Imię i nazwisko: .... Nr indeksu: .... Data:

Analiza matematyczna i algebra liniowa — Kolokwium I Przykładowe

1| Korzystając z definicji granicy, udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+n} = 0.$$

$$\left|\frac{2}{1+n} - 0\right| < \epsilon \iff n > \frac{2}{\epsilon} + 1.$$

Czyli bierzemy $n_0 = \left\lceil \frac{2}{\epsilon} + 1 \right\rceil$, wtedy dla wszystkich $n > n_0$, zachodzi $\left|\frac{2}{1+n} - 0\right| < \epsilon$.

2| Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów, wyznacz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+4n+2} - 2n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+4n+2} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+4n+2}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{\sqrt{4n^2+4n+2}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+2} = \frac{4}{2} = 2.$$

3| Uzasadnij, że podana granica funkcji nie istnieje:

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$$

Pokazać, że granica lewostronna jest równa 1, a prawostronna jest równa −1. Lub wziąć dwa ciągi, $x_n \to 1$ oraz $y_n \to 1$, takie że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n-1|}{x_n-1} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|y_n-1|}{y_n-1} = -1.$$

Przykład: $x_n = \frac{1}{n}+1$, $y_n = -\frac{1}{n}+1$.

4| Korzystając z definicji pochodnej udowodnij, że:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta}-\sqrt{x}}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{x+\Delta-x}{(\sqrt{x+\Delta}+\sqrt{x})\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5| Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})+e^{-x}e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = -\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

6| Używać reguły de L'Hospitala wyznacz granicę:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3(1+x^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.$$

7| Wyznacz ekstrema funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \vee -2, \qquad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

Czyli $f''(2) > 0$ i $f''(-2) < 0$. Wniosek: minimum w $x = 2$ i maksimum w $x = -2$.

8 Oblicz całkę nieoznaczoną:

$$\int x^2 \sin x dx$$

Przez części:

$$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

9 Oblicz całkę oznaczoną:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{(x^2-4)dx}{\sqrt{x+2}}$$

Liczymy wpierw całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{(x^2-4)dx}{\sqrt{x+2}} = \left| \begin{array}{c} u = x+2 \\ du = dx \end{array} \right| = \int \frac{((u-2)^2-4)du}{\sqrt{u}} = \int \frac{(u^2-4u)du}{\sqrt{u}} = \int u^{\frac{3}{2}} du - 4\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}.$$

Następnie całkę oznaczoną:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{(x^2-4)dx}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{-1} = \frac{2}{5} - \frac{8}{3} = \frac{-34}{15}$$