Imię i nazwisko: .... Nr indeksu: .... Data:

Analiza matematyczna i algebra liniowa — Przykładowe kolokwium z algebry liniowej

1 | Rozwiąż równanie różniczkowe ze względu na funkcję $y(x)$:

$$\frac{1}{x^2}y' + y = 0$$

z warunkiem początkowym $y(0) = 1$.

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -x^2\,\mathrm{d}x \iff \ln y = -\frac{1}{3}x^3 + C \iff y = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

Aby wyznaczyć stałą C, podstawiamy $1 = y(0) = Ce^0 = C$, skąd wynika, że $C = 1$. A więc rozwiązaniem równania z podanym warunkiem początkowym jest $y = e^{-\frac{1}{3}x^3}$.

2 | Wykonaj działanie, przedstawiając wynik w postaci liczby zespolonej:

$$\frac{1+2i}{1-i} + (1+i)^2$$

$$\frac{1+2i}{1-i} + (1+i)^2 = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + 1 + 2i - 1 = \frac{3i-1}{2} + 2i = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

3 | Rozwiąż równanie:

$$z^2 + \overline{z} + 1 = 0$$

Postawiamy $z = x + iy$, gdzie x, y to liczby rzeczywiste. Dostajemy równanie:

$$x^2 + 2ixy - y^2 + x - iy + 1 = 0,$$

które rozbijają się na dwa:

$$x^2 - y^2 + x + 1 = 0, \qquad 2xy - y = 0.$$

Z drugiego z równań dostajemy, że $y = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$. Jeśli podstawimy $y = 0$ do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

które nie ma rozwiązania dla rzeczywistego x (ujemna delta). Jeśli podstawimy $x = \frac{1}{2}$ do pierwszego równania, dostajemy:

$$y^2 = \frac{7}{4},$$

które ma dwa rozwiązania $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$ lub $y = -\frac{\sqrt{7}}{2}$. Czyli ostatecznie mamy dwa rozwiązania: $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$, $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

4 | Zapisz liczbę zespoloną z w postaci trygonometrycznej i wykładniczej i oblicz z^8:

$$z = 1 - i.$$

Obliczamy moduł $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Następnie obliczamy $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, oraz $\sin\varphi = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Z tego wnioskujemy, że kąt $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (czyli -45 stopni).

Postać trygonometryczna: $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Postać wykładnicza: $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Następnie liczymy $z^8 = \sqrt{2}^8 e^{-i8\frac{\pi}{4}} = 16e^{-i2\pi} = 16e^{i0} = 16$, gdzie wykorzystaliśmy fakt, że kąt -2π jest taki sam jak kąt 0.

5 | Rozwiąż równanie macierzowe ze względu na X:

$$2(X + AB) = C^\top$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}C^\top - AB = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -21 \end{bmatrix}$$

6 | Oblicz wyznacznik macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokonujemy następujących przekształceń elementarnych: $w_2 := w_2 - 2w_1$, $w_3 := w_3 - 3w_1$, $w_4 := w_4 - 4w_1$, $w_5 := w_5 - 5w_1$. Żadne z przekształceń nie zmienia wyznacznika. Czyli:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Teraz znowu dokonujemy po kolei przekształceń: $w_1 := w_1 + \frac{1}{2}w_2$, $w_1 := w_1 + \frac{1}{3}w_3$, $w_1 := w_1 + \frac{1}{4}w_4$ $w_1 := w_1 + \frac{1}{5}w_5$. Żadne z przekształceń nie zmienia wyznacznika. Czyli:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz trójkątna dolna, której wyznacznik jest równy iloczynowi elementów na diagonali. Stąd:

$$\det A = 4 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = 480.$$

7 | Wyznacz macierz odwrotną:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Używając albo metody wyznacznikowej, albo doklejając macierz jednostkową i wykonując operacje elementarne:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

8 | Rozwiąż układ równań

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 1, \\ -4x & - & 12y & + & z & = & 2, \\ 3x & + & 3y & - & z & = & 3. \end{array}$$

Układ ma postać: $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & -12 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Można to rozwiązać na parę sposobów, np. odwracając macierz A, dokonując sklejenia macierzy A z B i robiąc operacje elementarne, lub metodą wyznacznikową. Tutaj rozwiążemy to tą ostatnią metodą. Mamy:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -12 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & -12 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$\det A = 43, \quad \det A_1 = 46, \quad \det A_2 = -29, \quad \det A_3 = -78.$$

Stąd:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \det A_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} 46 \\ -29 \\ -78 \end{bmatrix},$$

czyli $x = \frac{46}{43}$, $y = \frac{-29}{43}$, $z = \frac{-78}{43}$.