Analiza matematyczna i algebra liniowa
Całka oznaczona

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:40

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

08.04.2019

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcja wymierna

Funkcją wymierną nazywamy funkcję:

$$W(x) = \frac{L(x)}{M(x)},$$

gdzie $L(x)$ i $M(x)$ to wielomiany.

Wyróżniamy:

- Funkcję wymierną właściwą, jeżeli stopień $L(x)$ jest mniejszy niż stopień $M(x)$.
- Funkcję wymierną niewłaściwą, jeżeli stopień $L(x)$ jest większy niż stopień $M(x)$.

Każdą funkcję wymierną niewłaściwą można przekształcić na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Całkowanie funkcji wymiernych

Ułamek prosty I rodzaju

$$W(x) = \frac{A}{(x+a)^n}.$$

Całkujemy przed podstawienie $t = x + a$.

Ułamek prosty II rodzaju

$$W(x) = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n},$$

przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$ (nie można rozłożyć mianownika na czynniki).
Pokażemy tylko parę szczególnych przypadków.

Każdą funkcję wymierną da się przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.

Całkowanie funkcji wymiernych

Ułamek prosty II rodzaju

$$W(x) = \frac{Q}{x^2 + q}.$$

Podstawienie $t = x/\sqrt{q}$, oraz użycie wzoru:

$$\int \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Ułamek prosty II rodzaju

$$W(x) = \frac{Q}{x^2 + px + q}.$$

Podstawienie $t = x + \frac{p}{2}$, i sprowadzamy do poprzedniej postaci

Całkowanie funkcji wymiernych

Ułamek prosty II rodzaju

$$W(x) = \frac{Px}{(x^2+q)^n}.$$

Podstawienie $t = x^2 + q$.

Podział odcinka

Definicja

Dzielimy odcinek $[a, b]$ na n części:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

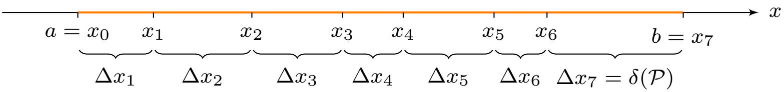
gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Długość k-tego odcinka oznaczamy Δx_k.

W każdym przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ wybieramy też punkt pośredni x_k^*.

Taką procedurę podziału oznaczymy przez $\mathcal{P}$, a $\delta(\mathcal{P})$ będzie największą z długości przedziału Δx_k $(1 \leq k \leq n)$.

Przykład $(n = 7)$:



Podział odcinka

Definicja

Dzielimy odcinek $[a, b]$ na n części:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

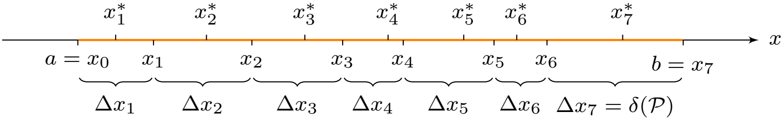
gdzie $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Długość k-tego odcinka oznaczamy Δx_k.

W każdym przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ wybieramy też punkt pośredni x_k^*.

Taką procedurę podziału oznaczymy przez $\mathcal{P}$, a $\delta(\mathcal{P})$ będzie największą z długości przedziału Δx_k $(1 \leq k \leq n)$.

Przykład ($n = 7$):



Suma całkowa

Definicja

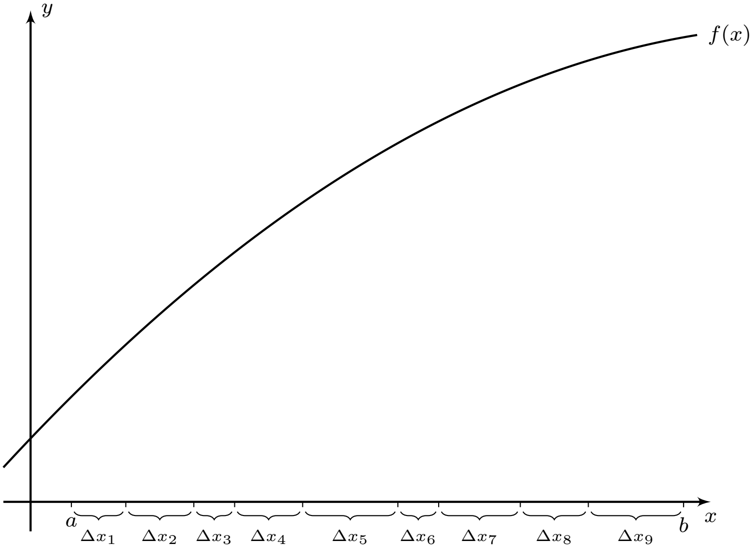
Sumą całkową funkcji f dla podziału $\mathcal{P}$ nazywamy liczbę:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

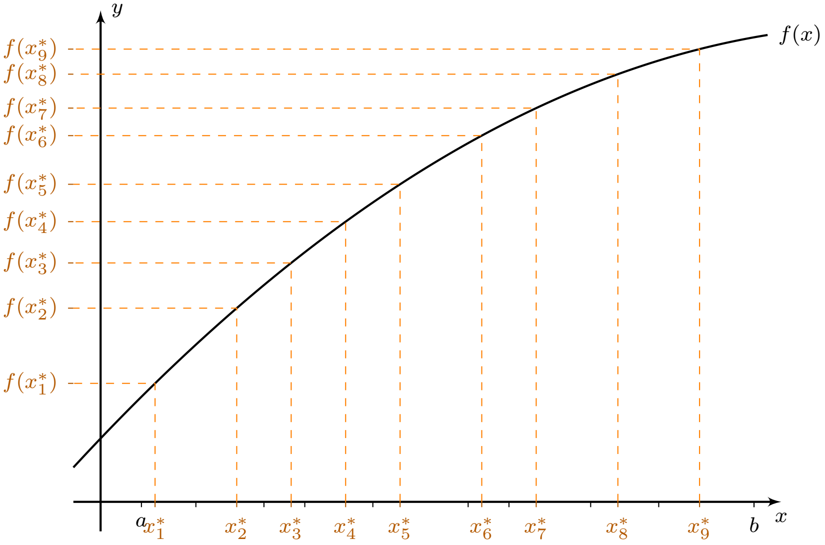
Suma całkowa to przybliżenie pola pod wykresem f na odcinku $[a, b]$.

Uwaga: pole pod wykresem ujemnej części f (tj. tam gdzie $f(x) < 0$) liczone jest ze znakiem minus!

Suma całkowa – przykład

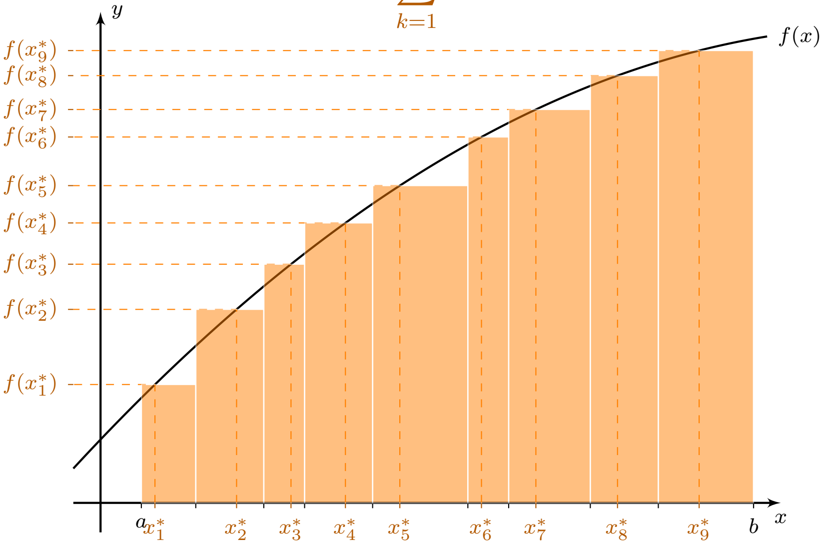


Suma całkowa – przykład



Suma całkowa – przykład

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



Całka oznaczona Riemanna

Definicja

Niech f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całką oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę:

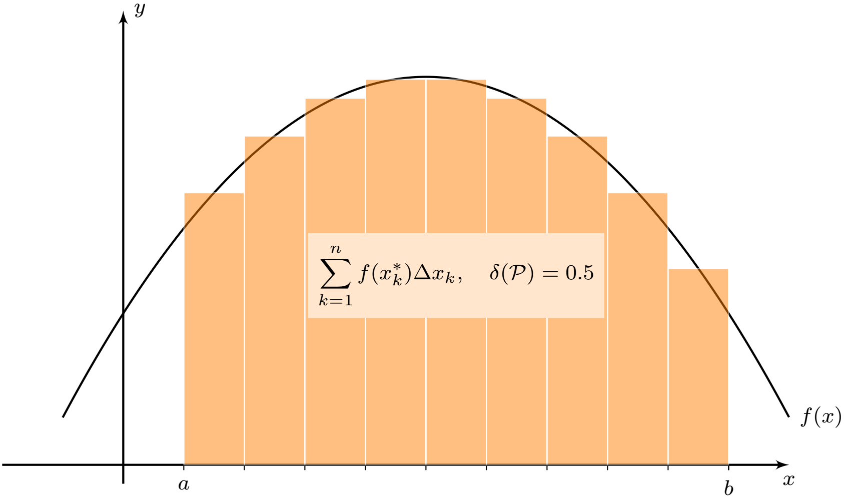
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

o ile granica po prawej stronie istnieje i nie zależy od podziału odcinka $\mathcal{P}$.

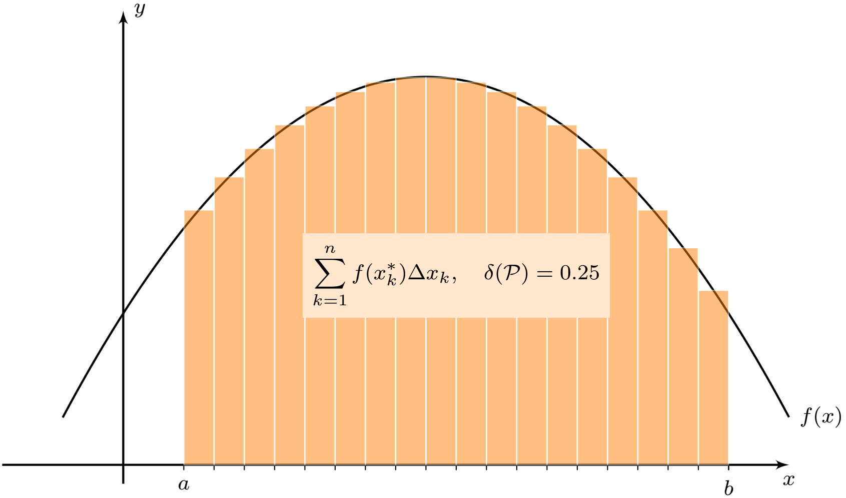
Całka oznaczona Riemanna jest polem pod wykresem f na odcinku $[a, b]$.

Uwaga: pole pod wykresem ujemnej części f (tj. tam gdzie $f(x) < 0$) liczone jest ze znakiem minus!

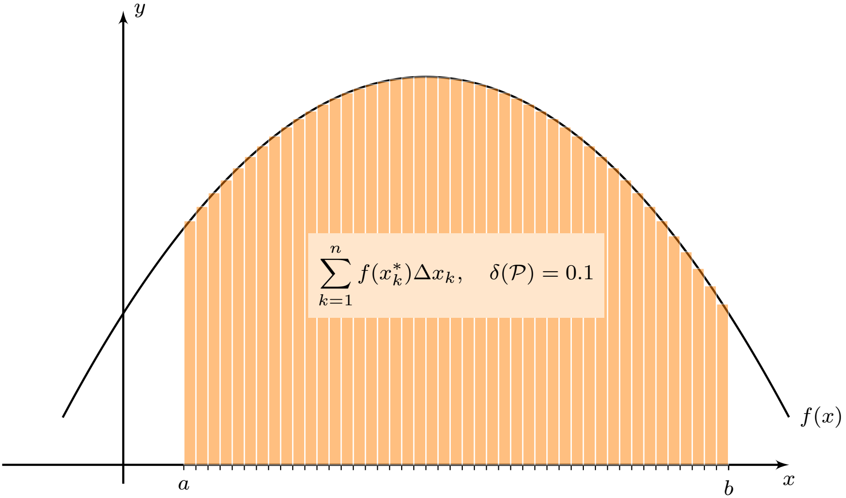
Suma całkowa – przykład



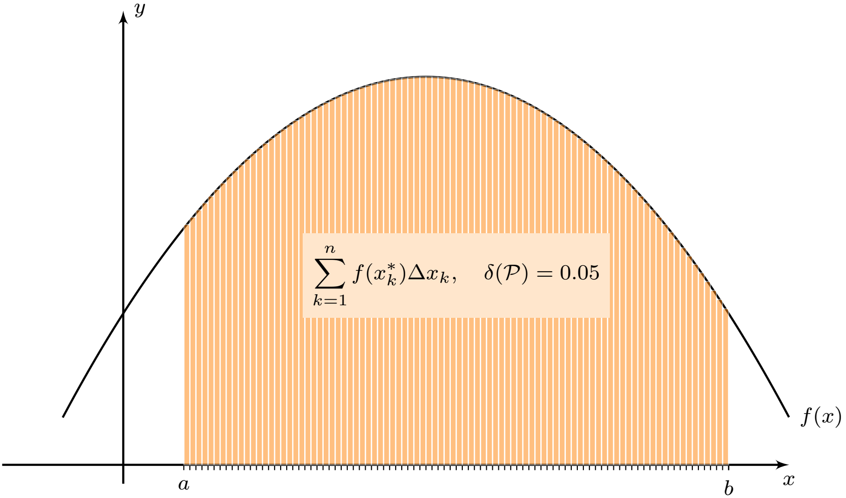
Suma całkowa – przykład



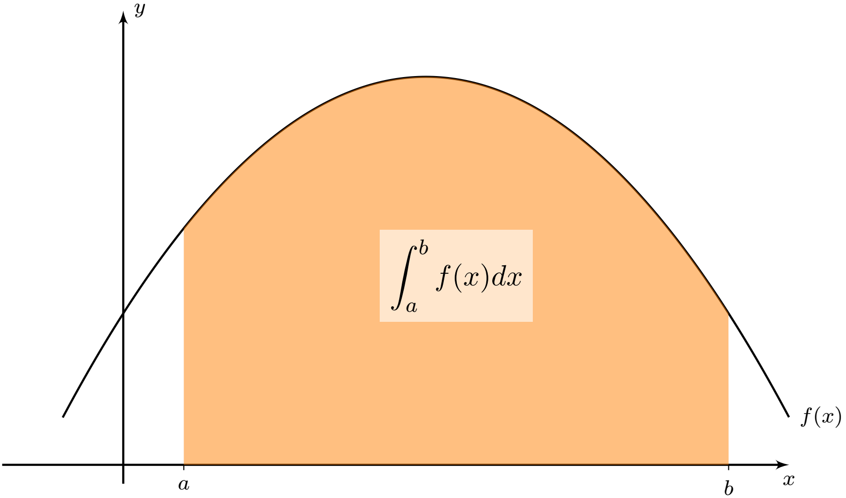
Suma całkowa – przykład



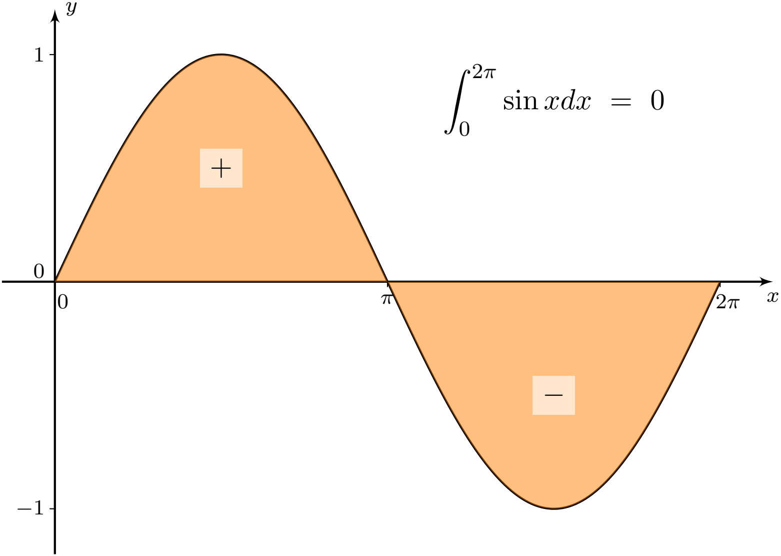
Suma całkowa – przykład



Suma całkowa – przykład



Suma całkowa – przykład



$$\int_0^{2\pi} \sin x dx \ = \ 0$$

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Twierdzenie

Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

gdzie F jest funkcją pierwotną f.

Będziemy często używać oznaczenia:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Twierdzenia o całkach oznaczonych

Całkowanie przez części

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

gdzie $\phi(\alpha) = a$ i $\phi(\beta) = b$.

Twierdzenia o całkach oznaczonych

Liniowość całki oznaczonej

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Addytywność względem przedziału całkowania

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$