Metody probabilistyczne

1. Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne

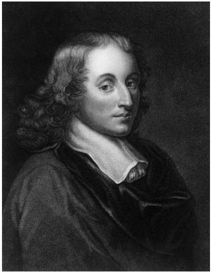
Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

14.10.2020

Rys historyczny

- Francja, XVII w.: gry hazardowe stały się bardzo popularne i robią się coraz bardziej skomplikowane
- 1654: znany hazardzista kawaler de Méré konsultuje z Blaisem Pascalem szanse wygranej w pewnych wariantach gry kośćmi
- Pascal zaczyna korespondować z Pierrem de Fermatem i wspólne formułują matematyczne podstawy prawdopodobieństwa
- Pomysły Pascala i Fermata rozwijane w kolejnych wiekach (m.in.: de Moivre, Bernoulli)



Blaise Pascal (1623-1662)

Pierre de Fermat (1601-1665)

Rys historyczny

- W 1814 Pierre Laplace formułuje w książce *Théorie analytique des probabilités* matematyczną teorię prawdopodobieństwa
- Teoria Laplace'a znana jest obecnie pod nazwą prawdopodobieństwa klasycznego
- Opiera się na zasadzie nierozróżnialności (*principle of indifference*):

  „Mając n wzajemnie wykluczających się możliwości, o których nic nie wiemy a priori, przypisz wszystkim możliwościom równe prawdopodobieństwa."

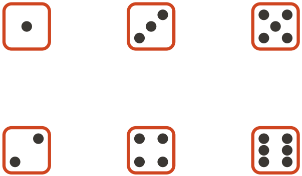
Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω

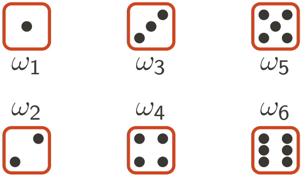
Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω
  - Przykład: rzut kostką



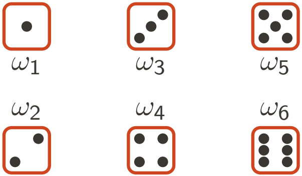
Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω
  - Przykład: rzut kostką



Przestrzeń zdarzeń elementarnych

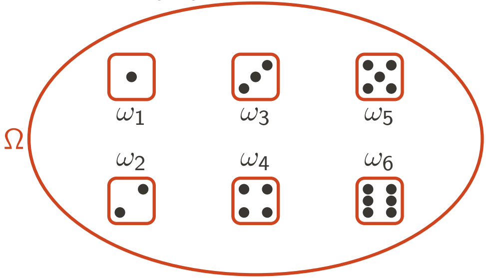
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω
  - Przykład: rzut kostką



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

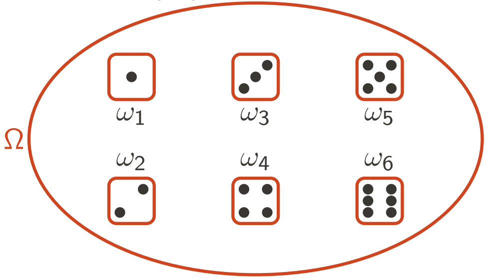
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

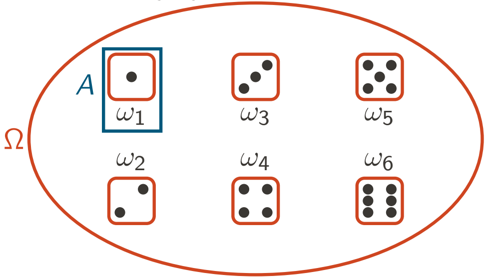
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

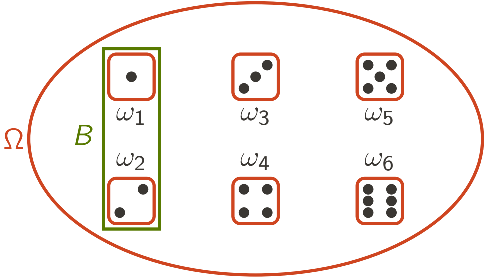
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko": $A = \{\omega_1\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

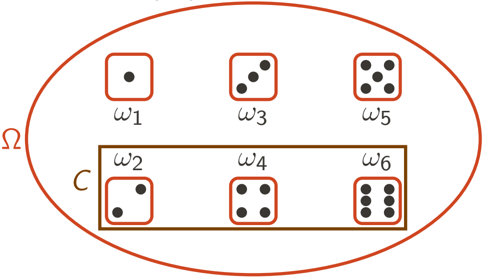
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko": $A = \{\omega_1\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka": $B = \{\omega_1, \omega_2\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem ω



- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko": $A = \{\omega_1\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka": $B = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek": $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

liczba zdarzeń elementarnych w A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

całkowita liczba zdarzeń elementarnych

Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

liczba zdarzeń elementarnych w A

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

całkowita liczba zdarzeń elementarnych

- Zasada nierozróżnialności: „każde zdarzenie elementarne jest równo prawdopodobne"

Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

liczba zdarzeń elementarnych w A

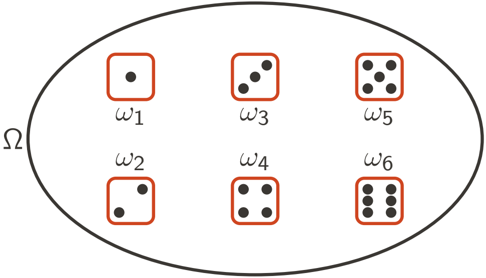
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

całkowita liczba zdarzeń elementarnych

- Zasada nierozróżnialności: „każde zdarzenie elementarne jest równo prawdopodobne"
- Zachodzi:

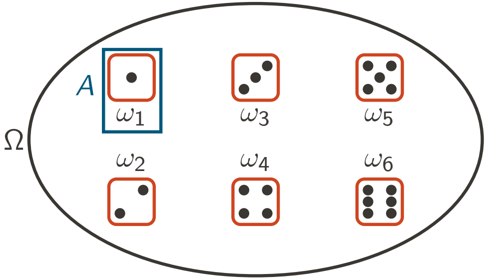
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A) \in [0, 1]$$

Przykład – rzut kostką



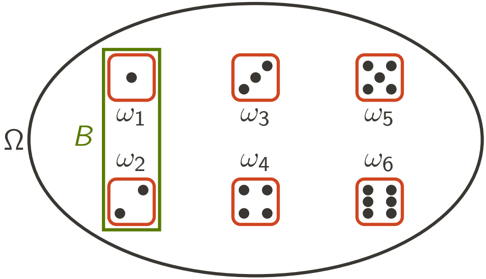
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$

Przykład – rzut kostką



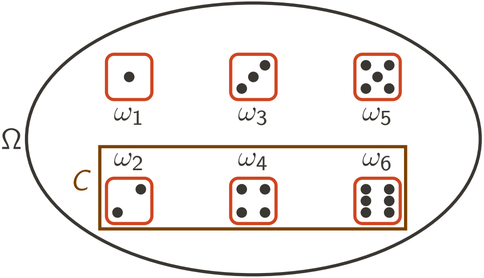
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko":
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$

Przykład – rzut kostką



- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko":
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$
- Zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka":
  $B = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad |B| = 2, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Przykład – rzut kostką



- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko":
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$
- Zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka":
  $B = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad |B| = 2, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek":
  $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \qquad |C| = 3, \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Przykład – rzut trzema monetami


O


R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

- Zdarzenie „wypadły trzy orły":

- Zdarzenie „wypadły (dokładnie) dwa orły":

Przykład – rzut trzema monetami


O


R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły":

- Zdarzenie „wypadły (dokładnie) dwa orły":

Przykład – rzut trzema monetami


O

R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$
$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły”:

$$A = \{OOO\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{8}$$

- Zdarzenie „wypadły (dokładnie) dwa orły”:

Przykład – rzut trzema monetami


O


R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły”:

$$A = \{OOO\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{8}$$

- Zdarzenie „wypadły (dokładnie) dwa orły”:

$$B = \{OOR, ORO, ROO\}, \qquad |B| = 3, \qquad P(B) = \frac{3}{8}$$

Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się S"

S	Zdarzenie	Prawdopodobieństwo
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się S"

S	Zdarzenie	Prawdopodobieństwo
2	$A_2 = \{(1,1)\}$	
3	$A_3 = \{(1,2),(2,1)\}$	
4	$A_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	
5	$A_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	
6	$A_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	
7	$A_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	
8	$A_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$	
9	$A_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	
10	$A_{10} = \{(4,6,(5,5),(6,4)\}$	
11	$A_{11} = \{(5,6),(6,5)\}$	
12	$A_{12} = \{(6,6)\}$	

Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

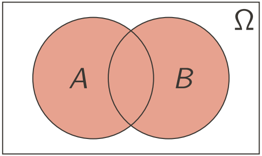
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),(2,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się S"

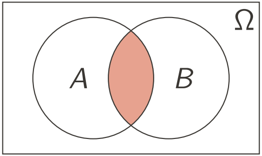
S	Zdarzenie	Prawdopodobieństwo
2	$A_2 = \{(1,1)\}$	$P(A_2) = 1/36$
3	$A_3 = \{(1,2),(2,1)\}$	$P(A_3) = 2/36$
4	$A_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$P(A_4) = 3/36$
5	$A_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	$P(A_5) = 4/36$
6	$A_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	$P(A_6) = 5/36$
7	$A_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	$P(A_7) = 6/36$
8	$A_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$	$P(A_8) = 5/36$
9	$A_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	$P(A_9) = 4/36$
10	$A_{10} = \{(4,6,(5,5),(6,4)\}$	$P(A_{10}) = 3/36$
11	$A_{11} = \{(5,6),(6,5)\}$	$P(A_{11}) = 2/36$
12	$A_{12} = \{(6,6)\}$	$P(A_{12}) = 1/36$

Operacje na zdarzeniach

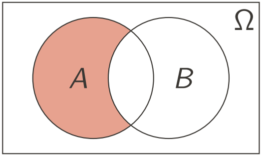
Zdarzenia są zbiorami!



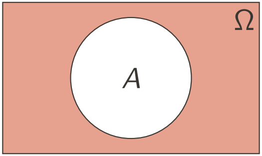
suma $A \cup B$
„zaszło A lub B"



iloczyn $A \cap B$
„zaszło A i B"

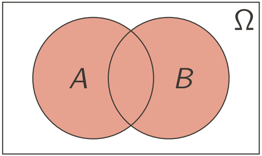


różnica $A \setminus B$
„zaszło A ale nie B"

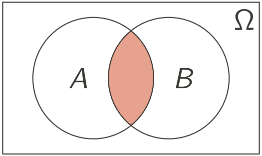


dopełnienie A'
„nie zaszło A"

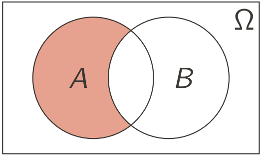
Operacje na zdarzeniach



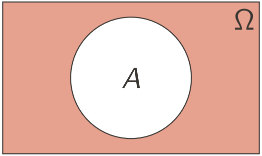
$A \cup B$



$A \cap B$



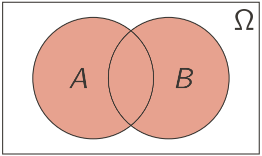
$A \setminus B$



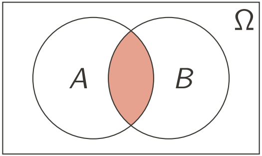
A'

$$
\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \setminus B| &= |A| - |A \cap B| \\
|A'| &= |\Omega| - |A|
\end{aligned}
$$

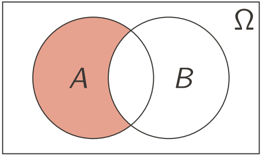
Operacje na zdarzeniach



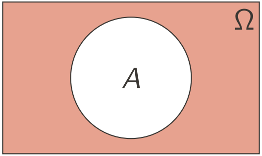
$A \cup B$



$A \cap B$



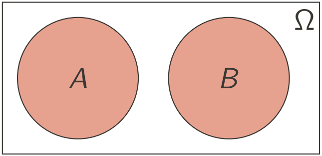
$A \setminus B$



A'

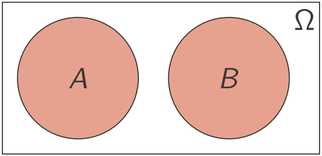
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
P(A') &= 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

Zdarzenia rozłączne



- Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Zdarzenia rozłączne



- Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Ogólniej: jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z k niezależnych etapów, a w każdym etapie jest n możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem k elementów ze zbioru n-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$
- Ile jest binarnych ciągów o długości n? $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$
- Ile 5-literowych słów można utworzyć z 26 liter łacińskich? 26^5

Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania k elementów ze zbioru n-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba k-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru n-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 3 kośćmi, dla których na wszystkich kostkach jest inna wartość? $6 \cdot 5 \cdot 4$
- Ile 5-literowych słów bez powtarzających się liter można utworzyć z 26 liter łacińskich? $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$

Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować n elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

- Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce? $5! = 120$
- Ile jest możliwych przetasowań talii kart? $52!$

Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać k-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z n-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę?
  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 10 drużyn gra w systemie ligowym („każdy z każdym"). Ile odbędzie się meczy? $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$
- Ile jest binarnych ciągów o długości 8 mających dokładnie 3 jedynki?
  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$ (wskazówka: można utożsamić ciągi binarne z podzbiorami zbioru n-elementowego)

Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

Ω – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

Ω – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie A – „wylosowano karetę”

Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

Ω – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie A – „wylosowano karetę"

$$|A| = 13 \times 48$$

Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

Ω – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie A – „wylosowano karetę”

$$|A| = 13 \times 48$$

$$P(A) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \simeq 0.00024$$

Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

Ω – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zadanie

$\boxed{\text{Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?}}$

Ω – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie A – „wypadło dokładnie 10 orłów”

Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

Ω – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie A – „wypadło dokładnie 10 orłów"

$$|A| = \binom{20}{10}$$

Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

Ω – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie A – „wypadło dokładnie 10 orłów”

$$|A| = \binom{20}{10}$$

$$P(A) = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}} \simeq 0.176$$

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Rozumowanie kawalera de Méré:

- Szansa podwójnej jedynki ($1/36$) jest sześciokrotnie mniejsza niż pojedynczej jedynki ($1/6$)
- Aby skompensować tę różnice, trzeba więc rzucić dwoma kośćmi sześciokrotnie więcej razy niż pojedynczą kością
- Wniosek: oba powyższe zdarzenia są równo prawdopodobne

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Rozumowanie kawalera de Méré:

- Szansa podwójnej jedynki (1/36) jest sześciokrotnie mniejsza niż pojedynczej jedynki (1/6)
- Aby skompensować tę różnice, trzeba więc rzucić dwoma kośćmi sześciokrotnie więcej razy niż pojedynczą kością
- Wniosek: oba powyższe zdarzenia są równo prawdopodobne

Powyższe rozumowanie okazuje się jednak błędne!!!

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi:
  $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- A: „co najmniej jedna jedynka”

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- A: „co najmniej jedna jedynka”
- A': „nie wypadła żadna jedynka”

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- A: „co najmniej jedna jedynka”
- A': „nie wypadła żadna jedynka” $|A'| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4, \qquad P(A') = \frac{5^4}{6^4}$

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi:
  $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- A: „co najmniej jedna jedynka"
- A': „nie wypadła żadna jedynka"
  $|A'| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4, \qquad P(A') = \frac{5^4}{6^4}$
- Stąd:

$$P(A) \;=\; 1 - P(A') \;=\; 1 - \frac{5^4}{6^4} \;\simeq\; 0.5177$$

Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 2:

- Ω: wszystkie możliwe wyniki 24 rzutów dwoma kośćmi: $|\Omega| = 36^{24}$
- A: „co najmniej jedna podwójna jedynka"
- A': „nie wypadła żadna podwójna jedynka" $|A'| = 35^{24}, \qquad P(A') = \frac{35^{24}}{36^{24}}$
- Stąd:

$$P(A) \;=\; 1 - P(A') \;=\; 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \;\simeq\; 0.4914$$

Totolotek

Zadanie 1

Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?

Rozwiążemy teraz najprostszy przypadek „szóstki”

Totolotek

Zadanie 1

Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?

Rozwiążemy teraz najprostszy przypadek „szóstki”

Ω – liczba 6-elementowych podzbiorów 49-elementowego zbioru

Totolotek

Zadanie 1

Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?

Rozwiążemy teraz najprostszy przypadek „szóstki”

Ω – liczba 6-elementowych podzbiorów 49-elementowego zbioru

$$|\Omega| = \binom{49}{6}$$

Totolotek

Zadanie 1

Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?

Rozwiążemy teraz najprostszy przypadek „szóstki”

Ω – liczba 6-elementowych podzbiorów 49-elementowego zbioru

$$|\Omega| = \binom{49}{6}$$

Zdarzenie A – „szóstka”

Totolotek

Zadanie 1

Jaka jest szansa trafienia „szóstki" w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki"? „czwórki"? „trójki"?

Rozwiążemy teraz najprostszy przypadek „szóstki"

Ω – liczba 6-elementowych podzbiorów 49-elementowego zbioru

$$|\Omega| = \binom{49}{6}$$

Zdarzenie A – „szóstka"

$$|A| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad P(A) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{6!43!}{49!} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Niewiele
(stąd granie w totolotka zwane jest czasem „podatkiem od marzeń")

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

- Liczba możliwych wyników doświadczenia: $|\Omega| =$

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

- Liczba możliwych wyników doświadczenia: $|\Omega| = 365^{23}$
- Zdarzenie A – „co najmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia"

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

- Liczba możliwych wyników doświadczenia: $|\Omega| = 365^{23}$
- Zdarzenie A – „co najmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia"
- Zdarzenie A' – „wszyscy urodzili się innego dnia"

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

- Liczba możliwych wyników doświadczenia: $|\Omega| = 365^{23}$
- Zdarzenie A – „co najmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia"
- Zdarzenie A' – „wszyscy urodzili się innego dnia"

$$|A'| \;=\; 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 22)$$

Paradoks urodzin

Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla prostoty załóż 365 dni w roku)

- Liczba możliwych wyników doświadczenia: $|\Omega| = 365^{23}$
- Zdarzenie A – „co najmniej dwie osoby urodzone tego samego dnia"
- Zdarzenie A' – „wszyscy urodzili się innego dnia"

$$|A'| \;=\; 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - 22)$$

- Stąd:

$$P(A') \;=\; \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots 343}{365^{23}} \simeq 0.493 \qquad P(A) \;=\; 1 - P(A') \simeq 0.507$$

- Prawdopodobieństwo jest zaskakująco duże (wynosi ponad 50%)!
- Bezpośrednie zastosowanie do wyznaczania prawdopodobieństwa kolizji funkcji haszujących

Kombinatoryka: zadania

Zadanie 2

Ile słów można utworzyć ze słowa BABA zmieniając kolejność liter? A ile ze słowa BARBARA?

Kombinatoryka: zadania

Zadanie 3

Załóżmy, że 10 osób obecnych w restauracji zamówiło w tym samym czasie 10 różnych dań. Niestety roztrzepany kelner zapisał tylko nazwy dań, ale nie zapisał kto co zamawiał. Po przygotowaniu potraw postanowił je więc rozdać gościom restauracji w sposób całkowicie losowy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: (a) dany gość restauracji otrzyma swoje własne danie; (b) para osób siedząca przy danym stoliku otrzyma dania, które zamawiała; (c) wszyscy goście otrzymali swoje własne dania.

Kombinatoryka: zadania

Zadanie 4

W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono arbitralnie i losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: (a) w danej (np. pierwszej) ławce siedzą dziewczynka i chłopiec; (b) w danej ławce siedzą dwie dziewczynki; (c) we wszystkich ławkach siedzą mieszane pary, tzn. dziewczynka i chłopiec.

Zadanie 5

Przy okrągłym stole z 20 krzesłami rozsadzono 10 małżeństw w sposób całkowicie losowy. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: (a) dany mąż (np. mąż z pierwszego z małżeństw) siedzi obok swojej żony; (b) dany mąż siedzi pomiędzy dwoma innymi mężami; (c) wszystkie małżeństwa siedzą obok siebie.

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Zastosowanie zasady nierozróżnialności do zbiorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$
- Całkowita analogia do prawdopodobieństwa klasycznego, ale:
  - zdarzenia elementarne to punkty w $\mathbb{R}^n$,
  - zdarzenia to zbiory w $\mathbb{R}^n$
  - miarą wielkości zbioru jest (zamiast liczności) jego długość ($n = 1$), pole powierzchni ($n = 2$), objętość ($n = 3$), itp.
- Idea prawdopodobieństwa geometrycznego pojawia się już u Newtona w l. 1666-1668

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, niech $|A|$ oznacza jego n-wymiarową miarę (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.)

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, niech $|A|$ oznacza jego n-wymiarową miarę (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.)
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy czym $|\Omega| < \infty$
- Zdarzenia $A \subset \Omega$ to podzbiory Ω

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, niech $|A|$ oznacza jego *n-wymiarową miarę* (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.)
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy czym $|\Omega| < \infty$
- Zdarzenia $A \subset \Omega$ to podzbiory Ω
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, niech $|A|$ oznacza jego n-wymiarową miarę (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.)
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy czym $|\Omega| < \infty$
- Zdarzenia $A \subset \Omega$ to podzbiory Ω
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Interpretacja:
  - Pr. klasyczne: „każdy element Ω równo prawdopodobny"
  - Pr. geometryczne: „każdy punkt w Ω równo prawdopodobny"

Prawdopodobieństwo geometryczne

- Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$, niech $|A|$ oznacza jego n-wymiarową miarę (długość dla $n = 1$, pole powierzchni dla $n = 2$, objętość dla $n = 3$, itp.)
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, przy czym $|\Omega| < \infty$
- Zdarzenia $A \subset \Omega$ to podzbiory Ω
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

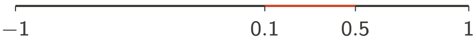
- Interpretacja:
  - Pr. klasyczne: „każdy element Ω równo prawdopodobny"
  - Pr. geometryczne: „każdy punkt w Ω równo prawdopodobny"
- Prawdopodobieństwo geometryczne posiada identyczne własności jak prawdopodobieństwo klasyczne np. $P(\emptyset) = 0$, $P(A') = 1 - P(A)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, itp.

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1, 1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1, 1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?



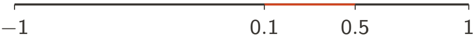
Odpowiedź:

$\Omega = [-1, 1]$, $A = [0.1, 0.5]$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1, 1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?

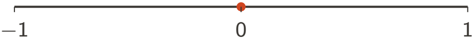


Odpowiedź:

$\Omega = [-1, 1]$, $A = [0.1, 0.5]$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że trafimy w punkt zero?



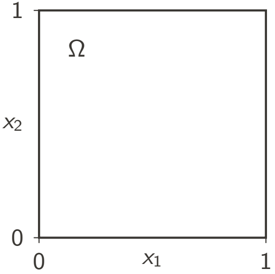
$A = \{0\}, \quad P(A) = \frac{0}{2} = 0$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Z jednostkowego odcinka $[0, 1]$ losujemy dwa punkty x_1 i x_2. Jaka jest szansa, że $x_1 > x_2$?

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Z jednostkowego odcinka $[0,1]$ losujemy dwa punkty x_1 i x_2. Jaka jest szansa, że $x_1 > x_2$?

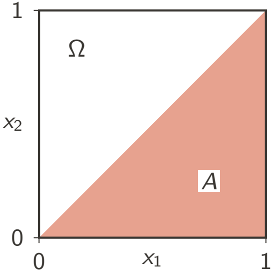


Przestrzeń zdarzeń elementarnych: zbiór par (x_1, x_2)

$$\Omega = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Z jednostkowego odcinka $[0,1]$ losujemy dwa punkty x_1 i x_2. Jaka jest szansa, że $x_1 > x_2$?



Przestrzeń zdarzeń elementarnych: zbiór par (x_1, x_2)

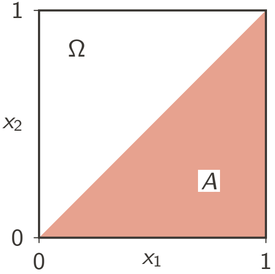
$$\Omega = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$$

Interesujące nas zdarzenie:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \Omega\colon x_1 > x_2\}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Z jednostkowego odcinka $[0, 1]$ losujemy dwa punkty x_1 i x_2. Jaka jest szansa, że $x_1 > x_2$?



Przestrzeń zdarzeń elementarnych: zbiór par (x_1, x_2)

$$\Omega = [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$$

Interesujące nas zdarzenie:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \Omega \colon x_1 > x_2\}$$

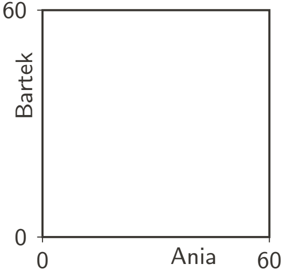
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Ania i Bartek umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Ania i Bartek umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?

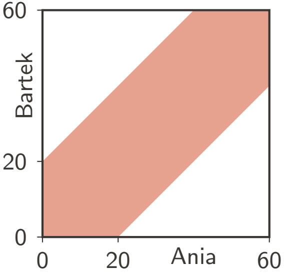


Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Ani i Bartka licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Ania i Bartek umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?



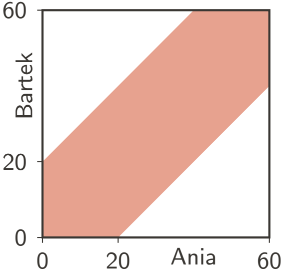
Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Ani i Bartka licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$A = \{(x, y) \in \Omega \colon |x - y| \leqslant 20\}$ (kolorowy obszar)

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Ania i Bartek umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?



Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Ani i Bartka licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$A = \{(x, y) \in \Omega \colon |x - y| \leqslant 20\}$ (kolorowy obszar)

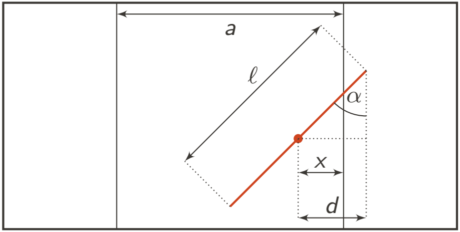
$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{40 \times 40}{60 \times 60} = \frac{5}{9}.$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



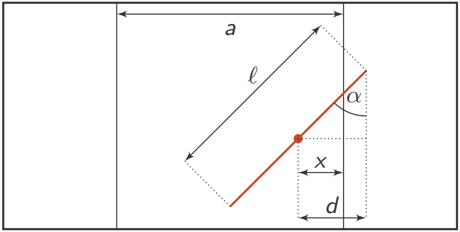
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



Zdarzenie elementarne to para (x, α):

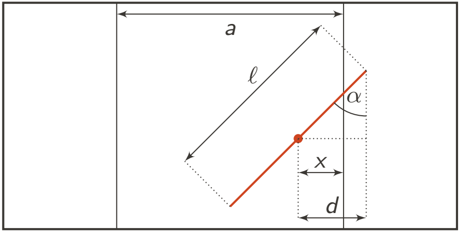
x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

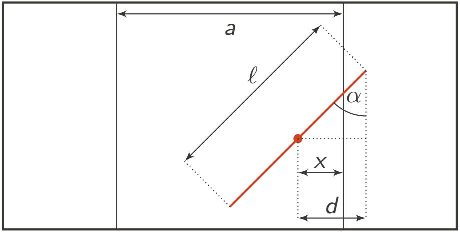
α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



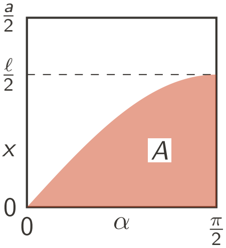
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

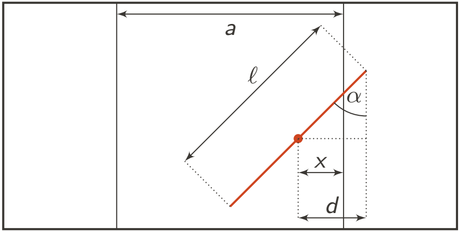
$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)



Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



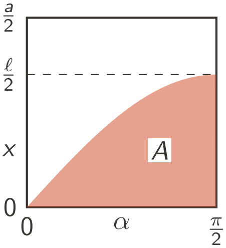
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

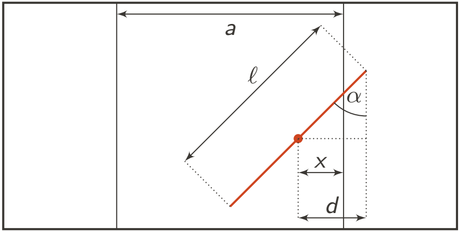
Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{a\pi} \frac{\ell}{2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \, \mathrm{d}\alpha}_{=1} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



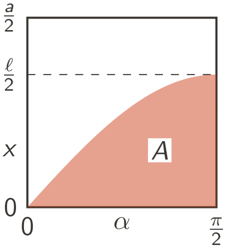
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{a\pi} \frac{\ell}{2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \, \mathrm{d}\alpha}_{=1} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

Jeśli $\ell = \frac{a}{2}$, $P(A) = \frac{1}{\pi}$. Może posłużyć do eksperymentalnego wyznaczenia liczby π!

Prawdopodobieństwo geometryczne: zadania

Zadanie 6

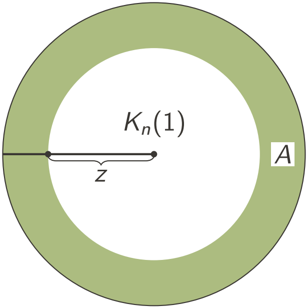
Na przystanku zatrzymują się 3 autobusy, każdy przyjedzie w losowym czasie między 0 a 15 minut. Jaka jest szansa, że będziemy czekać na pierwszy autobus krócej niż 5 minut?

Prawdopodobieństwo geometryczne: zadania

Zadanie 7

Zdefiniujmy *n-wymiarową kulę o promieniu r* jako zbiór:

$$K_n(r) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant r\right\}$$



Jaka jest szansa, że losowy wybrany punkt z $K_n(1)$ (kuli o promieniu 1) znajdzie się w odległości większej niż z od środka?

Wskazówka: objętość n-wymiarowej kuli o promieniu r wyraża się wzorem:

$$|K_n(r)| = C_n r^n,$$

gdzie C_n jest pewną stałą zależną od wymiaru ($C_1 = 2$, $C_2 = \pi$, $C_3 = \frac{4}{3}\pi$, ...)