychmiast identyfikuje jedno z dzieci).

Zadanie 4. *Mamy w ręku trzy asy i dobieramy dwie dodatkowe karty. Jaka jest szansa na „karetę” (cztery asy)? Podobnie: jaka jest szansa na karetę, jeśli mamy w ręku dwa asy i dobieramy trzy karty?*

Odpowiedź: Rozpatrzmy pierwszy przypadek (3 asy w ręku, dobieramy 2 karty). Jest wiele sposobów, żeby zrobić to zadanie. Np:

1. Patrzymy na karty, które pozostały w talii. Jest 49 kart, dobieramy dwie i potrzebujemy dobrać ostatniego asa (oznaczmy to zdarzenie przez A). Jako zdarzenia elementarne weźmy podzbiory dwuelementowe zbioru 49-elementowego. Mamy $|\Omega| = \binom{49}{2} = \frac{49 \cdot 48}{2}$ oraz $|A| = 48$ (ponieważ chcemy mieć asa oraz jedną z pozostałych 48 kart). Mamy więc $P(A) = \frac{2}{49}$.

2. Używamy prawdopodobieństwa warunkowego. Niech Ω składa się z *uporządkowanych* piątek kart. Zdarzenie B – „pierwsze trzy karty to asy” składa się z $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 48$ piątek, ponieważ pierwsza karta może przyjść na 4 sposoby (as), druga na 3 sposoby (drugi as), trzecia na 2 sposoby (trzeci as), a pozostałe dwie karty są dowolne (spośród pozostałych). Jeśli przez A oznaczymy „kareta asów w pięciu kartach”, to $A \cap B$ składa się z $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 48 + 48 \cdot 1)$, gdyż w ostatnich dwóch kartach as może przyjść jako pierwsza lub druga karta. Mamy więc:

   $$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 48}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{2}{49}$$

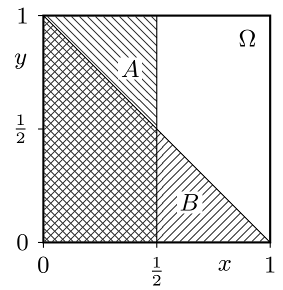
   Jak widać, prawdopodobieństwo warunkowe tylko skomplikowało tutaj odpowiedź.

W drugim przypadku (2 asy w ręku, dobieramy 3 karty) możemy rozumować podobnie jak powyżej (pierwszy sposób), wtedy prawdopodobieństwo rzeczonego zdarzenia wynosi $\frac{48}{\binom{50}{3}} = \frac{48 \cdot 6}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{3}{25 \cdot 49}$

Zadanie 5. *Losujemy dwie liczby x i y z przedziału $[0,1]$. Jaka jest szansa, że (a) $x \leqslant \frac{1}{2}$ jeśli $x + y \leqslant 1$; (b) $x \leqslant \frac{1}{2}$ jeśli $\max\{x, y\} \geqslant \frac{2}{3}$? Przyjmij model prawdopodobieństwa geometrycznego.*

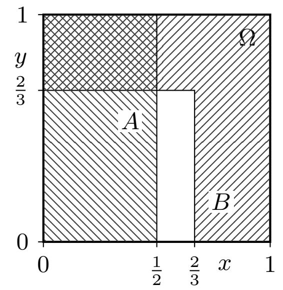
Odpowiedź:

1. Zdarzenia elementarne to pary $(x, y) \in [0,1]^2 = \Omega$. Niech $A = \{(x,y) \colon x \leqslant \frac{1}{2}\}$ oraz $B = \{(x,y) \colon x + y \leqslant 1\}$. Zbiory można przedstawić na poniższym rysunku:



Zbiór B ma kształt trójkąta z $|B| = \frac{1}{2}$, natomiast $A \cap B$ ma postać trapezu (zaznaczony wzorem „w kratkę” na rysunku), którego pole jest równe $\frac{3}{8}$. Stąd $P(A|B) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$.

2. Jak poprzednio, $\Omega = [0,1]^2$, a zbiory $A = \{(x,y)\colon x \leqslant \frac{1}{2}\}$ oraz $B = \{(x,y)\colon \max\{x,y\} \geqslant \frac{2}{3}\}$ zostały zaznaczone poniżej:



Zbiór B ma kształt odwróconej litery „L”. Mamy $|B| = |\Omega| - |B'| = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$. Z kolei $A \cap B$ ma postać prostokąta o bokach $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, czyli $|A \cap B| = \frac{1}{6}$. Stąd $P(A|B) = \frac{1/6}{5/9} = \frac{3}{10}$.

Zadanie 6. *Rzucamy kostką, jeśli wypadnie jedno oczko to rzucamy ponownie i dodajemy wyniki. Jaka jest szansa, że (sumarycznie) wyrzucimy wartość powyżej 4?*

Odpowiedź: Niech zdarzenie A_1 oznacza „wypadło jedno oczko”, A_2 – „wypadło więcej niż jedno oczko”, a B – „wypadło sumarycznie powyżej 4”.

Mamy $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$, bo skoro na pierwszej kostce wypadło 1, na drugiej kostce musi wypaść $4, 5$ lub 6 oczek, żeby suma była *większa* niż 4. Jeśli zajdzie zdarzenie A_2, nie rzucamy już drugą kostką, więc aby zaszło zdarzenie B, sumaryczny wynik (czyli po prostu liczba oczek na pierwszej, i jedynej, kostce) musi być równy 5 lub 6. Tym samym:

$$P(B|A_2) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{2}{5}.$$

Z twierdzenia na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{12}.$$

Zadanie 7. *Mamy b białych i c czarnych kul w urnie. Wyciągamy jedną kulę i od razu ją wyrzucamy (poza urnę!), nie sprawdzając koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia za drugim razem kuli białej?*

Odpowiedź: Niech B_1 i C_1 oznaczają zdarzenia polegające na wyciągnięciu za pierwszym razem kuli, odpowiednio, białej lub czarnej. Podobnie, niech B_2 i C_2 oznaczają analogiczne zdarzenia przy drugim losowaniu. Interesuje nas $P(B_2)$. Zauważmy, że $P(B_1) = \frac{b}{b+c}$, $P(C_1) = \frac{c}{b+c}$. Do tego, $P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{b-1+c}$ oraz $P(B_2|C_1) = \frac{b}{b+c-1}$ (gdyż pozbywamy się jednej z kul z urny, odpowiednio białej lub czarnej).

Zdarzenia B_1 i C_1 są rozłączne i pokrywają całą przestrzeń, tworzą więc układ zupełny. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|C_1)P(C_1) \\ &= \frac{b-1}{b+c-1}\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+c-1}\frac{c}{b+c} \\ &= \frac{b(b-1)+bc}{(b+c)(b+c-1)} = \frac{b(b+c-1)}{(b+c)(b+c-1)} = \frac{b}{b+c}. \end{aligned}$$

Co ciekawe, prawdopodobieństwo jest takie samo, jak w przypadku pojedynczego losowania.

Zadanie 8. *Zadanie egzaminacyjne (typu testowego) ma 5 możliwych odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawdziwa. Wśród 100 egzaminowanych studentów tylko 30 potrafi rozwiązać to zadanie, a pozostali będą wybierać jedną z odpowiedzi losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że egzaminowany student potrafi rozwiązać zadanie, jeśli zaznaczył poprawną odpowiedź?*

Odpowiedź: Oznaczmy zdarzenia:

- A – „student udzielił poprawnej odpowiedzi"
- B_+ – „student potrafi rozwiązać zadanie"
- B_- – „student nie potrafi rozwiązać zadania"

Z treści zadania wnioskujemy, że:

$$P(B_+) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad P(B_-) = 1 - P(B_+) = \frac{7}{10}, \quad P(A|B_+) = 1, \quad P(A|B_-) = \frac{1}{5}.$$

Z twierdzenia Bayesa:

$$P(B_+|A) \;=\; \frac{P(A|B_+)P(B_+)}{P(A|B_+)P(B_+) + P(A|B_-)P(B_-)} \;=\; \frac{1 \cdot 0.3}{1 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7} = \frac{0.3}{0.44} \simeq 0.68.$$

,