Analiza matematyczna i algebra liniowa
Granice i ciągłość funkcji

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: piątek 15:10-16:50

Slajdy dostępne pod adresem:
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/bioinformatyka/

04.03.2019

Sąsiedztwo

Definicja

Sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór:

$$S(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\} \qquad \text{gdzie } r > 0.$$

Definiujemy też sąsiedztwo lewostronne $S(x_0^-) = (x_0 - r, x_0)$ i sąsiedztwo prawostronne $S(x_0^+) = (x_0, x_0 + r)$.

Sąsiedztwem $-\infty$ nazywamy zbiór $S(-\infty) = (-\infty, b)$ gdzie $b \in \mathbb{R}$, a sąsiedztwem ∞ zbiór $S(\infty) = (a, \infty)$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Granica funkcji w punkcie według Heinego

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$, ma w punkcie x_0 granicę właściwą $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

gdy:

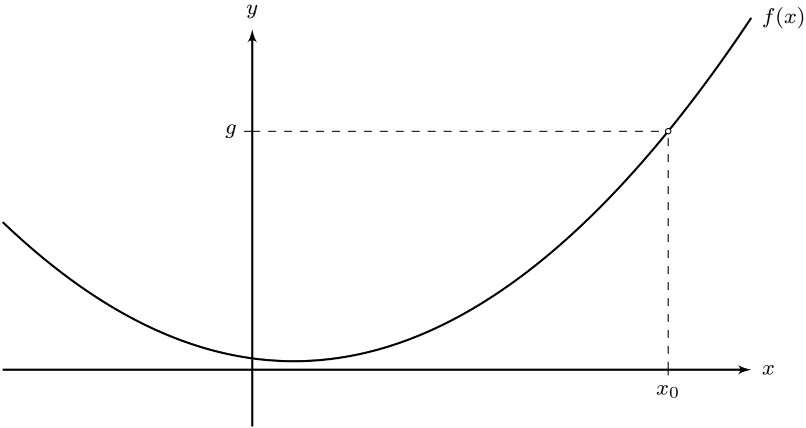
$$\forall (x_n)\colon \{x_n\} \subset S(x_0) \left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right).$$

Uwagi:

- Jeśli zamiast g wstawimy w definicji ∞ lub $-\infty$, to otrzymamy definicję granicy niewłaściwej.
- Jeśli zamiast x_0 wstawimy w definicji ∞ lub $-\infty$, to otrzymamy definicję granicy w nieskończoności.

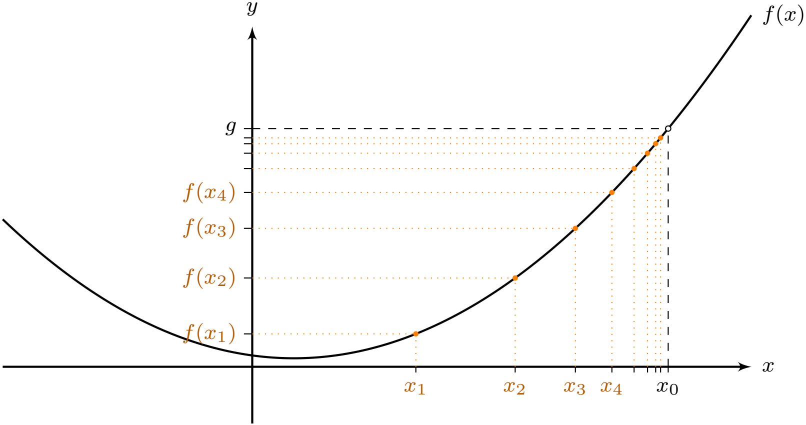
Granica funkcji – przykład

$$\forall (x_n)\colon \{x_n\} \subset S(x_0) \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right)$$



Granica funkcji – przykład

$$\forall (x_n)\colon \{x_n\} \subset S(x_0) \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right)$$



Granica jednostronna funkcji w punkcie według Heinego

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^-)$, ma w punkcie x_0 granicę lewostronną $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy:

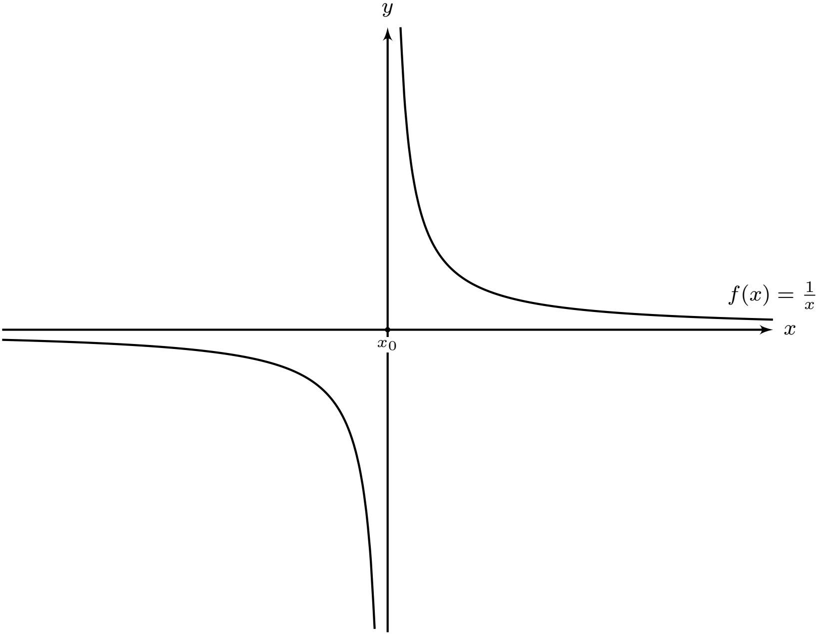
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g,$$

gdy:

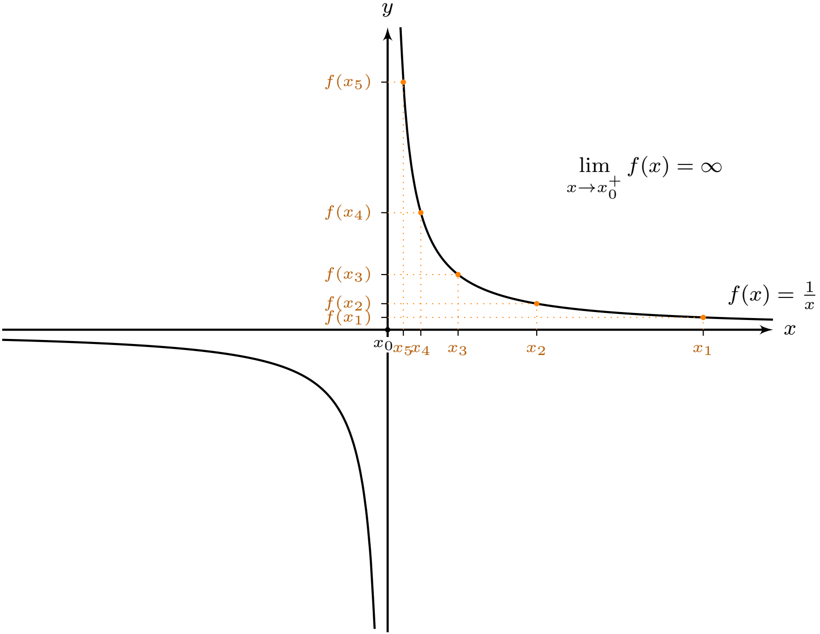
$$\forall (x_n)\colon \{x_n\} \subset S(x_0^-) \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right).$$

Analogicznie definiujemy granicę prawostronną.

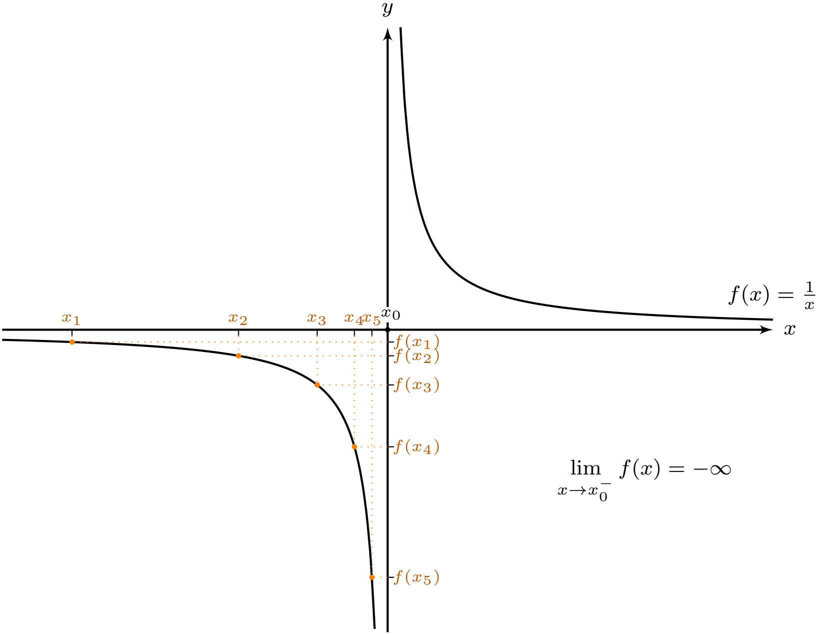
Granice jednostronne – przykład



Granice jednostronne – przykład



Granice jednostronne – przykład



$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Granica funkcji w punkcie według Cauchy'ego

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$, ma w punkcie x_0 granicę właściwą $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in S(x_0) \left(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \epsilon \right).$$

Analogicznie definiujemy granicę lewo i prawostronną.

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$, ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy:

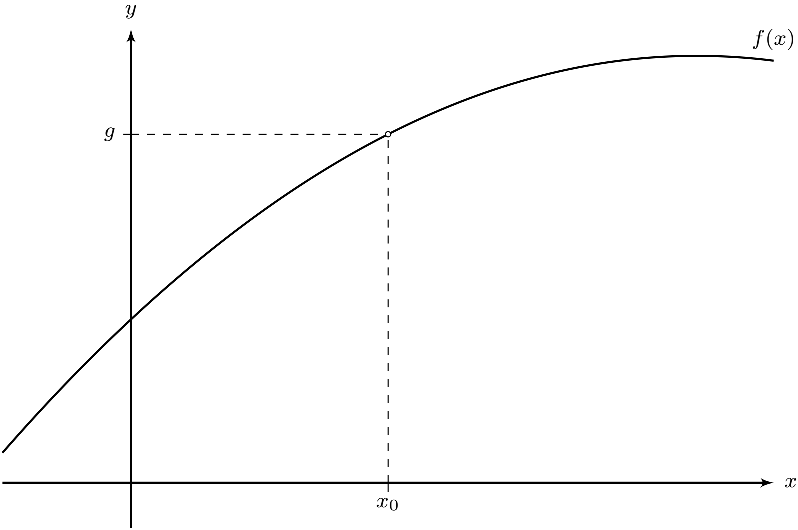
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

gdy:

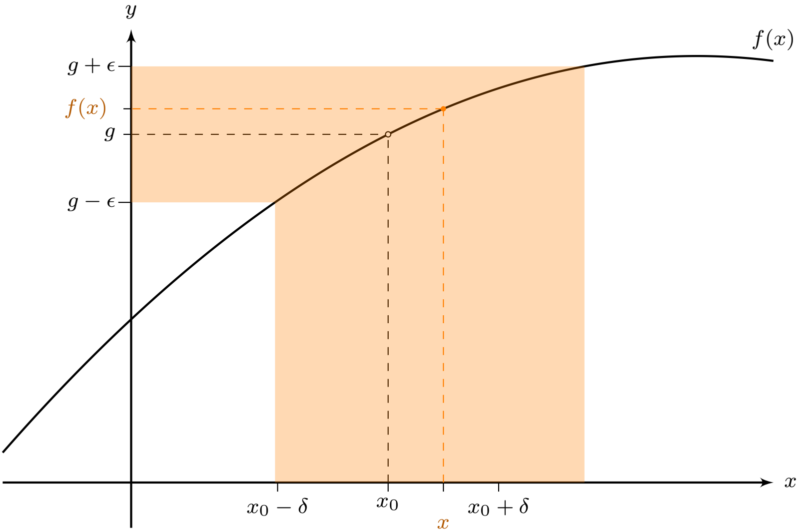
$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists \delta \;\; \forall x \in S(x_0) \left(|x - x_0| < \delta \implies f(x) > \mathcal{E} \right).$$

Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą w $-\infty$.

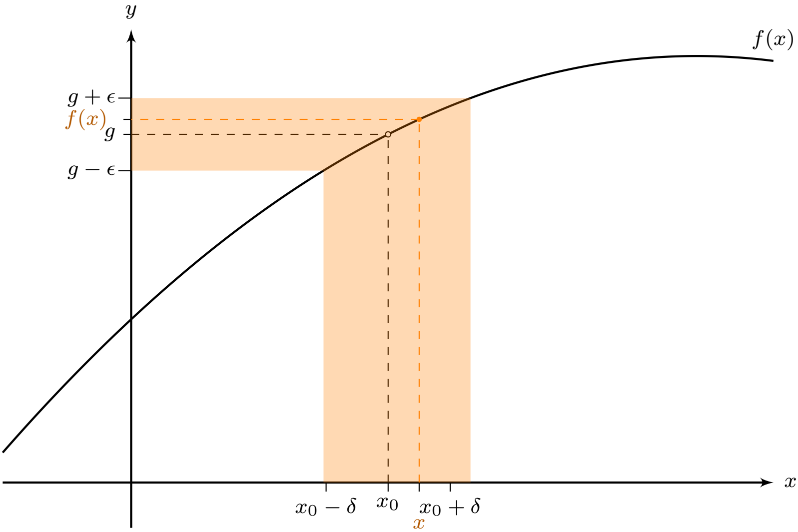
Granica funkcji według Cauchy'ego



Granica funkcji według Cauchy'ego



Granica funkcji według Cauchy'ego



Granica funkcji w nieskończoności według Cauchy'ego

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$, ma w punkcie ∞ granicę właściwą $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g,$$

gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \Delta \;\; \forall x \in S(\infty) \left(x > \Delta \implies |f(x) - g| < \epsilon \right).$$

Funkcja f, określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$, ma w punkcie ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

gdy:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists \Delta \;\; \forall x \in S(x_0) \left(x > \Delta \implies f(x) > \mathcal{E} \right).$$

Podobnie definiujemy granicę w $-\infty$.

Równoważność granic według Heinego i Cauchy'ego

Twierdzenie

Odpowiadające sobie definicje Heinego i Cauchy'ego granic funkcji są równoważne.

Twierdzenia o granicach właściwych funkcji

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}\quad \text{o ile}\quad \lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0}g(x)}$$

Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji

Twierdzenie

$$
\begin{aligned}
a + \infty &= \infty && \text{dla} && -\infty < a \le \infty \\
a \cdot \infty &= \infty && \text{dla} && 0 < a \le \infty \\
\frac{a}{\infty} &= 0 && \text{dla} && -\infty < a < \infty \\
\frac{a}{0^+} &= \infty && \text{dla} && 0 < a \le \infty \\
a^\infty &= 0 && \text{dla} && 0^+ \le a < 1 \\
a^\infty &= \infty && \text{dla} && 1 < a \le \infty \\
\infty^b &= 0 && \text{dla} && -\infty \le b < 0 \\
\infty^b &= \infty && \text{dla} && 0 < b \le \infty
\end{aligned}
$$

Wyrażenia nieoznaczone:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

Twierdzenia o granicach właściwych funkcji

Twierdzenie (o trzech funkcjach)

Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = p$,

to

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = p.$$

Otoczenie

Definicja

Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór:

$$O(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad \text{gdzie } \; r > 0.$$

Definiujemy też otoczenie lewostronne $O(x_0^-) = (x_0 - r, x_0]$ i otoczenie prawostronne $O(x_0^+) = [x_0, x_0 + r)$.

Otoczenie różni się od sąsiedztwa tylko tym, że do otoczenia włączamy również punkt x_0.

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$, jest ciągła w punkcie x_0, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

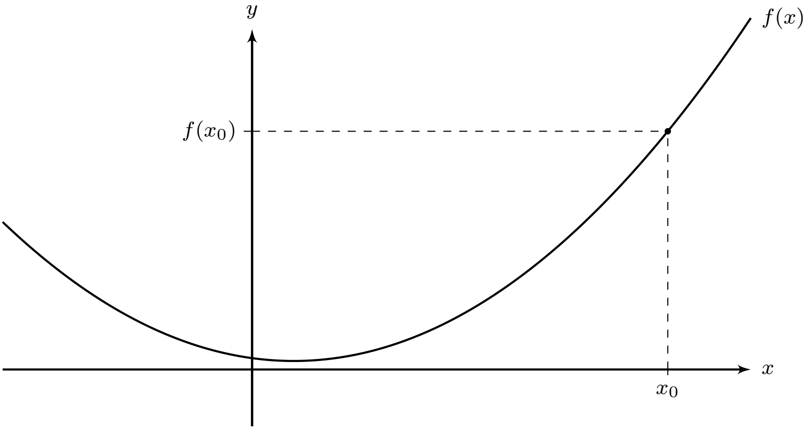
Czyli

- Funkcja jest określona na x_0.
- Funkcja ma granicę w x_0.
- Granica funkcji w x_0 jest równa jej wartości w x_0.

Stosując definicję granicy według Cauchy'ego, funkcja f jest ciągła w x_0, gdy:

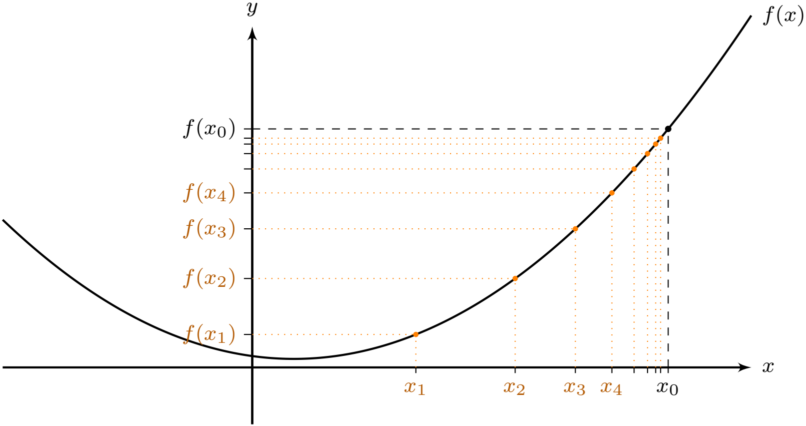
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in O(x_0) \;\; \big(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \big) .$$

Funkcja ciągła – przykład

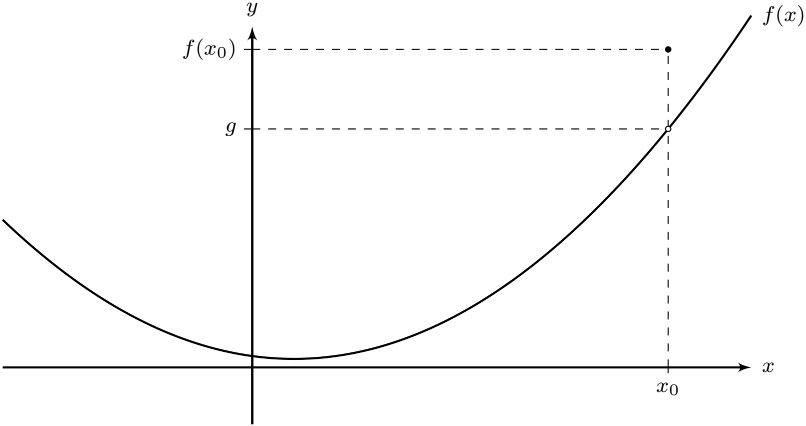


Funkcja ciągła – przykład

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

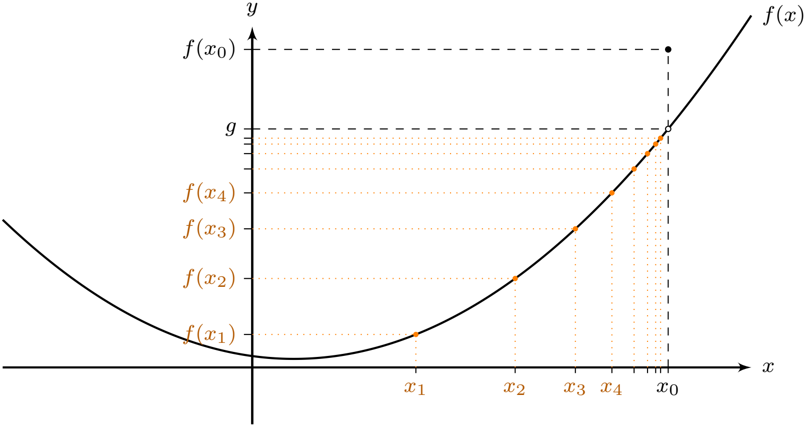


Funkcja nieciągła w x_0 – przykład



Funkcja nieciągła w x_0 – przykład

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \neq f(x_0)$$



Lewostronna ciągłość funkcji w punkcie

Definicja

Funkcja f, określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^-)$, jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0, gdy

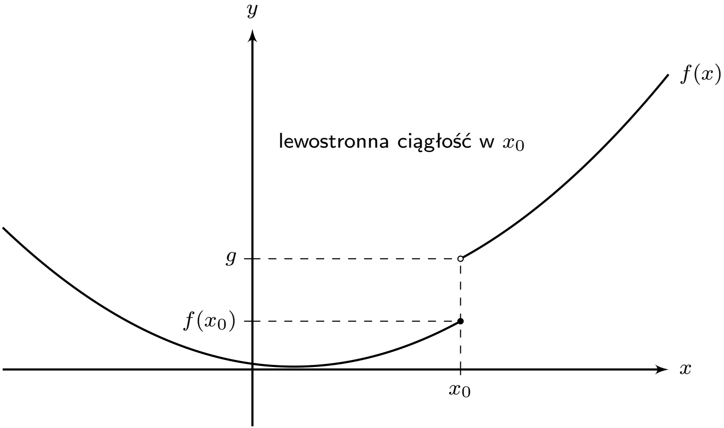
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Podobnie definiujemy prawostronną ciągłość.

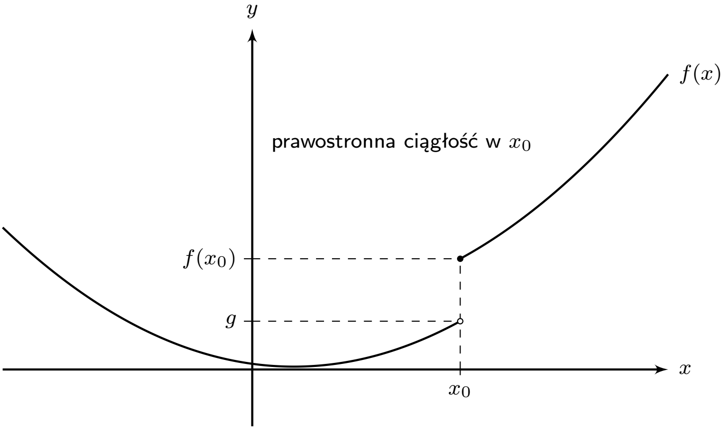
Twierdzenie

Funkcja jest ciągła w punkcie wtedy i tylko wtedy gdy jest w tym punkcie ciągła lewostronnie i prawostronnie.

Lewostronna i prawostronna ciągłość – przykład



Lewostronna i prawostronna ciągłość – przykład



Ciągłość funkcji na przedziale

Definicje

Funkcja jest ciągła na przedziale otwartym (a, b), jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b), prawostronnie ciągła w a i lewostronnie ciągła w b.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie (o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu)

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to:

- funkcja $f + g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- funkcja $f - g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0,
- funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenia o funkcjach ciągłych

Twierdzenie (o ciągłości funkcji złożonej)

Jeżeli:

- funkcja f jest ciągła w punkcie x_0.
- Funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$.

to funkcja złożona $f \circ g$ jest ciągła w punkcie x_0.

Twierdzenie (o ciągłości funkcji odwrotnej)

Niech I oraz J będą dowolnymi przedziałami. Jeżeli funkcja $f \colon I \xrightarrow{na} J$ jest ściśle monotoniczna i ciągła, to funkcja odwrotna $f^{-1} \colon J \xrightarrow{na} I$ jest także ciągła.

Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest ciągła.