Analiza matematyczna i algebra liniowa
Pochodna funkcji

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
`http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/`

11.03.2019

Iloraz różnicowy

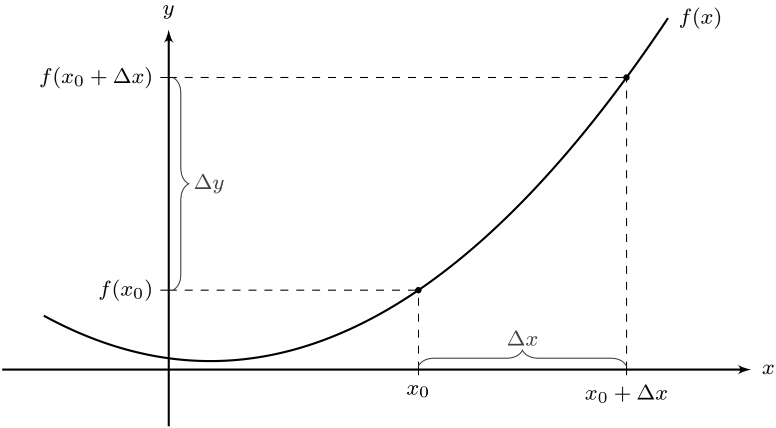
Definicja

Niech f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$.
Ilorazem różnicowy funkcji f w punkcie x_0, odpowiadającym przyrostowi Δx zmiennej niezależnej x nazywamy liczbę:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Iloraz różnicowy – przykład

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Interpretacja ilorazu różnicowego

Sieczna między x_0 a $x_0 + \Delta x$

Iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x_0, odpowiadający przyrostowi Δx jest nachyleniem siecznej wykresu przechodzącej przez punty x_0 i $x_0 + \Delta x$:

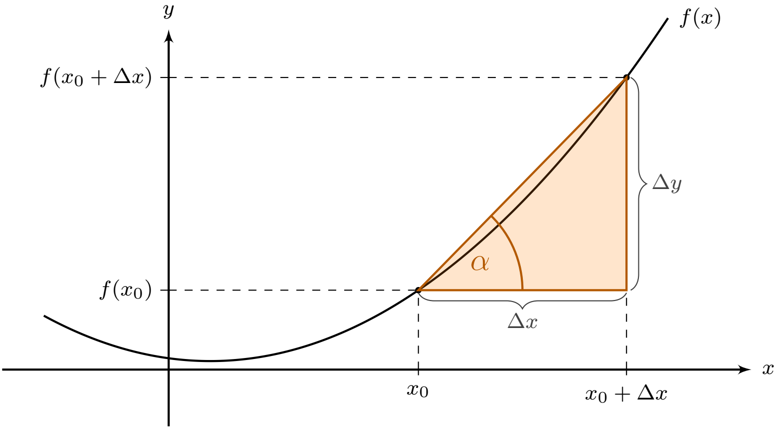
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$$

Prędkość w przedziale czasowym od t do $t + \Delta t$

Niech y będzie funkcją przyporządkowującą każdej chwili czasowej t położenie $y(t)$ jakiegoś obiektu fizycznego. Iloraz różnicowy funkcji y w chwili t_0 odpowiadający przyrostowi czasu Δt jest równy średniej prędkości obiektu w przedziale czasowym od t do $t + \Delta t$.

Iloraz różnicowy – przykład

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$$



Pochodna właściwa funkcji

Definicja

Pochodną funkcji f, określonej przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$, nazywamy granicę właściwą ilorazu różnicowego:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

Do oznaczenia pochodnej używa się też: $\frac{df}{dx}(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$.

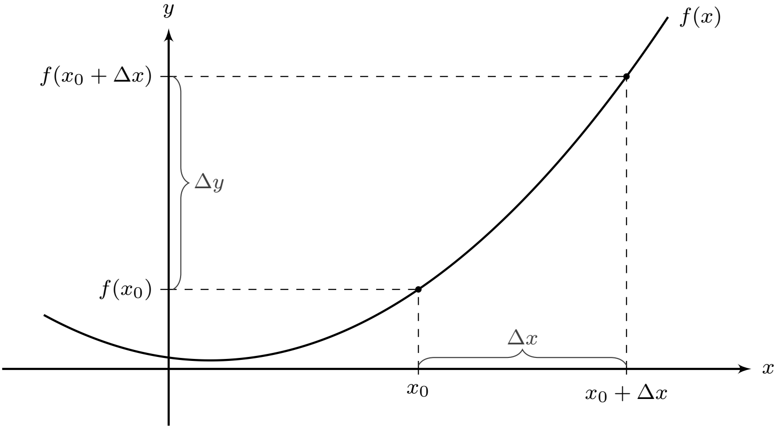
Jeśli granica ilorazu różnicowego jest niewłaściwa (∞ lub $-\infty$), to taką pochodną nazywamy pochodną niewłaściwą.

Pochodną lewo lub prawostronną definiujemy biorąc granicę lewo lub prawostronną. Pochodna właściwa istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją pochodne lewo i prawostronne i są sobie równe.

Pochodna w x_0 istnieje tylko gdy funkcja jest ciągła w x_0.

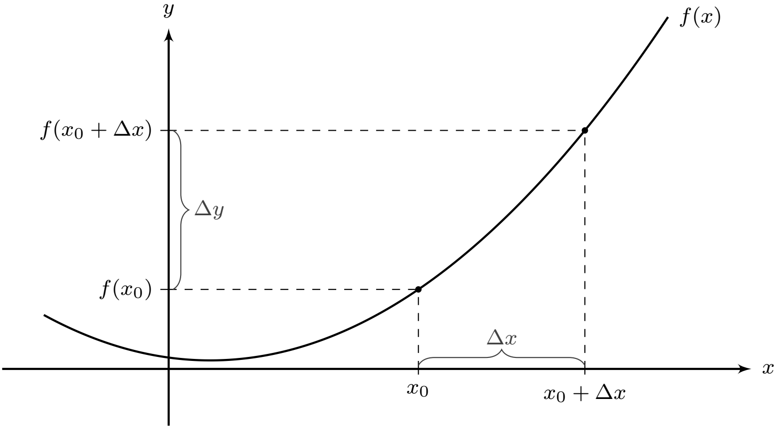
Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



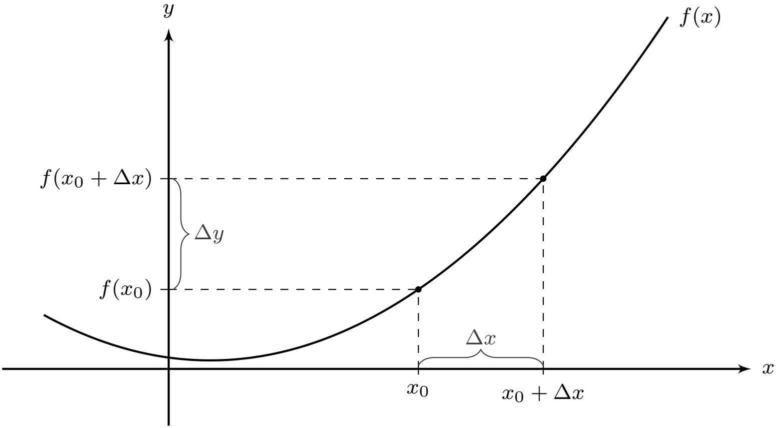
Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



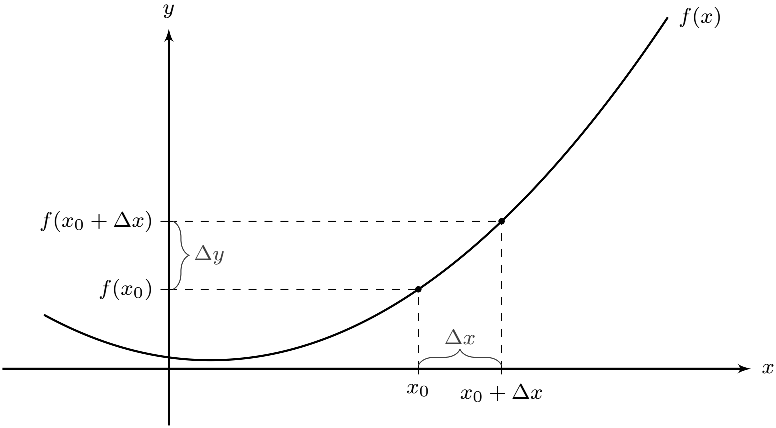
Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Interpretacja pochodnej

Styczna

Pochodna funkcji f punkcie x_0 określa nachylenie stycznej do wykresu f w punkcie x_0.

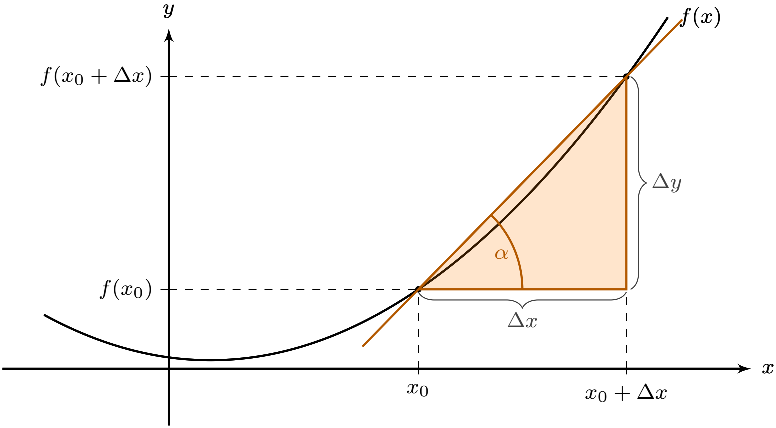
$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$$

Prędkość

Niech y będzie funkcją przyporządkowującą każdej chwili czasowej t położenie $y(t)$ jakiegoś obiektu fizycznego. Wtedy $y'(t)$ jest prędkością w chwili t.

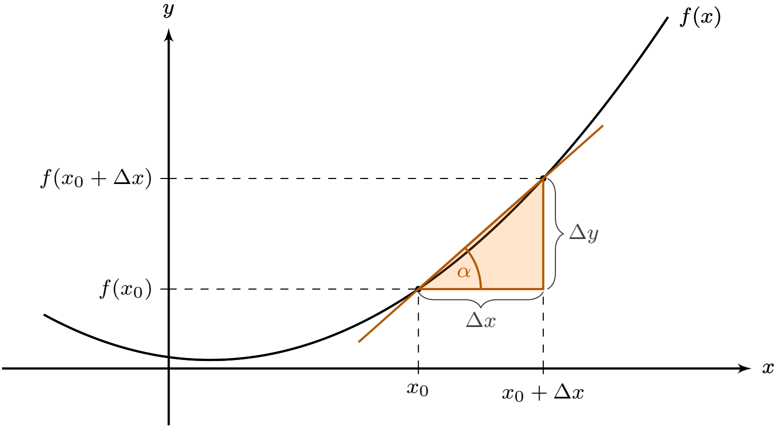
Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{tg}\alpha$$



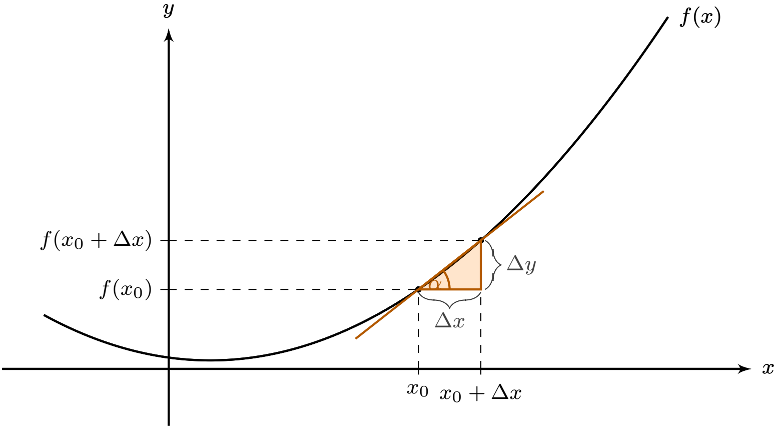
Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$$



Pochodna funkcji w punkcie – przykład

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$$



Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

Twierdzenie

$$
\begin{aligned}
c' &= 0 && \text{dla} \quad c \in \mathbb{R} \\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} && \text{dla} \quad \alpha \in \mathbb{R} \backslash 0 \\
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\mathrm{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
(\mathrm{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
(a^x)' &= a^x \ln a && \text{dla} \quad 0 < a \neq 1 \\
(e^x)' &= e^x
\end{aligned}
$$

Pochodne sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0, to:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\\
(f-g)'(x_0) &= f'(x_0) - g'(x_0),\\
(cf)'(x_0) &= cf'(x_0),\\
(f\cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}
$$

Twierdzenia o pochodnych funkcji

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli:

- funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0,
- funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\, f'(x_0).$$

Twierdzenia o pochodnych funkcji

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Jeżeli funkcja f:

- jest ciągła na otoczeniu $O(x_0)$,
- jest ściśle monotoniczna na otoczeniu $O(x_0)$,
- ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$,

to:

$$\left(f^{-1}\right)'(t_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad \text{gdzie } \; y_0 = f(x_0).$$