Ćwiczenia z analizy matematycznej i algebry liniowej dla bioinformatyki

2. Granica i ciągłość funkcji (04.03.2019)

Zadanie 1. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji pokazać, że

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x+8} = 3$,

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Zadanie 2. Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \cos x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$.

Zadanie 3. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

(c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x+1}$ (wykorzystaj zasady dzielenia wielomianów)

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25^x-9^x}{5^x-3^x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$.

(g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(x+\ln\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Zadanie 4. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach, udowodnić:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$,

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x+1} = 1$.

Zadanie 5. Zbadać ciągłość funkcji:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{dla } x > 1, \\ 2^x & \text{dla } x \le 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{|x-1|} & \text{dla } x \ne 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{dla } x \le \pi/2, \\ \sin x + b & \text{dla } x > \pi/2. \end{cases}$

Zadanie domowe. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2}{x-3}$ (z definicji).

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$ (z arytmetyki granic).

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^5+x^3+x}$ (z arytmetyki granic).

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+\sin^2 x}$ (z twierdzenia i trzech funkcjach i arytmetyki granic).