Analiza matematyczna i algebra liniowa
Liczby zespolone

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:40

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

10.05.2019

Definicja liczby zespolonej

Definicja

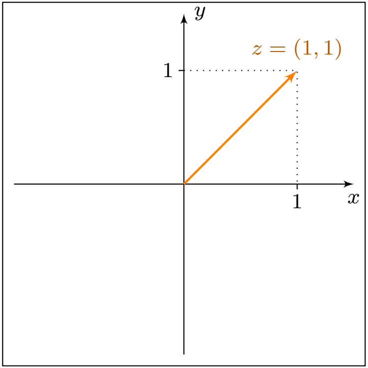
Liczba zespolona z to para liczb rzeczywistych, $z = (x, y)$.

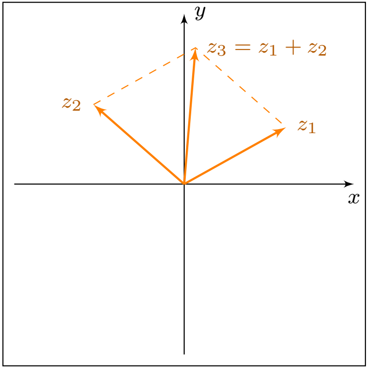
Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$: płaszczyzna zespolona.

Dla dowolnych $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ definiujemy:

- Dodawanie: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
- Mnożenie: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Płaszczyzna zespolona





Własności działań w zbiorze liczb zespolonych

- Dodawanie jest przemienne: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
- Dodawanie jest łączne: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
- Liczba $\mathbf{0} = (0, 0)$ spełnia $z + \mathbf{0} = z$ dla dowolnego z.
- Dla każdego $z = (x, y)$ liczba przeciwna $-z = (-x, -y)$, zachodzi $z + (-z) = \mathbf{0}$ (możemy wprowadzić odejmowanie).
- Mnożenie jest przemienne $z_1 z_2 = z_2 z_1$.
- Mnożenie jest łączne $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.
- Liczba $\mathbf{1} = (1, 0)$, spełnia $\mathbf{1} \cdot z = z$ dla dowolnego z.
- Dla każdego $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ liczba odwrotna $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ zachodzi $z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1}$. (możemy wprowadzić dzielenie).
- Rozdzielność mnożenia względem dodawania: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Zbiór liczb rzeczywistych jako podzbiór liczb zespolonych.

Fakt

Zbiór liczb zespolonych postaci $(x, 0)$ możemy utożsamić ze zbiorem liczb rzeczywistych.

- $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
- $(x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0)$
- $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$
- $\frac{(x_1,0)}{(x_2,0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0\right)$, $x_2 \neq 0$.

Postać algebraiczna liczby zespolonej

Jednostka urojona

$$i = (0, 1)$$

Każdą liczbę zespoloną można zapisać teraz w postaci algebraicznej:

$$z = x + iy.$$

Liczba x jest częścią rzeczywistą, co zapisujemy $x = \mathrm{Re} z$, a liczba y jest częścią urojoną, co zapisujemy $y = \mathrm{Im} z$.

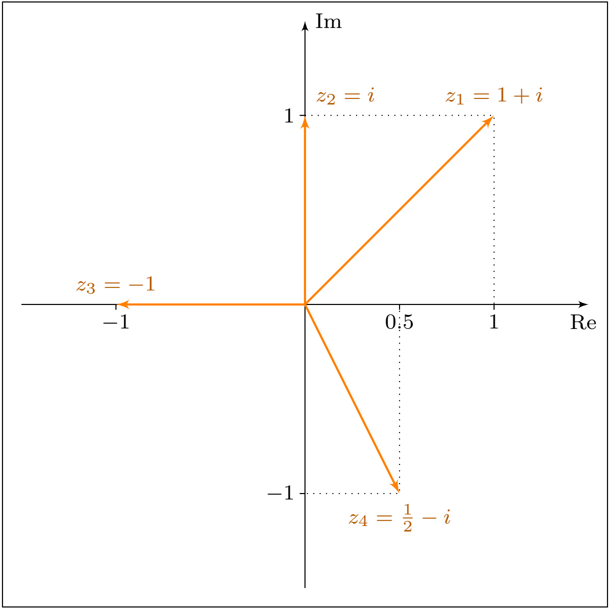
Zachodzi:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Czyli w postaci algebraicznej $i^2 = -1$.

Używając tej zasady możemy teraz mnożyć liczby zespolone bez pamiętania wzoru.

Postać algebraiczna



Sprzężenie liczby zespolonej

Definicja

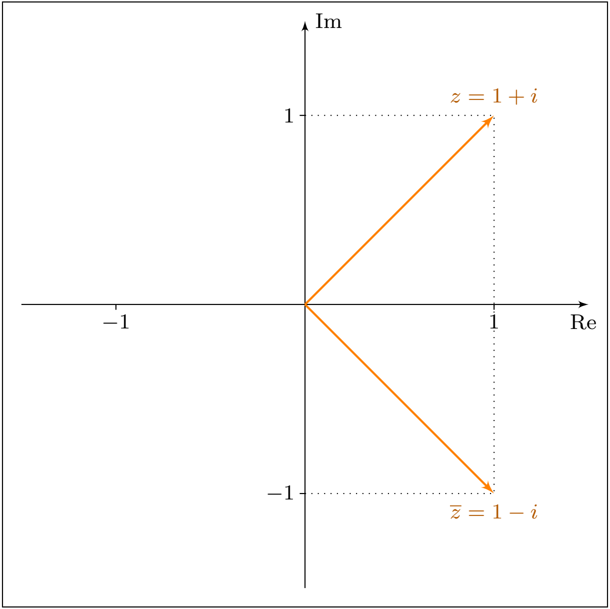
Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę:

$$\overline{z} = x - iy.$$

Zachodzi:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Sprzężenie liczby zespolonej



Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Moduł liczby zespolonej

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zachodzi

- $|\overline{z}| = |z| = |-z|$.
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Argument liczby zespolonej

Argument liczby zespolonej $z = x + iy$, oznaczany przez $\arg z$, jest to kąt, jaki liczba zespolona na płaszczyźnie tworzy z osią liczb rzeczywistych.

Moduł i argument jednoznacznie wyznaczają nam liczbę zespoloną.

Jeśli oznaczymy $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$, to możemy zapisać:

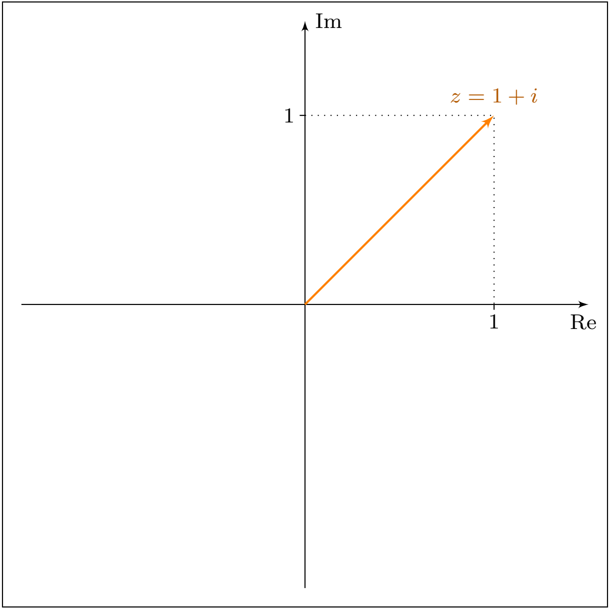
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Działania na liczbach w postaci trygonometrycznej

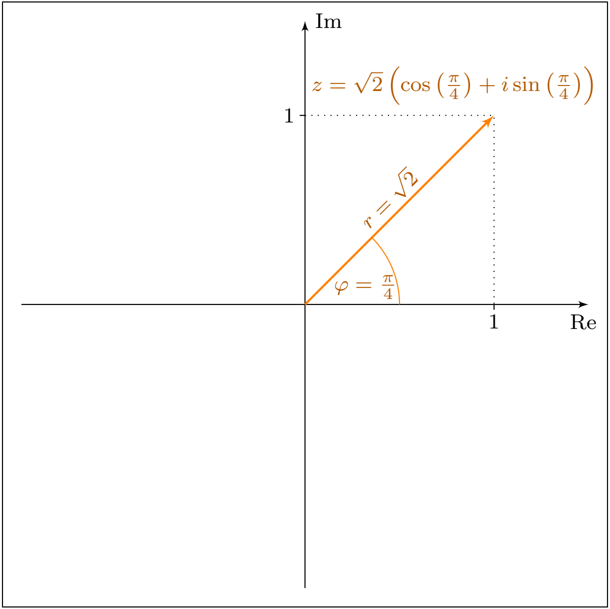
Dla $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.
- $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

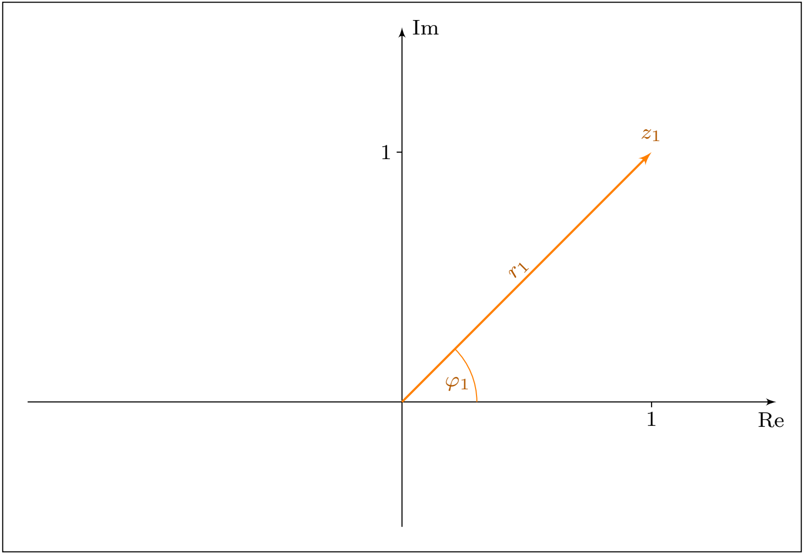
Postać trygonometryczna



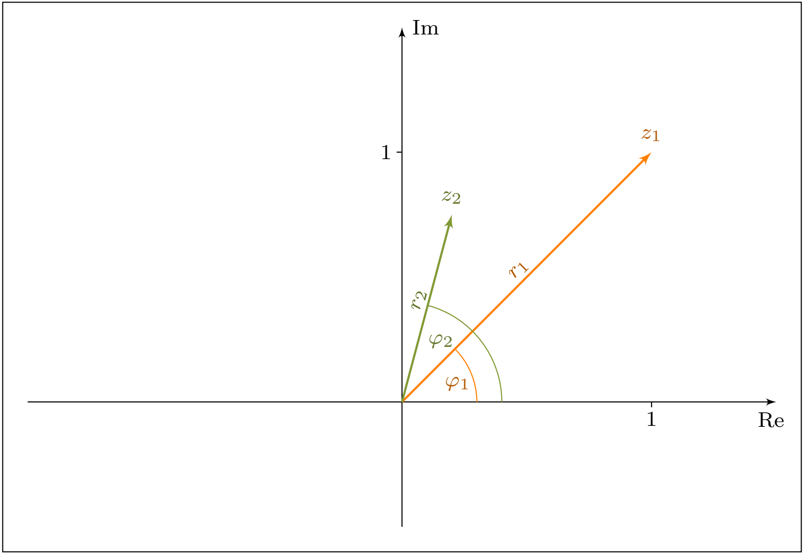
Postać trygonometryczna



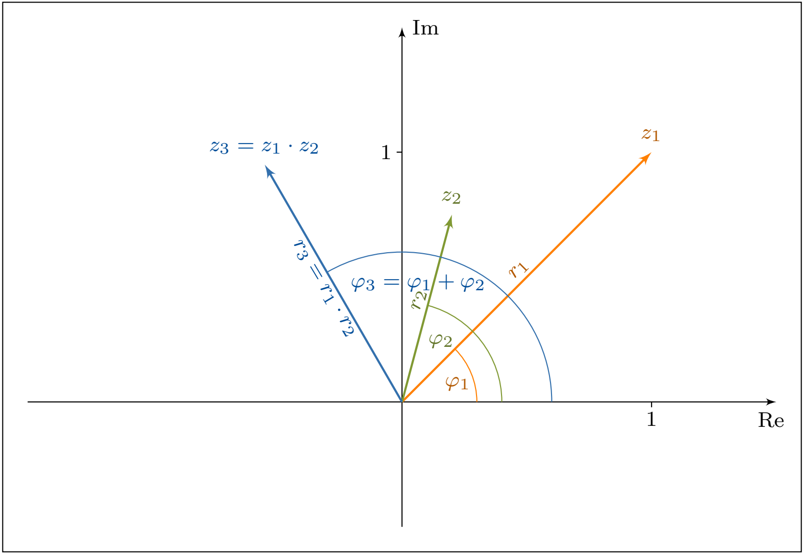
Mnożenie liczb zespolonych



Mnożenie liczb zespolonych



Mnożenie liczb zespolonych



Postać wykładnicza

Definicja

Liczbę zespoloną $\cos\varphi + i\sin\varphi$ o module 1 oznaczamy:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Zachodzi:

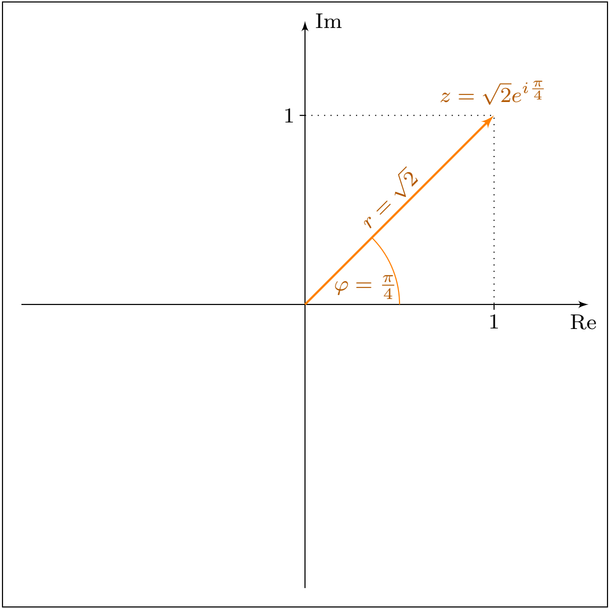
- $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$.
- $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$.
- $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$.
- $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\varphi}$.
- $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$.

Dowolna liczba zespolona może zostać zapisana jako:

$$z = re^{i\varphi},$$

gdzie $r = |z|$.

Postać wykładnicza



Postać wykładnicza

Działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej

Jeśli $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ to:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.
- $z^n = r^n e^{in\varphi}$.
- $\overline{z} = re^{-i\varphi}$.
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$.
- $-z = -re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + \pi)}$.

Pierwiastkowanie liczby zespolonej

Definicja

Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą $w^n = z$.

Każda liczba zespolona ma dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia. Przykłady:

- $\sqrt{4} = \{-2, 2\}$.
- $\sqrt{-1} = \{-i, i\}$.
- $\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$.