Metody probabilistyczne

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

21.10.2020

Klasyczna/geometryczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Def. klasyczna: $|A|$ jest liczności\u0105 zbioru
  - Def. geometryczna: $|A|$ jest miarą zbioru

Klasyczna/geometryczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Def. klasyczna: $|A|$ jest licznością zbioru
  - Def. geometryczna: $|A|$ jest miarą zbioru

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Niejednoznaczność zasady nierozróżnialości (przykłady za moment)

Klasyczna/geometryczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Def. klasyczna: $|A|$ jest licznością zbioru
  - Def. geometryczna: $|A|$ jest miarą zbioru

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Niejednoznaczność zasady nierozróżnialości (przykłady za moment)
- Przypisanie każdemu zdarzeniu elementarnemu jednakowego prawdopodobieństwa
  - np. nieuczciwa moneta

Klasyczna/geometryczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Def. klasyczna: $|A|$ jest licznością zbioru
  - Def. geometryczna: $|A|$ jest miarą zbioru

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Niejednoznaczność zasady nierozróżnialości (przykłady za moment)
- Przypisanie każdemu zdarzeniu elementarnemu jednakowego prawdopodobieństwa
  - np. nieuczciwa moneta
- Ograniczenie do dwóch specyficznych przestrzeni zdarzeń (zbiory skończone lub $\mathbb{R}^n$)
  - np. rzucanie monetą do czasu pojawienia się orła

Klasyczna/geometryczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
  - Def. klasyczna: $|A|$ jest licznością zbioru
  - Def. geometryczna: $|A|$ jest miarą zbioru

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Niejednoznaczność zasady nierozróżnialości (przykłady za moment)
- Przypisanie każdemu zdarzeniu elementarnemu jednakowego prawdopodobieństwa
  - np. nieuczciwa moneta
- Ograniczenie do dwóch specyficznych przestrzeni zdarzeń (zbiory skończone lub $\mathbb{R}^n$)
  - np. rzucanie monetą do czasu pojawienia się orła
- Niespójność matematyczna (przykład za moment)

Problem d'Alemberta

Rozważmy następującą prostą grę: rzucamy dwoma monetami i wygrywamy, jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł, w przeciwnym wypadku przegrywamy. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

Problem d'Alemberta

Rozważmy następującą prostą grę: rzucamy dwoma monetami i wygrywamy, jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł, w przeciwnym wypadku przegrywamy. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

Odpowiedź: Niech A będzie zdarzeniem oznaczającym wygraną

Ponieważ $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$, $A = \{OO, OR, RO\}$ to oczywiście $P(A) = \frac{3}{4}$

Problem d'Alemberta

Rozważmy następującą prostą grę: rzucamy dwoma monetami i wygrywamy, jeśli wypadnie co najmniej jeden orzeł, w przeciwnym wypadku przegrywamy. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?

Odpowiedź: Niech A będzie zdarzeniem oznaczającym wygraną
Ponieważ $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$, $A = \{OO, OR, RO\}$ to oczywiście $P(A) = \frac{3}{4}$

Odpowiedź d'Alemberta: Jeśli na pierwszej monecie wypadnie orzeł, drugi rzut już nie nastąpi, gdyż gra jest już rozstrzygnięta.
Stąd $\Omega = \{O, RO, RR\}$, $A = \{O, RO\}$, a więc $P(A) = \frac{2}{3}$

Niejednoznaczność przypisania jednakowych prawdopodobieństw zdarzeniom elementarnym!

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

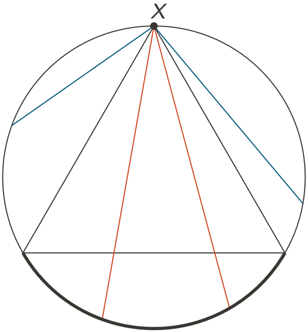
Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Rozważmy cięciwy rozpoczynające się w X.

Zdarzenia elementarne: drugi koniec cięciwy określa kąt na okręgu w $[0, 2\pi]$.

$\Omega = [0, 2\pi)$

Cięciwy z A odpowiadają pogrubionemu łukowi: $A = (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$

$$P(A) = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

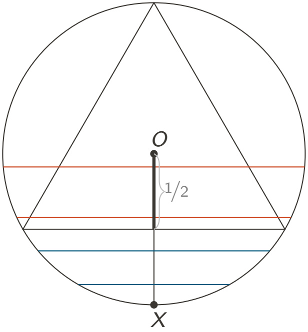
To prawdopodobieństwo nie zależy od wyboru punktu X.

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Rozważmy cięciwy przecinające promień OX pod kątem prostym.

Zdarzenia elementarne: położenie cięciwy określa odległość od środka w $[0, 1]$.

$\Omega = [0, 1]$

Cięciwy z A odpowiadają pogrubionemu odcinkowi: $A = [0, \frac{1}{2}]$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

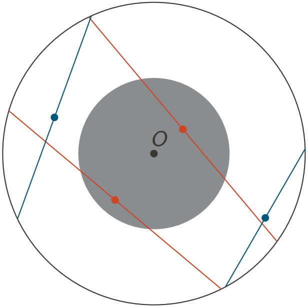
To prawdopodobieństwo nie zależy od wyboru promienia OX.

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Każda cięciwa jest jednoznacznie zdefiniowana przez położenie jej środka.

Zdarzenia elementarne: punkty wewnątrz koła.

$\Omega = K(O, 1)$ (koło o środku O i promieniu 1)

Cięciwy z A to punkty w szarym kole:
$A = K(O, \frac{1}{2})$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

Skąd ten paradoks?

W każdym przypadku użyliśmy innej przestrzeni zdarzeń elementarnych

1. $\Omega = [0, 2\pi)$ (kąt)
2. $\Omega = [0, 1]$ (odległość)
3. $\Omega = K(O, 1)$ (punkt)

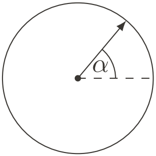
To, że wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne w jednej z przestrzeni, nie musi oznaczać, że są równo prawdopodobne w innej!

Stąd wszystkie trzy przykłady dotyczą innego doświadczenia losowego!

Zbiory niemierzalne*

[Jakubowski, Sztencel: Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego, dodatek A.3]

Losujemy kąt z przedziału $[0, 2\pi)$



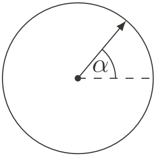
Można pokazać, że jesteśmy w stanie podzielić zbiór $\Omega = [0, 2\pi)$ na nieskończenie, ale przeliczanie wiele zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$, takich, że:

1. Wszystkie zbiory są rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = [0, 2\pi)$ (pokrywają całą przestrzeń Ω)
3. Są przystające, tzn. dowolne A_i można utworzyć z A_1 poprzez przesunięcie o pewien kąt

Zbiory niemierzalne*

[Jakubowski, Sztencel: Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego, dodatek A.3]

Losujemy kąt z przedziału $[0, 2\pi)$



Można pokazać, że jesteśmy w stanie podzielić zbiór $\Omega = [0, 2\pi)$ na nieskończenie, ale przeliczanie wiele zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$, takich, że:

1. Wszystkie zbiory są rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = [0, 2\pi)$ (pokrywają całą przestrzeń Ω)
3. Są przystające, tzn. dowolne A_i można utworzyć z A_1 poprzez przesunięcie o pewien kąt

$|\Omega| = 2\pi$

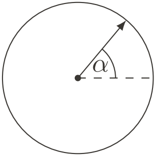
$$|\Omega| \underbrace{=}_{\text{wynika z pkt 2.}} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots| \underbrace{=}_{\text{wynika z pkt 1.}} \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

$|A_i| = |A_1|$ z pkt 3.

Zbiory niemierzalne*

[Jakubowski, Sztencel: Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego, dodatek A.3]

Losujemy kąt z przedziału $[0, 2\pi)$



Można pokazać, że jesteśmy w stanie podzielić zbiór $\Omega = [0, 2\pi)$ na nieskończenie, ale przeliczanie wiele zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots$, takich, że:

1. Wszystkie zbiory są rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = [0, 2\pi)$ (pokrywają całą przestrzeń Ω)
3. Są przystające, tzn. dowolne A_i można utworzyć z A_1 poprzez przesunięcie o pewien kąt

$|\Omega| = 2\pi$

$$|\Omega| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots| = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|$$

wynika z pkt 2.

wynika z pkt 1.

$|A_i| = |A_1|$ z pkt 3.

Otrzymujemy $2\pi = \infty \cdot |A_1|$ czyli sprzeczność!

Nie da się więc przydzielić zbiorom A_i miary, a tym samym prawdopodobieństwa! zbiory niemierzalne

Przestrzeń probabilistyczna

$$(\ \Omega,\ \mathcal{F},\ P\ )$$

przestrzeń zdarzeń elementarnych

σ-ciało zdarzeń

miara prawdopodobieństwa

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$
- Czas życia dysku twardego:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

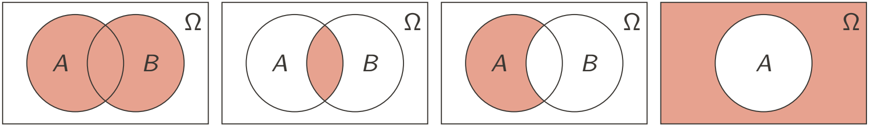
- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$
- Czas życia dysku twardego: $\Omega = [0, \infty)$

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

Zdarzenia

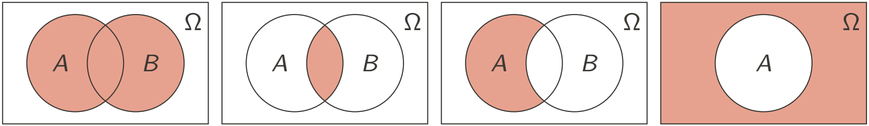
Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

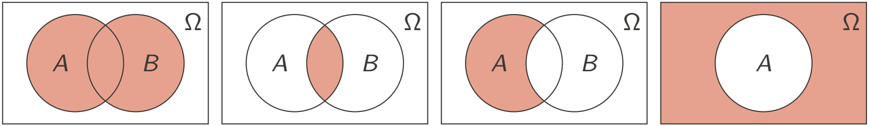


suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

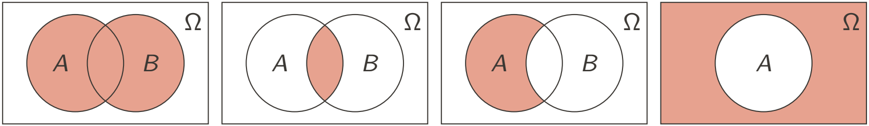


suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

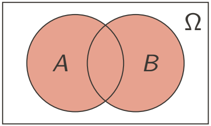


suma $A \cup B$ iloczyn $A \cap B$ różnica $A \setminus B$ dopełnienie A'

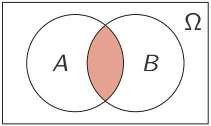
- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym

Zdarzenia

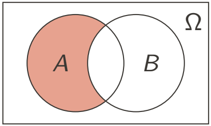
Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



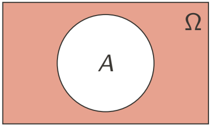
suma $A \cup B$



iloczyn $A \cap B$



różnica $A \setminus B$

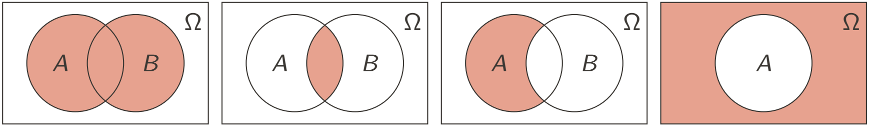


dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

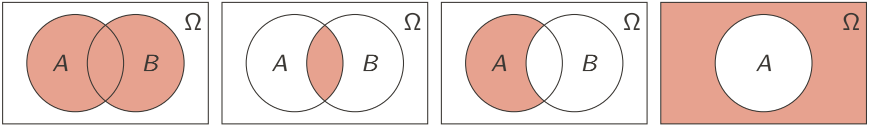


suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'
- Zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczające się) jeśli $A \cap B = \emptyset$

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'
- Zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczające się) jeśli $A \cap B = \emptyset$
- Ogólniej: zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłączne jeśli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$

Zadanie

Zadanie 1

Niech A_1, A_2, A_3 oznaczają pewne zdarzenia losowe. Wyraź w jak najprostszy sposób za pomocą operacji teorio-mnogościowych zdarzenia:

1. B_1: „zaszły wszystkie trzy zdarzenia"
2. B_2: „zaszły dokładnie dwa zdarzenia"
3. B_3: „zaszło co najmniej jedno zdarzenie"
4. B_4: „zaszło co najwyżej jedno zdarzenie"
5. B_5: „zaszło tylko zdarzenie A_1"
6. B_6: „nie zaszło żadne ze zdarzeń"

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω

Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$
2. Jeśli A należy do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „nie zaszło A”

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$
2. Jeśli A należy do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „nie zaszło A"
3. Jeśli A i B należą do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „zaszło A lub B"

σ-ciało zbiorów

Rodzinę podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ nazywamy σ-ciałem (σ-algebrą), gdy:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $A' \in \mathcal{F}$
3. Jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

Uwaga: własność 3 zachodzi dla dowolnych przeliczalnych sum zdarzeń.

Własności σ-ciała zdarzeń

Fakt: Zdarzenie puste należy do $\mathcal{F}$: $\emptyset \in \mathcal{F}$

Własności σ-ciała zdarzeń

$\boxed{\text{Fakt: Zdarzenie puste należy do } \mathcal{F}\text{: } \emptyset \in \mathcal{F}}$

Dowód: Ponieważ $\Omega \in \mathcal{F}$, a $\Omega' = \emptyset$, to z własności 2 mamy $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Własności σ-ciała zdarzeń

$\boxed{\text{Fakt: Jeśli } A, B \in \mathcal{F} \text{ to również: } A \cap B \in \mathcal{F}}$

Własności σ-ciała zdarzeń

Fakt: Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to również: $A \cap B \in \mathcal{F}$

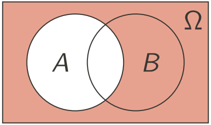
Dowód:

(a) Z własności 2 zachodzi: $A' \in \mathcal{F}$ oraz $B' \in \mathcal{F}$

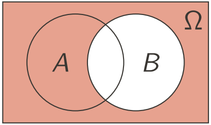
(b) Z własności 3 zachodzi: $C = A' \cup B' \in \mathcal{F}$

(c) Z własności 2 zachodzi: $C' \in \mathcal{F}$

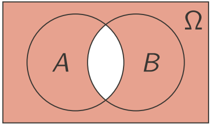
(d) Ale z prawa De Morgana* wynika, że $C' = A \cap B$



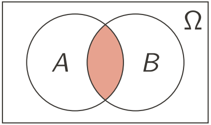
A'



B'



$C = A' \cup B'$



$C' = A \cap B$

*Prawo de Morgana: $(E \cap F)' = E' \cup F'$

Własności σ-ciała zdarzeń

Zadanie 2

Udowodnij, że jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to również $A \setminus B \in \mathcal{F}$

Wniosek: σ-ciało jest zamknięte ze względu na wszystkie operacje na zbiorach typu: suma, iloczyn, różnica, dopełnienie, itp.

Przykłady σ-ciał: zbiór potęgowy

Jeśli Ω jest przeliczalny, możemy wziąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, tzn. wszystkie podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych są zdarzeniami

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ musi zawierać zdarzenia przynajmniej postaci: „wynik był mniejszy od a", „wynik był pomiędzy a i b" ($a, b \in \mathbb{R}$), itp.

Czyli $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie możliwe przedziały otwarte i zamknięte, skończone lub nie, np. $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a]$, (b, ∞), itp.

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ musi zawierać zdarzenia przynajmniej postaci: „wynik był mniejszy od a", „wynik był pomiędzy a i b" ($a, b \in \mathbb{R}$), itp.

Czyli $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie możliwe przedziały otwarte i zamknięte, skończone lub nie, np. $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a]$, (b, ∞), itp.

Z własności σ-ciała, $\mathcal{F}$ zawiera również przeliczalne sumy i iloczyny przedziałów (w tym pojedyncze punkty) .

Taką rodzinę zdarzeń nazywa się σ-ciałem zbiorów borelowskich. Rodzina ta zawiera wszystkie „praktyczne" podzbiory $\mathbb{R}$ (a nawet tak dziwne zbiory jak zbiór Cantora czy zbiór liczby wymiernych).

Biorąc iloczyny kartezjańskie podzbiorów, można tę rodzinę uogólnić na przestrzeń $\mathbb{R}^2$ (płaszczyznę), $\mathbb{R}^3$ (przestrzeń 3D), itp.

Zadania

Zadanie 3

1. Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sprawdź, czy $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ jest σ-ciałem
2. Dla dowolnego Ω i $A \subset \Omega$, wyznacz najmniejsze σ-ciało zawierające zdarzenie A

Zadanie 4

Niech $\Omega = \mathbb{N}$. Rozważ rodzinę $\mathcal{F}$ zawierającą wszystkie podzbiory Ω, które są skończone, lub których dopełnienia są skończone:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \Omega \colon A \text{ skończony} \vee A' \text{ skończony}\}$$

Sprawdź czy $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem.

Miara prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa (1933):

Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję P o wartościach rzeczywistych zdefiniowanej na σ-ciale zdarzeń $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, spełniającą warunki:

1. Nieujemność: $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$
2. Normalizacja: $P(\Omega) = 1$
3. Addytywność: Dla dowolnego ciągu parami rozłącznych* zdarzeń $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Andriej Kołmogorow (1903-1987)

Uwaga: symbol $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ oznacza sumę $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

*Przypomnijmy: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerem: $P(\emptyset) = 0$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerem: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: Bierzemy $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Z własności 3 mamy $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$, co jest tylko możliwe gdy $P(\emptyset) = 0$.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt (skończona addytywność): Dla dowolnych rozłącznych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ mamy $P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt (skończona addytywność): Dla dowolnych rozłącznych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ mamy $P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Dowód: Bierzemy nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$, w którym $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$.

Wszystkie zdarzenia są rozłączne, bo $A_i \cap \emptyset = \emptyset$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dodatkowo $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Mamy więc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^\infty P(A_i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

gdzie w $(*)$ skorzystaliśmy z $P(\emptyset) = 0$.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: dla dowolnego A zachodzi $P(A') = 1 - P(A)$

Wniosek: dla dowolnego A zachodzi $P(A) \leqslant 1$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: dla dowolnego A zachodzi $P(A') = 1 - P(A)$

Wniosek: dla dowolnego A zachodzi $P(A) \leqslant 1$

Dowód: Ponieważ $A \cup A' = \Omega$, oraz A i A' są rozłączne:

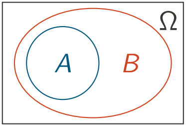
$$P(\Omega) = P(A) + P(A') = 1.$$

Czyli $P(A) = 1 - P(A')$.

Wniosek wynika z udowodnionego faktu oraz $P(A') \geqslant 0$ (aksjomat 1)

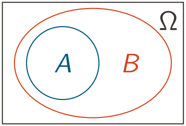
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Jeśli $A \subseteq B$ to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
Wniosek: Jeśli $A \subset B$ to $P(B) \geqslant P(A)$.



Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Jeśli $A \subseteq B$ to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
Wniosek: Jeśli $A \subset B$ to $P(B) \geqslant P(A)$.



Dowód: Można zapisać B jako rozłączną sumę $B = A \cup (B \setminus A)$.

Tym samym $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, z czego wynikają oba stwierdzenia.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

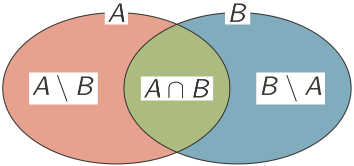
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



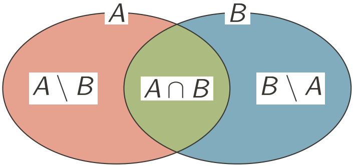
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



Z addytywności (aksjomat 3):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \cup P(B \setminus A) \end{aligned}$$

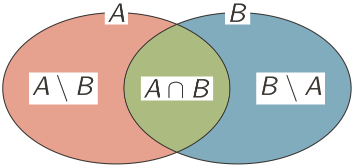
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



Z addytywności (aksjomat 3):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \cup P(B \setminus A) \end{aligned}$$

Podstawiając pierwsze i drugie równanie do trzeciego kończymy dowód.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wniosek: Dla dowolnych A i B mamy:

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wniosek: Dla dowolnych A i B mamy:

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Zadanie 5

Pokaż, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n$ mamy:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Nazywa się to czasem nierównością Boole'a (a po ang. *union bound*)

Zasada włączeń i wyłączeń

Zadanie 6

Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, A_2, A_3 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \ = \ & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Wskazówka: wykorzystaj udowodnione wcześniej:
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

Zasada włączeń i wyłączeń

Zadanie 6

Udowodnij, że dla dowolnych zdarzeń $A_1, A_2, A_3 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \;=\; & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

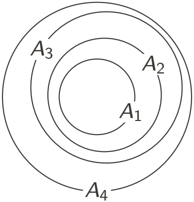
Wskazówka: wykorzystaj udowodnione wcześniej:
$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

Ogólniej: dla dowolnych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Żmudny dowód przez indukcję pomijamy

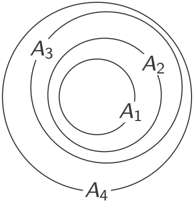
Własności prawdopodobieństwa*



Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Własności prawdopodobieństwa*



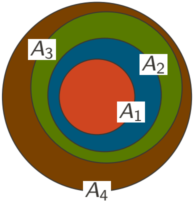
Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Własności prawdopodobieństwa*



Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

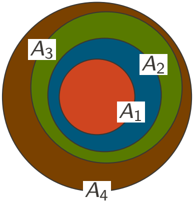
Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Własności prawdopodobieństwa*



Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

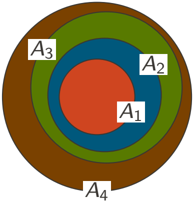
Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

Własności prawdopodobieństwa*

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$



Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

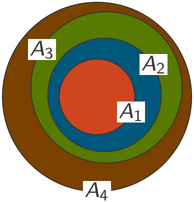
Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

$$P(A) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

Własności prawdopodobieństwa*

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$



Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

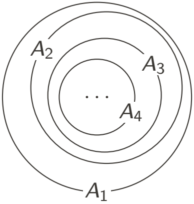
$$P(A) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Własności prawdopodobieństwa*

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy zstępującym, jeśli:

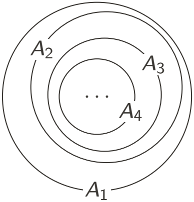
$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$



Własności prawdopodobieństwa*

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy zstępującym, jeśli:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$



Zadanie 7*

Pokaż, że jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest zstępujący i $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Własność 3. Ponieważ Ω jest skończony, rozważamy tylko skończone ciągi. Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – rozłączne, to:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| \; = \; |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Więc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \; = \; \frac{|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|}{|\Omega|} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|}{|\Omega|} \; = \; \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Własność 3. Ponieważ Ω jest skończony, rozważamy tylko skończone ciągi. Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – rozłączne, to:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| \;=\; |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Więc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \;=\; \frac{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|}{|\Omega|} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|}{|\Omega|} \;=\; \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(podobny dowód dla prawdopodobieństwa geometrycznego)

Prawdopodobieństwo na przestrzeni przeliczalnej

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Każdemu ω_n przypisujemy liczbę rzeczywistą $p_n \geqslant 0$, taką, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ definiujemy jako sumę liczb p_n po wszystkich $\omega_n \in A$:

$$P(A) = \sum_{n:\,\omega_n \in A} p_n,$$

Tym samym $p_n = P(\{\omega_n\})$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego ω_n.

Oczywiście, zachodzi to również dla skończonego zbioru Ω.

Prawdopodobieństwo na przestrzeni przeliczalnej

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Każdemu ω_n przypisujemy liczbę rzeczywistą $p_n \geqslant 0$, taką, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ definiujemy jako sumę liczb p_n po wszystkich $\omega_n \in A$:

$$P(A) = \sum_{n\,:\,\omega_n \in A} p_n,$$

Tym samym $p_n = P(\{\omega_n\})$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego ω_n.

Oczywiście, zachodzi to również dla skończonego zbioru Ω.

Zadanie 8

Pokaż, że to prawdopodobieństwo spełnia aksjomaty Kołmogorowa

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{12}\}$:

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{12}\}$:
- Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych:

ω_n	p_n	ω_n	p_n	ω_n	p_n
ω_2	$^1/_{36}$	ω_6	$^5/_{36}$	ω_{10}	$^3/_{36}$
ω_3	$^2/_{36}$	ω_7	$^6/_{36}$	ω_{11}	$^2/_{36}$
ω_4	$^3/_{36}$	ω_8	$^5/_{36}$	ω_{12}	$^1/_{36}$
ω_5	$^4/_{36}$	ω_9	$^4/_{36}$		

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{12}\}$:
- Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych:

ω_n	p_n	ω_n	p_n	ω_n	p_n
ω_2	$^1/_{36}$	ω_6	$^5/_{36}$	ω_{10}	$^3/_{36}$
ω_3	$^2/_{36}$	ω_7	$^6/_{36}$	ω_{11}	$^2/_{36}$
ω_4	$^3/_{36}$	ω_8	$^5/_{36}$	ω_{12}	$^1/_{36}$
ω_5	$^4/_{36}$	ω_9	$^4/_{36}$		

- Prawdopodobieństwo zdarzeń:
  - „Wypadła siódemka”:
    $A = \{\omega_7\}$, $P(A) = \frac{6}{36}$
  - „Wypadła co najmniej dziesiątka”:
    $A = \{\omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}\}$, $P(A) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$
  (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$
  (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n:

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n: $p_n = \frac{1}{2^n}$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n: $p_n = \frac{1}{2^n}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n: $p_n = \frac{1}{2^n}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$A = \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}'$$

$$P(A) = 1 - \sum_{n=1}^{5} p_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n: $p_n = \frac{1}{2^n}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$A = \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}'$$

$$P(A) = 1 - \sum_{n=1}^{5} p_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia B „parzysta liczba rzutów":

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_n oznacza „orzeł wypadł w n-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_n: $p_n = \frac{1}{2^n}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$A = \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}'$$

$$P(A) = 1 - \sum_{n=1}^{5} p_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia B „parzysta liczba rzutów":

$$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\}$$

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Przykład: liczby naturalne

Niech $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Czy można w jakikolwiek przypisać wszystkim liczbom naturalnym równe prawdopodobieństwa?

Przykład: liczby naturalne

Niech $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Czy można w jakikolwiek przypisać wszystkim liczbom naturalnym równe prawdopodobieństwa?

Nie można! Każdej liczbie $n \in \mathbb{N}$ przypiszmy prawdopodobieństwo p_n
Zgodnie z warunkiem normalizacji musi zajść:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

Jeśli $p_n = p$ dla wszystkich n, to suma po lewej stronie daje zero (dla $p = 0$) lub nieskończoność (dla $p > 0$)!

Przykład: liczby naturalne

Niech $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Czy można w jakikolwiek przypisać wszystkim liczbom naturalnym równe prawdopodobieństwa?

Nie można! Każdej liczbie $n \in \mathbb{N}$ przypiszmy prawdopodobieństwo p_n
Zgodnie z warunkiem normalizacji musi zajść:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \; = \; 1$$

Jeśli $p_n = p$ dla wszystkich n, to suma po lewej stronie daje zero (dla $p = 0$) lub nieskończoność (dla $p > 0$)!

Warunkiem koniecznym na zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ jest zbieżność do zera kolejnych wyrazów tego szeregu:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 0$$

Nie jest to warunek wystarczający

Przykład: liczby naturalne

Czy da się przypisać prawdopodobieństwa liczbom naturalnym tak, aby dla każdego $n \in \mathbb{N}$: (a) $p_n \propto \frac{1}{n}$; (b) $p_n \propto \frac{1}{n^2}$? ($\propto$ oznacza „proporcjonalne do")

Przykład: liczby naturalne

Czy da się przypisać prawdopodobieństwa liczbom naturalnym tak, aby dla każdego $n \in \mathbb{N}$: (a) $p_n \propto \frac{1}{n}$; (b) $p_n \propto \frac{1}{n^2}$? ($\propto$ oznacza „proporcjonalne do")

(a) Nie da się. Szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, stąd nie istnieje stała c taka, że $p_n = \frac{c}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

Przykład: liczby naturalne

Czy da się przypisać prawdopodobieństwa liczbom naturalnym tak, aby dla każdego $n \in \mathbb{N}$: (a) $p_n \propto \frac{1}{n}$; (b) $p_n \propto \frac{1}{n^2}$? ($\propto$ oznacza „proporcjonalne do")

(a) Nie da się. Szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, stąd nie istnieje stała c taka, że $p_n = \frac{c}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

(b) Da się. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(problem bazylejski)},$$

stąd poszukiwane prawdopodobieństwa to:

$$p_n = \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

Przykład: liczby naturalne

Czy da się przypisać prawdopodobieństwa liczbom naturalnym tak, aby dla każdego $n \in \mathbb{N}$: (a) $p_n \propto \frac{1}{n}$; (b) $p_n \propto \frac{1}{n^2}$? ($\propto$ oznacza „proporcjonalne do")

(a) Nie da się. Szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny, stąd nie istnieje stała c taka, że $p_n = \frac{c}{n}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$

(b) Da się. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{(problem bazylejski)},$$

stąd poszukiwane prawdopodobieństwa to:

$$p_n = \frac{6}{\pi^2 n^2}$$

Ogólnie: da się znormalizować prawdopodobieństwa $p_n \propto \frac{1}{n^\alpha}$ dla $\alpha > 1$.

Interpretacja prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa określają własności jakie spełnia miara prawdopodobieństwa, ale nic nie mówią skąd tę miarę wziąć?

Jaka jest interpretacja wartości prawdopodobieństwa?

Interpretacja prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa określają własności jakie spełnia miara prawdopodobieństwa, ale nic nie mówią skąd tę miarę wziąć?

Jaka jest interpretacja wartości prawdopodobieństwa?

- Klasyczna (Laplace'a): wszystkie zdarzenia równo prawdopodobne ✗
- Częstościowa: prawdopodobieństwo jako granica częstości ✓
- Subiektywna: prawdopodobieństwa jako miara przekonań ✓

Interpretacja częstościowa

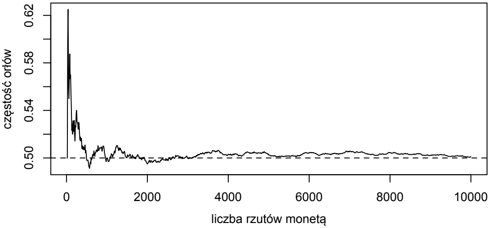
Dotyczy powtarzalnych doświadczeń losowych.

Powtórzmy N razy doświadczenie losowe.

Dla dowolnego zdarzenia A, niech N_A oznacza liczbę doświadczeń w których A zaszło.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest graniczną wartością częstości:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}.$$



Interpretacja subiektywna (bayesowska)

Prawdopodobieństwa nie istnieją obiektywnie, a są jedynie subiektywnym stopniem przekonania

Interpretacja subiektywna (bayesowska)

Prawdopodobieństwa nie istnieją obiektywnie, a są jedynie subiektywnym stopniem przekonania

Pozwala przypisać dowolnym zdarzeniom prawdopodobieństwa, np.:

- Jaka jest szansa, że jutro wstanie słońce?
- Jaka jest szansa, że Polska wygra Mistrzostwa Świata w Piłce Nożnej?
- Jaka jest szansa, że X wygra wybory prezydenckie?

Interpretacja subiektywna (bayesowska)

Prawdopodobieństwa nie istnieją obiektywnie, a są jedynie subiektywnym stopniem przekonania

Pozwala przypisać dowolnym zdarzeniom prawdopodobieństwa, np.:

- Jaka jest szansa, że jutro wstanie słońce?
- Jaka jest szansa, że Polska wygra Mistrzostwa Świata w Piłce Nożnej?
- Jaka jest szansa, że X wygra wybory prezydenckie?

Może zostać liczbowo wyznaczone na podstawie wewnętrznego zakładu:

> *Prawdopodobieństwo zdarzenia A to liczba p taka, że dla dowolnej stawki S (dodatniej bądź ujemnej) gotowi jesteśmy zapłacić $p \cdot S$ za wejście w zakład, w którym wygrywamy S gdy A zajdzie, lub nic nie wygrywamy gdy A nie zajdzie*

Interpretacja subiektywna (bayesowska)

Prawdopodobieństwa nie istnieją obiektywnie, a są jedynie subiektywnym stopniem przekonania

Pozwala przypisać dowolnym zdarzeniom prawdopodobieństwa, np.:

- Jaka jest szansa, że jutro wstanie słońce?
- Jaka jest szansa, że Polska wygra Mistrzostwa Świata w Piłce Nożnej?
- Jaka jest szansa, że X wygra wybory prezydenckie?

Może zostać liczbowo wyznaczone na podstawie wewnętrznego zakładu:

> *Prawdopodobieństwo zdarzenia A to liczba p taka, że dla dowolnej stawki S (dodatniej bądź ujemnej) gotowi jesteśmy zapłacić $p \cdot S$ za wejście w zakład, w którym wygrywamy S gdy A zajdzie, lub nic nie wygrywamy gdy A nie zajdzie*

Prawdopodobieństwo subiektywne uaktualniane jest na podstawie obserwacji za pomocą *reguły Bayesa*