Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

1. Prawdopodobieństwo klasyczne

14.10.2020

Zadanie 1. *Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie). Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?*

Odpowiedź: Liczba wszystkich możliwych wyników to liczba 6-elementowych podzbiorów 49-elementowego zbioru, czyli $|\Omega| = \binom{49}{6}$. Tylko jeden z tych podzbiorów daje główną wygraną, stąd prawdopodobieństwo zdarzenia A_6 („szóstka w totolotka”) wynosi:

$$P(A_6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{6!43!}{49!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} = \frac{1}{13\,983\,816}.$$

Trafienie „piątki”. Zaznaczyliśmy 6 liczb i musi zostać wylosowane dokładnie 5 z tych 6 liczb. Jest sześć takich „piątek”, a każda z tych „piątek” będzie miała szóstą liczbę z zakresu $7-49$ (43 możliwości). Łącznie jest więc $6 \times 43 = 258$ 6-elementowych podzbiorów, które dają wygraną typu „piątka”. Szukane prawdopodobieństwo wynosi więc:

$$P(A_5) = \frac{258}{\binom{49}{6}} \simeq \frac{1}{54\,201}.$$

Trafienie „czwórki”. Muszą zostać wylosowane 4 z 6 zaznaczonych liczb, co można zrealizować na $\binom{6}{4}$ sposobów. Pozostałe dwie liczby muszą pochodzić *spoza* zaznaczonej szóstki, co daje $\binom{49-6}{2}$ sposobów. Mamy więc:

$$P(A_4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \simeq \frac{1}{1\,032}.$$

Trafienie „trójki”. Analogicznie do poprzedniego przypadku:

$$P(A_3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \simeq \frac{1}{57}.$$

Zadanie 2. *Ile słów można utworzyć ze słowa BABA zmieniając kolejność liter? A ile ze słowa BARBARA?*

Odpowiedź: Wpierw rozważmy prostsze słowo BABA. Możliwych ułożeń liter jest tyle, ile czteroelementowych permutacji, czyli $4! = 24$. Niestety, z powodu powtarzających się liter, wiele z tych permutacji prowadzi do tych samych słów:

permutacja	słowo	permutacja	słowo	permutacja	słowo	permutacja	słowo
(1,2,3,4)	BABA	(2,3,1,4)	ABBA	(4,3,2,1)	ABAB	(3,2,4,1)	BAAB
(1,4,3,2)	BABA	(2,1,3,4)	ABBA	(2,3,4,1)	ABAB	(1,2,4,3)	BAAB
(3,4,1,2)	BABA	(3,1,2,4)	BBAA	(2,1,4,3)	ABAB	(4,2,1,3)	AABB
(3,2,1,4)	BABA	(3,1,4,2)	BBAA	(4,1,2,3)	ABAB	(2,4,1,3)	AABB
(4,1,3,2)	ABBA	(1,3,4,2)	BBAA	(1,4,2,3)	BAAB	(2,4,3,1)	AABB
(4,3,1,2)	ABBA	(1,3,2,4)	BBAA	(3,4,2,1)	BAAB	(4,2,3,1)	AABB

Weźmy przykładowo słowo ABBA. Przestawienie między sobą liter A, lub liter B, prowadzi do *tego samego słowa* ABBA. Litery A można między sobą przestawić na $2! = 2$ sposoby, podobnie litery B.

Tym samym $2 \cdot 2 = 4$ permutacje (związane z przestawieniem między sobą *tych samych* liter) prowadzą do tego samego słowa.

Łącznie jest więc $\frac{4!}{4} = 6$ różnych słów, które można utworzyć ze słowa BABA.

Teraz rozważmy słowo BARBARA. Mamy 3 litery A, 2 litery B oraz 2 litery R, łącznie 7 liter. Podobnie jak poprzednio, przestawianie między sobą tych samych liter nie zmienia słowa. Litery A można przestawić na 3! sposobów, litery B oraz R – na 2! sposobów. Więc $3! \cdot 2! \cdot 2!$ przestawień prowadzi do tego samego słowa.

Łącznie mamy więc $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ różnych słów, które można utworzyć ze słowa BARBARA. Nie będziemy ich tutaj wypisywać.

Zadanie 3. *Załóżmy, że* 10 *osób obecnych w restauracji zamówiło w tym samym czasie* 10 różnych *dań. Niestety roztrzepany kelner zapisał tylko nazwy dań, ale nie zapisał kto co zamawiał. Po przygotowaniu potraw postanowił je więc rozdać gościom restauracji* w sposób całkowicie losowy*. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że: (a) dany gość restauracji otrzyma swoje własne danie; (b) para osób siedząca przy danym stoliku otrzyma dania, które zamawiała; (c) wszyscy goście otrzymali swoje własne dania.*

Odpowiedź:

(a) Weźmy gościa nr 1. Jest $|\Omega| = 10!$ wszystkich możliwych przyporządkowań (permutacji) dań gościom restauracji. Niech A oznacza zdarzenie „gość nr 1 otrzymał swoje własne danie (nr 1)”. Zdarzeniu A sprzyjają wszystkie permutacje, w których danie nr 1 jest przyporządkowane gościowi nr 1, natomiast pozostałe 9 dań jest przyporządkowane dowolnie do pozostałych 9 gości. Jest $|A| = 9!$ takich permutacji, stąd:
$$P(A) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}.$$

(b) Podobnie jak poprzednio, $|\Omega| = 10!$. Zdarzeniu B – „oboje gości dostało dania, które zamawiali” sprzyjają wszystkie permutacje, które przyporządkowują poprawne dania tej parze i dowolnie przyporządkowują pozostałe 8 dań pozostałym 8 gościom. Jest $|B| = 8!$ takich permutacji, stąd:
$$P(B) = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{90}.$$

(c) Podobnie jak poprzednio, $|\Omega| = 10!$. Zdarzeniu C – „wszyscy goście dostali swoje własne dania” sprzyja tylko jedna permutacja, stąd:
$$P(C) = \frac{1}{10!}.$$

Zadanie 4. *W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono arbitralnie i losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: (a) w danej (np. pierwszej) ławce siedzą dziewczynka i chłopiec; (b) w danej ławce siedzą dwie dziewczynki; (c) we wszystkich ławkach siedzą mieszane pary, tzn. dziewczynka i chłopiec.*

Odpowiedź:

(a) Niech A będzie rzeczonym zdarzeniem. Do danej ławki możemy wybrać $\binom{20}{2}$ możliwych (nieuporządkowanych) par osób. Spośród tych par jest $|A| = \binom{10}{1}\binom{10}{1} = 100$ (nieuporządkowanych) par mieszanych, stąd:
$$P(A) = \frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{10}{19}.$$

(b) Niech B będzie rzeczonym zdarzeniem. Do danej ławki możemy wybrać $|\Omega| = \binom{20}{2}$ możliwych (nieuporządkowanych) par osób. Spośród tych par jest $|B| = \binom{10}{2}$ (nieuporządkowanych) par dziewczynek, stąd:
$$P(B) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{9}{38}.$$

(c) Niech C będzie rzeczonym zdarzeniem. Załóżmy, że losowo permutujemy osoby, a potem umieszczamy po kolei obsadzając wpierw 1. ławkę, potem 2. ławkę, itp. Jest więc $|\Omega| = 20!$ wszystkich możliwych ułożeń osób w ławkach. Do każdej z ławek przyporządkowujemy po jednym chłopcu (na 10! sposobów) i po jednej dziewczynce (na 10! sposobów) i dowolnie możemy ich poprzestawiać w obrębie każdej ławki (na 2^{10} sposobów). Jest więc $|C| = 2^{10} \cdot 10!10!$ sposobów sprzyjających zdarzeniu C. Stąd:

$$P(C) = \frac{2^{10} \cdot 10!10!}{20!}$$

Zadanie 5. *Przy okrągłym stole z 20 krzesłami rozsadzono 10 małżeństw w sposób całkowicie losowy. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: (a) dany mąż (np. mąż z pierwszego z małżeństw) siedzi obok swojej żony; (b) dany mąż siedzi pomiędzy dwoma innymi mężami; (c) wszystkie małżeństwa siedzą obok siebie.*

Odpowiedź:

(a) Weźmy męża nr 1 i niech A będzie rzeczonym zdarzenim (dotyczącym tego męża). Jest $|\Omega| = \binom{19}{2}$ możliwych (nieuporządkowanych) par osób, które będą sąsiadami tego męża. Jeśli jednym z sąsiadów ma być żona, drugi sąsiad może być wylosowany na $|A| = \binom{18}{1} = 18$ różnych sposób, stąd prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(A) = \frac{18}{\binom{19}{2}} = \frac{2}{19}.$$

(można to także policzyć inaczej: szansa, że lewy sąsiad to żona wynosi $\frac{1}{19}$, podobnie szansa, że prawy sąsiad to żona wynosi $\frac{1}{19}$; oba zdarzenia („lewy sąsiad to żona" i „prawy sąsiad to żona") są rozłączne, ich suma to dokładnie zdarzenie A, stąd jego prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{19}$

(b) Niech B będzie rzeczonym zdarzeniem. Podobnie jak poprzednio, $|\Omega| = \binom{19}{2}$. Para mężów będących sąsiadami może być wylosowana na $|B| = \binom{9}{2}$ sposób, szukane prawdopodobieństwo wynosi więc:

$$P(B) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{19}{2}} = \frac{4}{19}.$$

(c) Niech C będzie rzeczonym zdarzeniem. Ponumerujmy miejsca od 1 do 20, zaczynając od dowolnego z miejsc. Załóżmy, że małżeństwo traktujemy jako nierozerwalną parę i sadzamy obok siebie. Możemy to zrobić na 10! sposobów (tyle jest możliwych uporządkowań par), a każdego męża i żonę możemy dowolnie przestawić między sobą. Czyli łącznie $2^{10}10!$ sposobów. Problem w tym, że stół jest okrągły, więc jedno z małżeństw możemy rozerwać i posadzić je na pierwszym i ostatnim miejscu, i również będzie „obok siebie". Daje to kolejne $2^{10}10!$ kombinacji, czyli razem jest $|C| = 2 \cdot 2^{10}10!$ kombinacji sprzyjających zdarzeniu C. Ponieważ łącznie jest $|\Omega| = 20!$ możliwych uporządkowań, szukane prawdopodobieństwo wynosi więc:

$$P(C) = \frac{2 \cdot 2^{10} \cdot 10!}{20!}.$$

Zadanie 6. *Na przystanku zatrzymują się 3 autobusy, każdy przyjedzie w losowym czasie między 0 a 15 minut. Jaka jest szansa, że będziemy czekać na pierwszy autobus krócej niż 5 minut?*

Odpowiedź: Zdarzeniami elementarymi są trójki (x, y, z), określające czasy przyjazdu trzech autobusów. Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest więc podzbiorem $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega = [0, 15] \times [0, 15] \times [0, 15] = [0, 15]^3.$$

Tym samym $|\Omega| = 15^3$. Zdarzenie „czekamy na pierwszy autobus krócej niż 5 minut" zapiszmy jako A. Prościej jest rozpatrzyć zdarzenie A' („czekamy co najmniej 5 minut"), które można zapisać jako:

$$A' = \{(x, y, z) \in \Omega \colon x \geqslant 5 \wedge y \geqslant 5 \wedge z \geqslant 5\} = [5, 15]^3.$$

Stąd otrzymujemy $|A'| = 10^3$, a tym samym:

$$P(A') = \frac{10^3}{15^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = 1 - P(A') = \frac{19}{27}.$$

Zadanie 7. *Zdefiniujmy n-wymiarową kulę o promieniu r jako zbiór:*

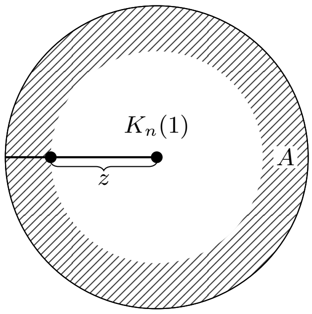
$$K_n(r) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant r\right\}$$

Jaka jest szansa, że losowy wybrany punkt z $K_n(1)$ *(kuli o promieniu* 1*) znajdzie się w odległości większej niż z od środka?* Wskazówka*: objętość n-wymiarowej kuli o promieniu r wyraża się wzorem:*

$$|K_n(r)| = C_n r^n,$$

gdzie C_n *jest pewną stałą zależną od wymiaru* ($C_1 = 2, C_2 = \pi, C_3 = \frac{4}{3}\pi, \ldots$)

Odpowiedź: Zdarzeniami elementarnymi są n-wymiarowe punkty $x \in K_n(1)$, czyli $\Omega = K_n(1)$. Zgodnie ze wzskazówką, $|\Omega| = C_n 1^n = C_n$. Zdarzenie A („punkt znajduje się w odległości większej niż z od środka") zaznaczono schematycznie na poniższym rysunku:



Zauważmy, że A' jest n-wymiarową kulą o promieniu z, stąd:

$$P(A') = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_n z^n}{C_n} = z^n \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = 1 - z^n$$

A więc prawdopodobieństwo trafienia w ten obszar zbiega wykładniczo do 1 dla ustalonego z. Wynika z tego dość zaskakujące zjawisko: *w przestrzeni o dużym wymiarze prawie wszystkie punkty znajdują się przy powierzchni kuli*! Dla przykładu weźmy $z = 0.99$ i $n = 1\,000$, otrzymując $P(A) = 0.9999$. Ten fakt ma dość istotne znaczenie w niektórych metodach analizy danych.