Analiza matematyczna i algebra liniowa
Elementy równań różniczkowych

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

15.04.2019

Definicja równania różniczkowego

Definicja równania różniczkowego n-tego rzędu

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Równanie które łączy w sobie argument x, funkcję $y(x)$, i jej pochodne.

Rozwiązaniem takie równania jest funkcja.

Będziemy się zajmować tylko równaniami pierwszego rzędu.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0.$

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = \int f(x)dx$.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = \int f(x)dx$.
3. $y'(x) = ky(x)$.
   Równanie Malthusa (1798):
   - y – wielkość populacji,
   - wzrost populacji proporcjonalny do jej rozmiaru.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = \int f(x)dx$.
3. $y'(x) = ky(x)$.
   Równanie Malthusa (1798):
   - y – wielkość populacji,
   - wzrost populacji proporcjonalny do jej rozmiaru.

   Zgadujemy rozwiązanie: $y(x) = Ce^{kx}$.

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = \int f(x)dx$.
3. $y'(x) = ky(x)$.
   Równanie Malthusa (1798):
   - y – wielkość populacji,
   - wzrost populacji proporcjonalny do jej rozmiaru.

   Zgadujemy rozwiązanie: $y(x) = Ce^{kx}$.
4. $y'(x) = ky(x)(M - y(x))$
   Równanie logistyczne:
   - W stosunku do r. Malthusa dodatkowe ograniczenie zasobów życiowych dla populacji (M).

Przykłady najprostszych równań różniczkowych

1. $y'(x) = 0$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = C$.
2. Ogólniej: $y'(x) = f(x)$.
   Rozwiązaniem jest $y(x) = \int f(x)dx$.
3. $y'(x) = ky(x)$.
   Równanie Malthusa (1798):
   - y – wielkość populacji,
   - wzrost populacji proporcjonalny do jej rozmiaru.

   Zgadujemy rozwiązanie: $y(x) = Ce^{kx}$.
4. $y'(x) = ky(x)(M - y(x))$
   Równanie logistyczne:
   - W stosunku do r. Malthusa dodatkowe ograniczenie zasobów życiowych dla populacji (M).

   Zgadujemy rozwiązanie: $y(x) = \frac{M}{1+e^{-kMx}MC}$.

Postać normalna, zagadnienie początkowe

Postać normalna

Równanie:

$$y' = f(x, y)$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu w postaci normalnej.

Każdą funkcję spełniającą powyższe równanie nazywamy rozwiązaniem równania różniczkowego.

Zagadnienie początkowe

Równanie różniczkowe oraz warunek:

$$y(x_0) = y_0$$

nazywamy zagadnieniem początkowym (Cauchy'ego).

Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem zagadnienia początkowego, jeżeli jest rozwiązaniem równania różniczkowego i spełnia warunek początkowy $y(x_0) = y_0$.

Istnienie i jednoznaczność równania

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ są ciągłe na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $(x_0, y_0) \in D$, to zagadnienie początkowe:

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci:

$$y'(x) = g(x)h(y).$$

Rozwiązanie

Rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= g(x)h(y)\\ dy &= g(x)h(y)dx\\ \frac{dy}{h(y)} &= g(x)dx\\ \int \frac{dy}{h(y)} &= \int g(x)dx.\end{aligned}$$

Równanie różniczkowe jednorodne

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci:

$$y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Rozwiązanie

Rozwiązujemy poprzez zamianę zmiennych:

$$y(x) = u(x)x.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)x + u(x) \\ g\left(\frac{y}{x}\right) &= g(u) \\ u'(x)x &= g(u) - u(x), \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe liniowe

Definicja

Równanie, które można zapisać w postaci:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

Jeśli $q(x) = 0$, to równanie nazywamy jednorodnym, a w przeciwnym wypadku niejednorodnym

Rozwiązanie równania jednorodnego

Rozwiązujemy poprzez rozdzielenie zmiennych:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\ln|y| + C = -\int p(x)dx$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Równanie różniczkowe liniowe

Rozwiązanie równania niejednorodnego

Metoda uzmienniania stałej: Zastępujemy C z równania jednorodnego nieznaną funkcją $v(x)$:

$$y(x) = v(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= v'(x)e^{-\int p(x)dx} - v(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \\ &= \frac{v'(x)}{v(x)}y(x) - p(x)y(x). \end{aligned}$$

Podstawiamy do równania $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$:

$$\frac{v'(x)}{v(x)}y(x) = q(x).$$

Ponieważ $y(x)$ jest znaną funkcją, wyznaczamy nieznaną funkcję $v(x)$ metodą zmiennych rozdzielonych.