Analiza matematyczna i algebra liniowa
Badanie zmienności funkcji

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

25.03.2019

Przypomnienie: pochodna a monotoniczność funkcji

Twierdzenie

Niech I oznacza dowolny przedział. Jeśli dla każdego $x \in I$:

- $f'(x) = 0$, to f jest stała na I,
- $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na I,
- $f'(x) \geq 0$, to f jest niemalejąca na I,
- $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na I,
- $f'(x) \leq 0$, to f jest nierosnąca na I,

Przypomnienie: ekstremum lokalne funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i pochodną $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

Punkt, w którym pochodna się zeruje, nazywamy punktem krytycznym.

Przypomnienie: ekstremum lokalne funkcji

I warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i istnieje δ takie, że:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\qquad \text{dla każdego } x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 &\qquad \text{dla każdego } x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{aligned}$$

to funkcja ma w x_0 maksimum lokalne.

Analogiczny warunek zachodzi na minimum lokalnego.

Przypomnienie: ekstremum lokalne funkcji

II warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

Uwaga: Jeśli $f''(x_0) = 0$, to funkcja może mieć w x_0 maksimum, minimum, lub żadne z powyższych.

Asymptoty

Asymptoty pionowe

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f, jeżeli:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \text{lub} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty.$$

Podobnie definiujemy asymptotę pionową prawostronną.

Asymptoty poziome

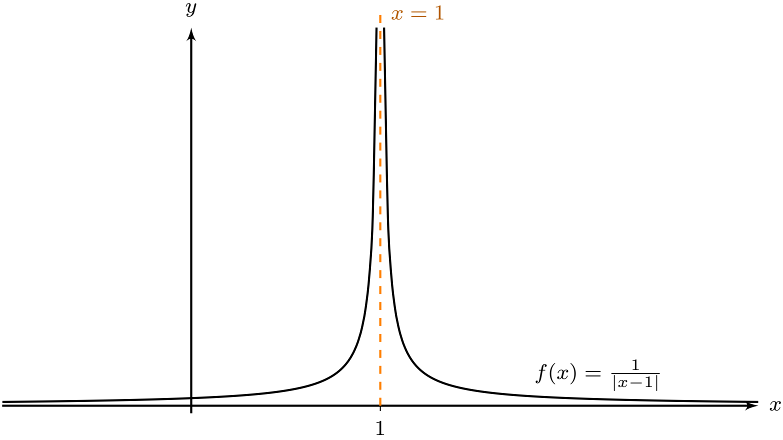
Prosta $y = a$ jest asymptotą poziomą w ∞ funkcji f, jeżeli:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Podobnie definiujemy asymptotą poziomą w $-\infty$.

Asymptoty pionowe – przykład

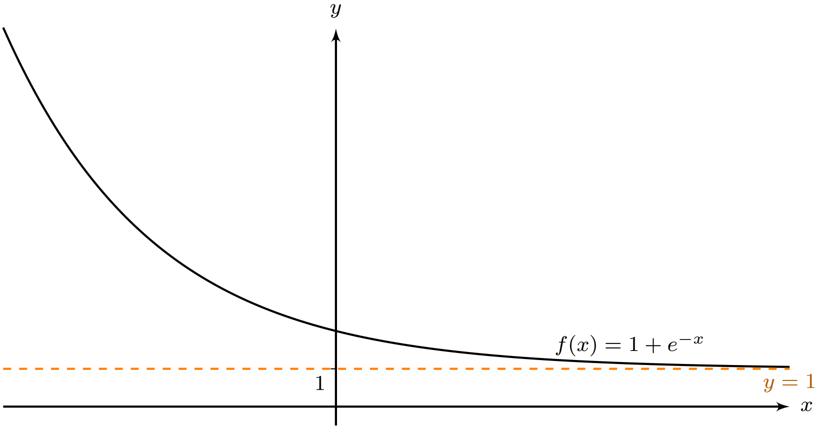
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$$



Asymptota pionowa lewo i prawostronna $x = 1$.

Asymptoty poziome – przykład

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$



Asymptota pozioma $y = 1$ w nieskończoności.

Funkcje wypukłe

Definicja

Funkcja f jest wypukła na przedziale $I \subset D_f$, jeżeli:

$$\forall x_1, x_2 \in I \;\; \forall \lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Czyli: każda sieczna na przedziale I leży nad wykresem funkcji.

Definicja

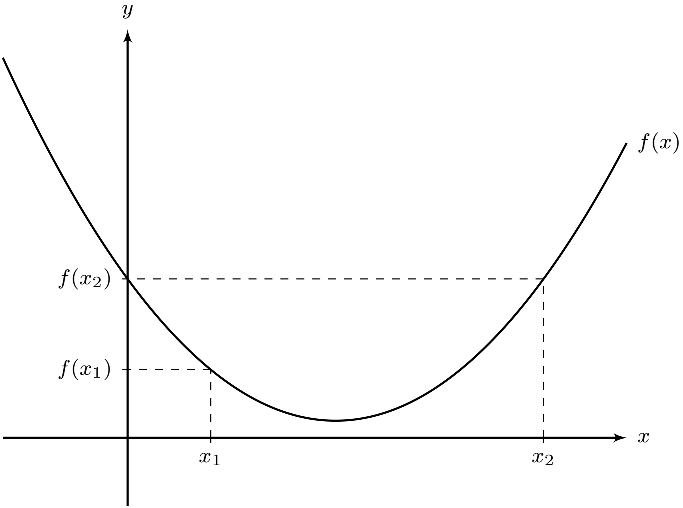
Funkcja f jest wklęsła na przedziale $I \subset D_f$, jeżeli:

$$\forall x_1, x_2 \in I \;\; \forall \lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Czyli: każda sieczna na przedziale I leży pod wykresem funkcji.

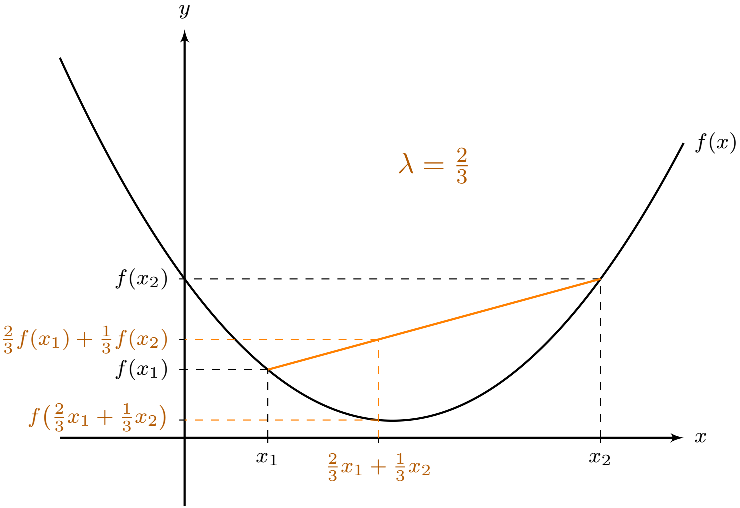
Funkcja wypukła – przykład

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1)$$



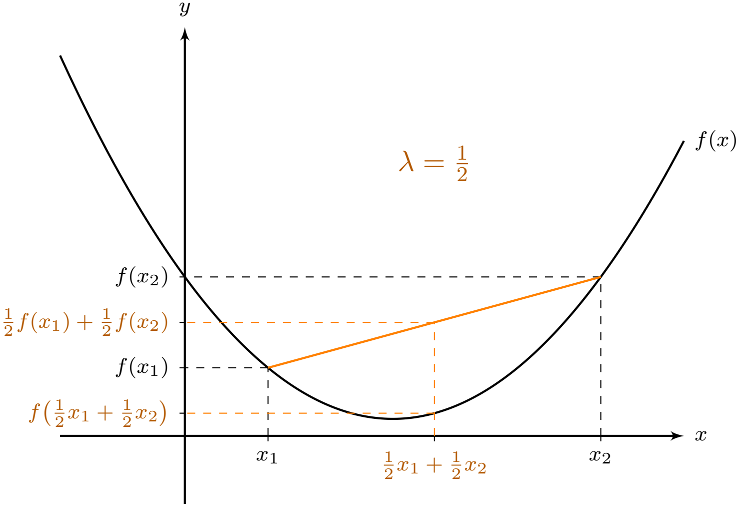
Funkcja wypukła – przykład

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1)$$



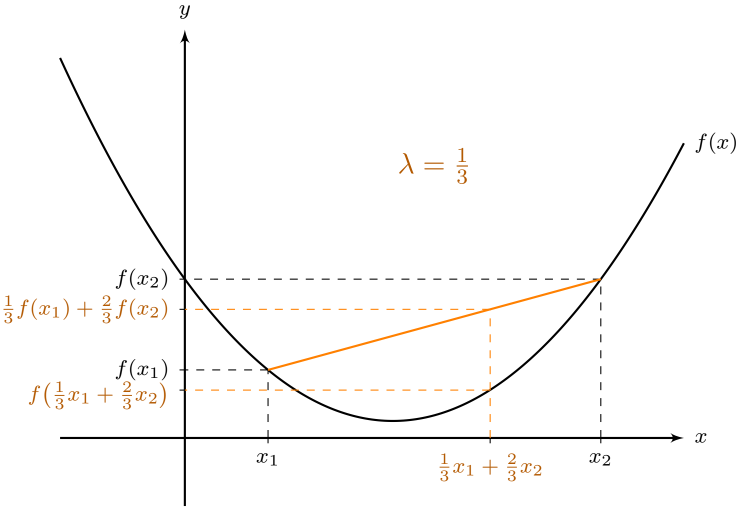
Funkcja wypukła – przykład

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1)$$

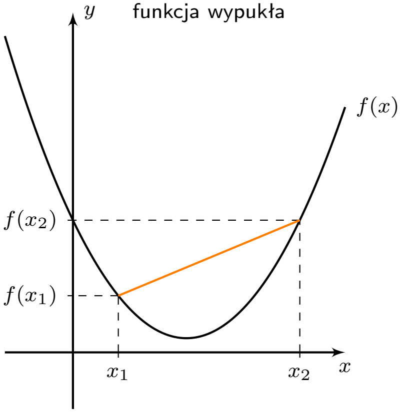


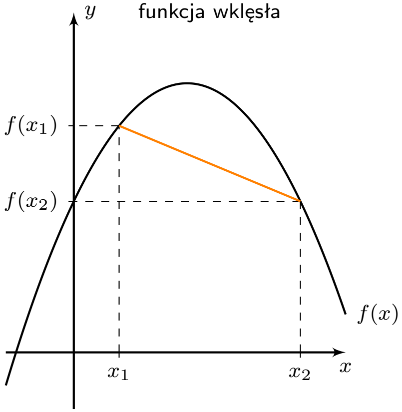
Funkcja wypukła – przykład

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \qquad \lambda \in (0,1)$$



Funkcje wklęsłe i wypukłe – przykłady





Warunek wystarczający wypukłości

Twierdzenie

Niech I będzie przedziałem. Jeśli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia nierówność:

- $f''(x) > 0$, to jest wypukła na I,
- $f''(x) < 0$, to jest wklęsła na I.

Punkt przegięcia

Definicja

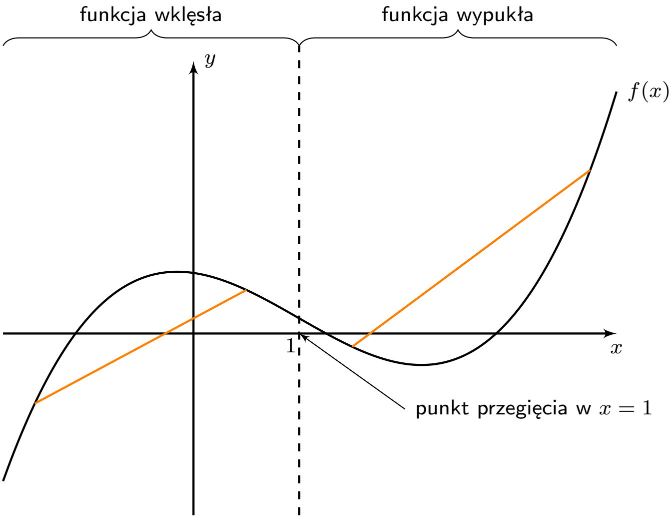
Punkt x_0 nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że funkcja jest wypukła na przedziale $(x_0 - \delta, x_0)$ i wklęsła na przedziale $(x_0, x_0 + \delta)$, lub odwrotnie.

Nieformalnie: punkt przegięcia to miejsce, gdzie funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą lub odwrotnie.

Twierdzenie

Jeśli x_0 jest punktem przegięcia funkcji f i istnieje $f''(x_0)$, to $f''(x_0) = 0$.

Funkcje wklęsłe i wypukłe – przykłady



Podsumowanie

Warunki, które spełniają pochodne		Własność funkcji
$f'(x)$	$f''(x)$	
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$	rosnąca i wypukła
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$	malejąca i wypukła
$f'(x) > 0$	$f''(x) < 0$	rosnąca i wklęsła
$f'(x) < 0$	$f''(x) < 0$	malejąca i wklęsła
$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$	minimum lokalne
$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$	maksimum lokalne
	$f''(x) = 0$	możliwy punkt przegięcia

Badanie zmienności funkcji

1. Ustalenie dziedziny funkcji.
2. Ciągłość.
3. Miejsca zerowe.
4. Asymptoty pionowe.
5. Granice na krańcach dziedziny, asymptoty poziome.
6. Wyznaczenie pierwszej pochodnej: znak (monotoniczność), miejsca zerowania się (punkty krytyczne), granice na krańcach dziedziny.
7. Wyznaczenie drugiej pochodnej: wypukłość/wklęsłość, miejsca zerowania się.
8. Sporządzenie wykresu.