Analiza matematyczna i algebra liniowa
Zastosowania pochodnych funkcji

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

18.03.2019

Pochodne wyższych rzędów

Definicja

Pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie:

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{n-1}\right)'(x_0),$$

gdzie $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Używa się też oznaczenia $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$.

Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie (dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,
- istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Reguła de L'Hospitala

Twierdzenie (dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,
- istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Prawdziwe również dla $-\infty$.

Pochodna a monotoniczność funkcji

Twierdzenie

Niech I oznacza dowolny przedział. Jeśli dla każdego $x \in I$, funkcja f spełnia warunek:

- $f'(x) = 0$, to f jest stała na I,
- $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na I,
- $f'(x) \geq 0$, to f jest niemalejąca na I,
- $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na I,
- $f'(x) \leq 0$, to f jest nierosnąca na I,

Rozwinięcie Taylora funkcji

Definicja

Wielomian:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazywamy Wielomianem Taylora rzędu k funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $P_k(x)$.

Wielomian Taylora coraz lepiej przybliża przebieg funkcji wokół punktu x_0 dla coraz większych k.

Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

Rozwinięcie Taylora funkcji $f(x) = e^x$ w punkcie $x_0 = 0$.

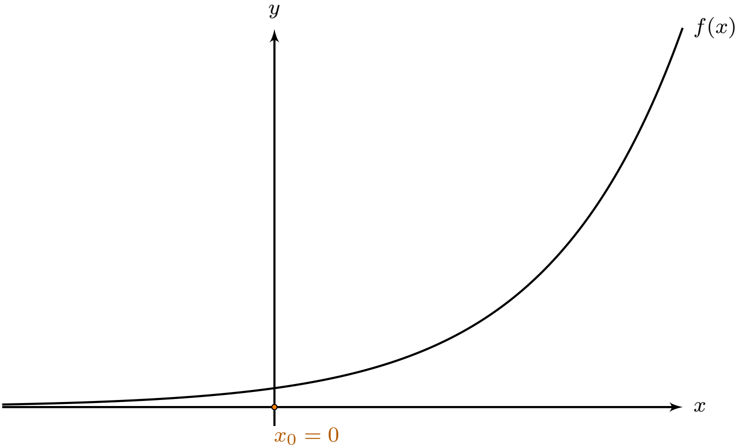
$$f(x) = e^x \qquad f(x_0) = e^0 = 1 \qquad P_0(x) = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(x_0) = e^0 = 1 \qquad P_1(x) = 1 + \frac{1}{1!}x = 1 + x$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(x_0) = e^0 = 1 \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

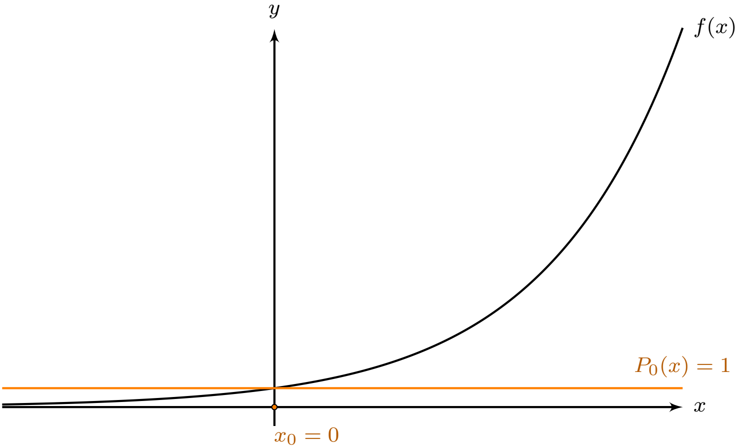
Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$



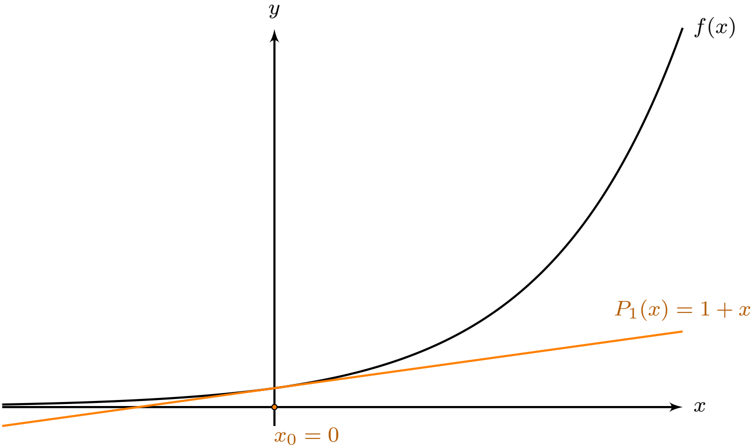
Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$



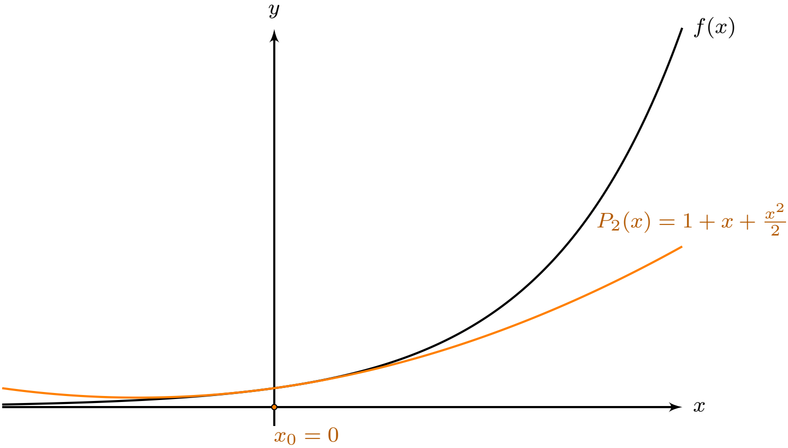
Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$



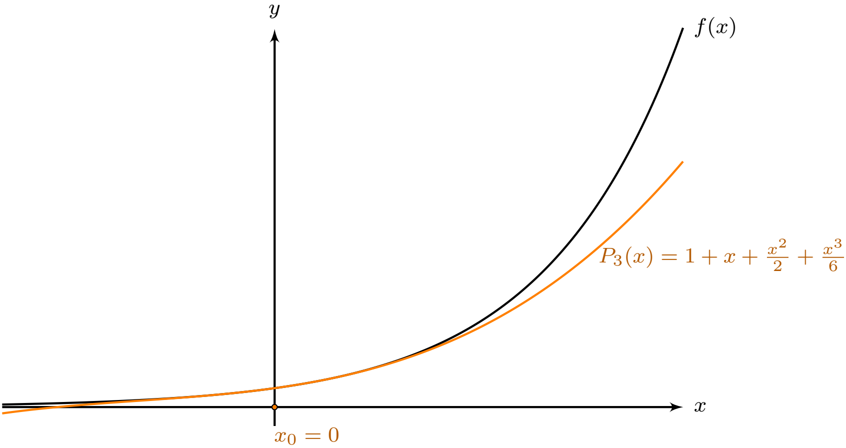
Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$



Rozwinięcie Taylora funkcji – przykład

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0.$$



Ekstremum lokalne funkcji

Minimum globalne

Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum globalne, jeśli dla dowolnych $x \in D_f$, mamy $f(x_0) \leq f(x)$.

Minimum lokalne

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona przynajmniej na pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$.

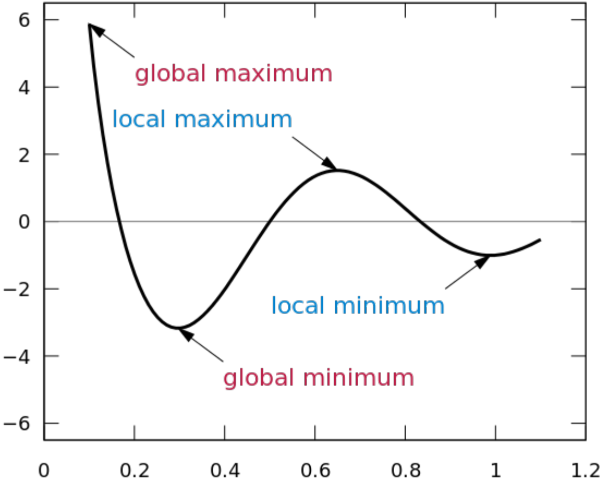
Funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne, jeżeli:

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x_0) \leq f(x)$$

Analogiczne definicje dla maksimum globalnego i lokalnego.

Minimum i maksimum określamy łącznie słowem ekstremum.

Minima lokalne i globalne



(źródło: wikipedia)

Ekstremum lokalne funkcji

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 i pochodną $f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$.

Ekstremum lokalne funkcji

I warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i istnieje δ takie, że:

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & \text{dla każdego} & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) < 0 & \text{dla każdego} & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{array}$$

to funkcja ma w x_0 maksimum lokalne

Analogiczny warunek zachodzi na minimum lokalnego

Ekstremum lokalne funkcji

II warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

Jeżeli $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

Uwaga: Jeśli $f''(x_0) = 0$, to funkcja może mieć w x_0 maksimum, minimum, lub żadne z powyższych.